RADU AGENT

METODA APROXIMAŢIILOR SUCCESIVE

APLICATĂ ÎN PROBLEME DE STATICĂ
ŞI ÎN ALTE PROBLEME SIMILARE

I

EDITURA DE STAT PENTRU ARHITECTURĂ ŞI CONSTRUCŢII

Scanned with OKEN Scanner

RADU AGENT

METODA APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE

APLICATĂ ÎN PROBLEME DE STATICĂ ȘI ÎN ALTE PROBLEME SIMILARE

I

EDITURA DE STAT PENTRU ARHITECTURĂ ȘI CONSTRUCȚII
1955

Scanned with OKEN Scanner

Recenzent :

Prof. ing. **Şt. Bălan,** *doctor în ştiinţe tehnice, membru corespondent al Academiei R.P.R.*

Verificare ştiinţifică :

Prof. ing. **Al. Gheorghiu**

Conf. ing. **S. Răutu**

Lect. ing. **E. Beiu Paladi**

Lect. ing. **G. Aznavorian**

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Lucrarea de față cuprinde o prezentare într-o formă elementară a metodei de rezolvare prin iterație a sistemelor de ecuații liniare — folosind procedeul cunoscut de organizare a calculului pe o „schemă de transmiteri" — și o serie de aplicații practice ale metodei în probleme de Statică și în alte probleme similare. Se pornește de la analogia care apare în tratarea acestor probleme, atît în ceea ce privește forma ecuațiilor, cît și în semnificațiile fizice ale termenilor din ecuații, și se urmărește stabilirea unei metode generale unitare de abordare și rezolvare a problemelor, astfel ca diferitele metode practice de calcul prin aproximații succesive utilizate într-un caz sau altul să rezulte prin particularizarea pentru cazul respectiv a metodei generale.

În partea introductivă, teoria matematică este expusă la nivelul de cunoștințe matematice cerut inginerilor constructori, cărora li se adresează în special lucrarea de față, punîndu-se în evidență numai aspectele care interesează efectiv în aplicațiile practice din capitolele următoare. Ca aplicații se tratează : în vol. I (cap. III—VI) grinzile continue și cadrele (plane și spațiale) cu noduri fixe, sistemele de arce articulate pe pile flexibile și rețelele de grinzi, iar în vol. II (cap. VII—X) grinzile continue cu reazeme tasabile, cadrele cu noduri deplasabile și probleme de rețele electrice și de rețele de distribuție a apei.

Lucrarea are pe de o parte un caracter de sinteză, prezentînd — strînse la un loc, sistematizate și tratate pe o bază comună, — o serie de metode de calcul cunoscute, iar pe de altă parte cuprinde și unele contribuții noi, care lărgesc cîmpul de aplicații al metodei aproximațiilor succesive. Textul este însoțit de tabele, exemple și de tot materialul necesar rezolvării numerice a problemelor din domeniile abordate.

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

În cele mai multe probleme ce se întîlnesc în Statica construcțiilor, la studiul echilibrului elastic al sistemelor static nedeterminate formate din bare, odată admise ipotezele simplificatoare ce stau la baza acestei discipline, scrierea ecuațiilor care exprimă diferitele condiții de echilibru elastic nu comportă în general dificultăți deosebite. Dificultatea principală pentru calculator rămîne numai rezolvarea numerică a acestor ecuații, care, în special cînd numărul lor depășește 3—4, devine o operație laborioasă. În cazul sistemelor cu un grad mare de nedeterminare statică, unde numărul ecuațiilor trece peste zece, calculul numeric ajunge uneori practic inabordabil, astfel încît devine necesar să se recurgă la diferite aproximații, pentru ca numărul de necunoscute static nedeterminate să poată fi redus.

Aceeași situație apare și în unele probleme din alte domenii (electricitate, hidraulică etc.), unde se ajunge tot la sisteme de ecuații, asemănătoare ca structură celor din Statica construcțiilor.

Una din căile pe care s-a pornit în ultima vreme, pentru rezolvarea practică a problemelor de această natură, este *metoda de calcul prin aproximații succesive*, care constă în determinarea din aproape în aproape a valorilor necunoscutelor, pornind de la niște valori în primă aproximație și corectînd apoi treptat aceste valori pînă cînd se ajunge la cele exacte.

Avantajele pe care le prezintă acest procedeu pentru comoditatea calculului sînt următoarele:

— se evită rezolvarea directă a sistemelor de ecuații și uneori chiar și scrierea lor;

— atît în cursul calculului cît și la sfîrșitul lui se pot face verificări și se pot corecta eventualele erori;

— se poate opri calculul la aproximația dorită, care poate fi oricît de mică;

— organizînd calculul în mod sistematic, el poate fi transformat într-o operație mecanică.

Datorită acestor avantaje, metoda aproximațiilor succesive a căpătat o utilizare din ce în ce mai largă, în special în Statică, unde, dovedindu-se deosebit de avantajoasă, a devenit o metodă curent folosită în practică. În același timp ea a continuat să formeze obiectul a numeroase studii, privind atît aspectul ei teoretic (matematic) cît și aplicațiile practice.

În Statică, metoda aproximațiilor succesive a fost aplicată pentru prima dată în 1906 de *O. Mohr* (v. bibl. 52, 73) la calculul eforturilor secundare în grinzile cu zăbrele cu noduri rigide. Metoda a căpătat însă utilizare în special în problema cadrelor multiple. În 1923, *K. A. Čališev* a dat un procedeu de calcul iterativ pentru cadre multiple, folosind operarea cu

Scanned with OKEN Scanner

rotirile nodurilor, publicat ulterior şi în Memoriile Asoc. Internaţionale de Poduri şi Şarpante (v. bibl. 9). Din 1929 datează metoda lui *N. M. Bernadski* (v. bibl. 7), numită a „echilibrării succesive a nodurilor", în care apare pentru prima dată ideia efectuări operaţiunilor de calcul chiar pe schema cadrului. Tot în 1929 a apărut şi lucrarea cu caracter mai general a lui *I. J. Ştaermann*, privind aplicarea metodei aproximaţiilor succesive în probleme de Statică (v. bibl. 71). Procedeul de organizare a calculului pe o „schemă de transmiteri" a fost introdus de *Hardy Cross* (v. bibl. 10) şi dat ulterior într-o formă mai generală de *Kerkhofs* şi *R. Halasz* (v. bibl. 34). Lucrările lui *Cross* şi *Grinter* (1932—1936) au căpătat o popularitate mai largă în Europa în special prin publicaţiile lui *W. Dernedde* din 1938 (v. bibl. 19, 20).

De atunci s-au mai publicat o serie întreagă de studii, privitoare atît la bazele teoretice ale metodei, cît şi la posibilităţile extinderii aplicării ei la sisteme de forme mai variate. Dintre acestea, trebuie menţionate ca remarcabile şi cîteva lucrări apărute în ultimii ani în ţara noastră, care au adus contribuţii valoroase teoretice şi practice (v. bibl. 5, 46, 47, 48, 49 etc.).

Un alt domeniu în care s-a încercat introducerea calculului prin aproximaţii succesive este cel al reţelelor de distribuţie a apei. Pentru determinarea debitelor în reţele închise (inelare) *H. Cross* a dat în 1936 (v. bibl. 11) un procedeu de calcul elementar, apropiat ca idee de metoda iteraţiei. În cartea prof. *Lobacev* (v. bibl. 43) este expusă o metodă mai completă.

În problema analogă a reţelelor electrice, sînt de asemenea folosite de mult timp metode de calcul iterative, care sînt menţionate în toate manualele de specialitate.

Aplicaţiile metodei iteraţiei au fost extinse şi la alte probleme din domeniul ingineriei (v. şi *R. V. Southwell*, bibl. 68). Nu în toate aceste probleme a condus însă la soluţii atît de simple şi de avantajoase ca în unele cazuri, calculul rămînînd de multe ori destul de laborios şi necesitînd un număr mare de etape pentru a ajunge la rezultate suficient de exacte.

O categorie de probleme în care în general rezolvarea prin aproximaţii succesive s-a dovedit posibilă şi avantajoasă sînt cele care comportă rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare. Metodele de aproximaţii succesive folosite în astfel de probleme decurg din metoda de rezolvare prin iteraţie a sistemelor de ecuaţii liniare.

Obiectul lucrării de faţă este prezentarea unei metode, unitare şi generale, de calcul prin aproximaţii succesive, pentru rezolvarea numerică a problemelor din această categorie, întîlnite în Statica construcţiilor şi în alte discipline din domeniul ingineresc. Ca aplicaţii, am ales cazurile cele mai caracteristice şi anume:

— studiul echilibrului elastic al sistemelor static nedeterminate formate din bare;

— studiul repartiţiei debitelor în reţelele închise (inelare) de conducte de distribuţie a apei;

— studiul repartiţiei curenţilor în reţelele buclate de distribuţie a curentului electric.

După cum se va vedea mai departe, toate aceste sisteme, — atît în ceea ce priveşte modul cum sînt alcătuite şi cum funcţionează sub solicitările la care sînt supuse, cît şi prin forma ecuaţiilor la care se ajunge scriind condiţiile lor de echilibru, — prezintă o analogie totală, astfel că pot fi înglobate într-o teorie de calcul unitară.

Aplicînd metoda aproximațiilor succesive în calculul acestor sisteme, s-a căzut în unele cazuri peste metode cunoscute. Astfel, de exemplu, în cazul cadrelor cu noduri fixe, s-a ajuns, după modul cum s-au ales necunoscutele static nedeterminate, fie la metoda cunoscută a repartizării momentelor, fie la alte metode asemănătoare, descrise în literatură. Reconsiderarea printr-o prismă unitară a acestor metode cunoscute nu este însă lipsită de interes, pentru mai buna lor înțelegere, deoarece ele sînt în general prezentate în manuale fără justificări teoretice prea clare.

În alte cazuri s-a ajuns la metode de calcul noi, noutatea constînd fie în domeniul care se abordează, fie numai în procedeul de calcul adoptat. Astfel, în vol. I al lucrării se prezintă (cap. V) o metodă pentru calculul grinzilor continue, publicată recent de autor în colaborare cu ing. *Mihai Popovici* în revistele A.S.I.T. „Industria Construcțiilor și a Materialelor de Construcție". De asemenea, în cap. VI este dată o metodă pentru calculul prin aproximații succesive al rețelelor plane de grinzi și al altor sisteme asemănătoare, care a fost expusă în 1949 de autor în cadrul unor conferințe ținute la Institutul de Construcții din București. În vol. II al lucrării este expusă noua metodă de calcul al cadrelor cu noduri deplasabile cu ajutorul „*nodurilor fictive*", care a făcut obiectul unor conferințe ținute în 1952 la Institutul de Construcții din București de ing. *G. Aznavorian* și de autor, precum și alte aplicații.

În felul acesta, lucrarea de față are pe de o parte un caracter de sinteză, cuprinzînd studiul general al metodei iterației folosită la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare (cap. II) și aplicațiile ei la probleme de Statică (cap. III—VIII) și la alte probleme analoge (cap. IX—X)—iar pe de altă parte, în cuprinsul ei se prezintă, strînse la un loc, o serie de contribuții noi în acest domeniu, reprezentînd extinderea aplicării metodei iterației la probleme noi.

La fiecare capitol s-a completat textul cu o serie de exemple de calcul și de tabele, astfel ca lucrarea să conțină tot materialul necesar pentru calcul. La redactarea exemplelor și tabelelor, au colaborat ing. *Fr. Lissai*, ing. *M. Popovici*, ing. *I. Bîlă*, ing. *V. Visarion*, ing. *R. Schnell* și ing. *V. Dordea*, cărora li se aduc mulțumiri pe această cale.

De asemenea autorul exprimă mulțumirile sale colectivului Catedrei de Mecanica Construcțiilor a Institutului de Construcții din București și în special prof. *Șt. Bălan*, membru corespondent al Academiei R.P.R., prof. *Al. Gheorghiu*, conf. *S. Răutu*, lect. *E. Beiu Paladi* și lect. *G. Aznavorian*, care au avut sarcina verificării lucrării și care, prin sugestiile lor, au contribuit în mod esențial la ridicarea nivelului ei științific.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

SCRIEREA SISTEMULUI DE ECUAȚII ÎN CAZUL GENERAL

I. Sisteme formate din bare

Un aspect comun al tuturor problemelor la care ne referim constă în faptul că soluționarea lor conduce, în toate cazurile, la scrierea unui sistem de ecuații liniare de aceeași formă, în sensul că elementele care intervin în ecuații (necunoscutele, coeficienții necunoscutelor, termenii liberi) au semnificații fizice analoge. De aceea sistemul de ecuații s-ar putea scrie într-o formă generală, valabilă pentru toate problemele ce vor fi tratate, introducînd noțiuni generalizate, din care, în fiecare caz, să poată rezulta prin particularizare elementele caracteristice cazului respectiv. Metoda de rezolvare prin aproximații succesive poate fi de asemenea stabilită pentru acest sistem de ecuații în forma generală, ea putîndu-se apoi aplica de la caz la caz, prin simpla înlocuire, în formulele obținute, a noțiunilor generalizate cu noțiunile corespunzătoare din cazul particular considerat.

Pentru claritatea expunerii, nu vom aborda totuși problema de la început sub această formă, care, deși interesantă din punct de vedere teoretic, prezintă dezavantajul folosirii unor noțiuni a căror semnificație fizică este mai greu de urmărit. Vom considera un caz mai frecvent întîlnit, cel al *sistemelor formate din bare*, pentru care vom scrie ecuațiile, urmînd ca extinderea pentru alte tipuri de sisteme să se facă ulterior.

După cum se știe, în Statica construcțiilor barele se definesc ca elemente avînd una din dimensiuni — lungimea — predominantă în raport cu celelalte două, astfel că în schema de calcul ele pot fi considerate reduse la axa lor longitudinală. Aceasta revine la a ține seama de variația eforturilor (momentelor încovoietoare, forțelor tăietoare etc.) numai în lungul axei elementului, neglijînd variațiile lor în planul secțiunii transversale.

Barele formează *sisteme*. Orice structură de rezistență a unei construcții, dacă este alcătuită din elemente avînd caracteristicile barelor (grinzi, stîlpi, diagonale) poate fi redusă pentru calcul la un sistem de bare, în care eforturile în stadiul elastic se pot determina cu ajutorul regulilor din Statica construcțiilor.

Atît timp cît în toate punctele sistemului materialul din care sînt alcătuite barele lucrează în stadiul elastic, există pentru fiecare schemă de încărcare o singură poziție de echilibru posibilă a sistemului după deformare : *poziția de echilibru elastic*.

Poziția de echilibru elastic a unei bare este determinată dacă, pe lîngă sarcinile exterioare care acționează asupra barei, se cunosc și mări-

mile deplasărilor capetelor (reazemelor) ei față de poziția lor inițială (rotirile și translațiile capetelor barei), adică dacă sînt date condițiile de margine. Cunoscînd aceste deplasări, se pot determina reacțiunile pe reazeme și apoi, cu ajutorul acestora, se pot calcula în orice punct al barei valorile eforturilor și deplasărilor.

În cazul unei bare izolate (fig. 1), supuse unei încărcări oarecare acționînd într-un singur plan, condițiile de margine pot fi următoarele:

a) *pentru rotirile* θ_A, θ_B *ale capetelor barei*:

— rotirea liberă (capăt de bară articulat) . $M = 0$

— rotirea împiedicată de reazem (capăt de bară încastrat) . $\theta = 0$

— rotirea avînd o valoare dată (caz mai rar întîlnit în practică) $\theta = const.$

— rotirea este funcție de momentul pe reazemul respectiv, de exemplu proporțională cu acesta (capăt de bară încastrat parțial) . $\theta = k\,M$

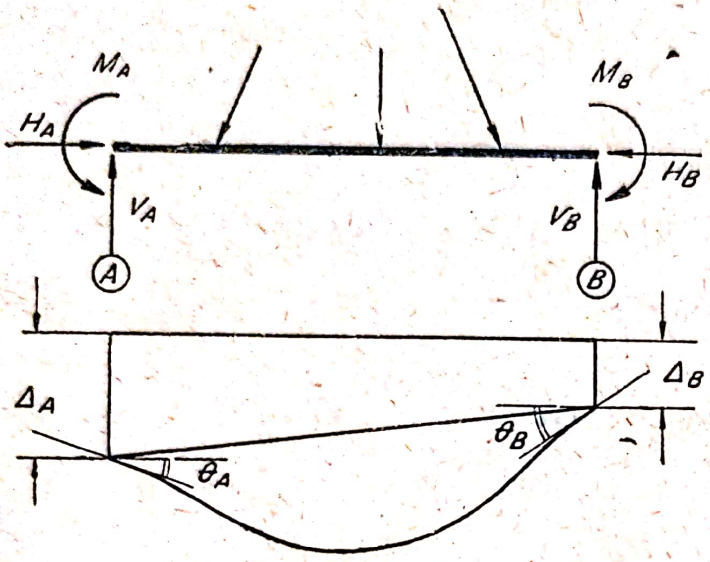


Fig. 1

b) *pentru translațiile* Δ_A, Δ_B *ale capetelor barei*:

— translația liberă după o direcție, de exemplu după orizontală (reazem simplu) . . . . . $H = 0$

— translația liberă după orice direcție (capăt de consolă) . . $V = 0$, $H = 0$

— translația împiedicată de reazem (reazem fix, care, după condițiile de rotiri, poate fi o articulație sau o încastrare) . . . . . $\Delta = 0$

— translația avînd o valoare dată (reazem tasat sau capăt de bară deplasat prin variația lungimii barei datorită variației de temperatură etc.) . . . . . $\Delta = const.$

— translația este funcție de reacțiunea pe reazemul respectiv, de exemplu proporțională cu aceasta (reazem elastic) . . $\Delta = k\,V$

În cazul unei bare făcînd parte dintr-un sistem, condițiile de margine depind de legăturile ei cu celelalte bare, astfel încît continuitatea sistemului să fie asigurată în punctele de întîlnire ale barelor (*noduri*). *Condiția de continuitate* a sistemului într-un nod este satisfăcută dacă deplasările capetelor de bare care se întîlnesc în nod sînt egale ca mărime și direcție. Pentru ca sub acțiunea sarcinilor sistemul să fie stabil și să-și păstreze schema inițială, este necesar ca în fiecare nod să fie asigurată continuitatea translațiilor, deci în structura reală nodurile trebuie să fie astfel realizate constructiv, ca să poată transmite forțele axiale și forțele tăietoare de la un element la altul. În ceea ce privește continuitatea rotirilor, aceasta nu trebuie să fie asigurată în toate nodurile, unele bare putînd fi articulate în noduri; sistemul trebuie să aibă numai minimul de legături rigide la rotire necesar pentru a nu deveni labil.

În fiecare nod vom avea deci (într-un sistem plan) cîte 3 condiții de continuitate: egalitatea translațiilor, ca direcție și mărime, și egalitatea

rotirilor, numai ca mărime, direcția fiind cunoscută (vectorul rotirii normal pe planul sistemului). Scriind aceste condiții, la care se adaugă cele de echilibru, rezultă un sistem de ecuații, din a cărui rezolvare se obțin valorile deplasărilor capetelor de bare. Odată acestea cunoscute, poziția de echilibru elastic a fiecărei bare devine determinată.

În fig. 2—6 sînt arătate cîteva exemple de sisteme formate din bare, diferind între ele prin importanța pe care diversele condiții de continuitate o capătă unele față de altele.

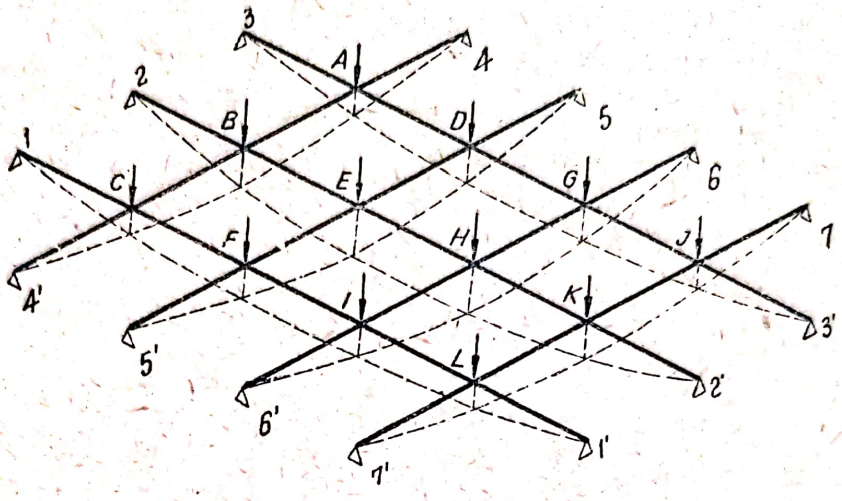


Fig. 2

În fig. 2 este reprezentată o rețea plană ortogonală de grinzi, acționată de forțe normale pe planul ei. Condițiile de continuitate la noduri sînt următoarele :

— săgețile grinzilor să fie egale în punctele de încrucișare (continuitatea translațiilor, ca mărime ; direcția translațiilor se cunoaște, fiind normală pe planul rețelei de grinzi) ;

— rotirile grinzilor să fie egale în punctele de încrucișare. Sistemul fiind spațial, nu se cunosc direcțiile vectorilor rotirilor, despre care se știe numai că sînt cuprinse în planul rețelei ; vom avea deci două condiții de continuitate la rotire în fiecare nod : ca mărime și ca direcție. Dacă se descompun vectorii rotirilor după direcțiile grinzilor, care sînt ortogonale, cele două condiții devin : rotirile grinzilor *1*, *2*, *3* la încovoiere să fie egale în punctele de încrucișare cu rotirile grinzilor *4*, *5*, *6*, *7* la răsucire și viceversa.

În unele cazuri (de ex. planșee în casete) condițiile de continuitate la rotire se pot neglija, întrucît prin neglijarea lor sistemul rămîne stabil, respectiv se transformă în două grupuri de grinzi legate articulat unele de altele, iar valorile momentelor încovoietoare în grinzi nu rezultă cu mult diferite de cele exacte [1]). Atunci rămîne la fiecare nod cîte o singură condiție de continuitate, aceea a mărimilor săgeților.

În fig. 3 s-a reprezentat un cadru cu noduri fixe, încărcat pe deschiderile *AB* și *BC* cu o sarcină oarecare. Sub acțiunea acestei sarcini, cadrul se încarcă cu momente încovoietoare, forțe tăietoare și forțe axiale, iar nodurile capătă translații și rotiri. Lucrul mecanic produs de forțele tăietoare și de forțele axiale se poate neglija, în raport cu acel produs de momentele încovoietoare. Aceasta revine în primul rînd la a neglija deformațiile axiale ale barelor și în consecință, sistemul fiind geometricește indeformabil,

[1]) v. bibl. 23.

a considera translațiile nodurilor egale cu zero. Rezultă că la fiecare nod va rămîne cîte o singură condiție de continuitate, aceea a mărimii rotirilor produse de momente.

Dacă una din barele cadrului este articulată într-un nod, ea nu se rotește împreună cu nodul respectiv și deci sistemul capătă o discontinui-

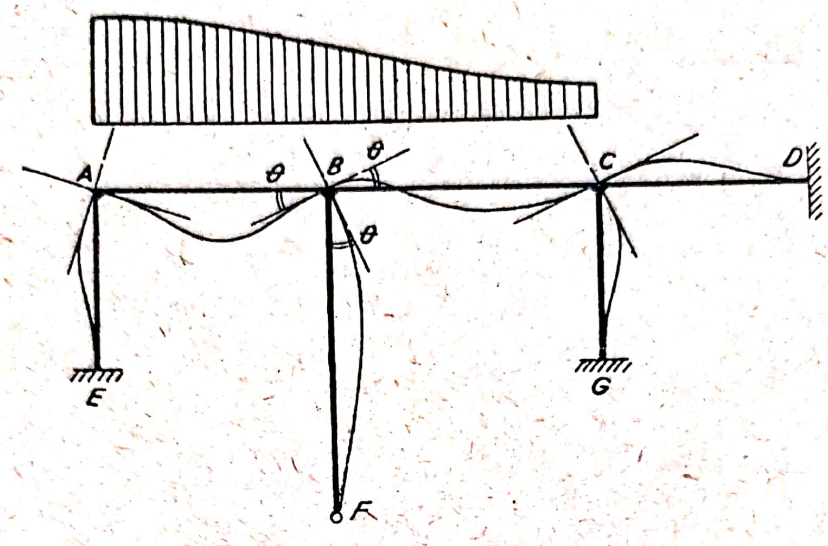


Fig. 3

tate la rotire (fig. 4). Continuitatea translațiilor însă, de care nu se ține seama în calcul, se păstrează.

Sistemele din fig. 2—4 se caracterizează prin faptul că una din condițiile de continuitate are o influență determinantă asupra deplasărilor, celelalte putîndu-se neglija cu suficientă aproximație. Aceste categorii de sisteme, care în calcul apar cu cîte o singură condiție de continuitate și deci cu cîte o singură necunoscută la fiecare nod, le vom denumi *sisteme cu legături de tipul I*. După cum se va vedea din capitolele următoare, ele se pretează în modul cel mai avantajos la o rezolvare prin aproximații succesive.

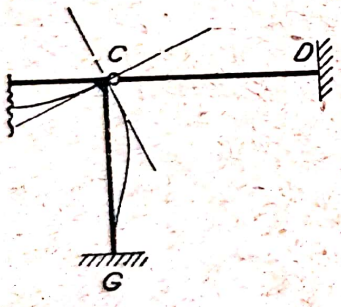


Fig. 4

În fig. 5 este reprezentat un cadru cu noduri deplasabile, acționat de o forță concentrată aplicată într-un nod. Un astfel de cadru poate căpăta translații la noduri nu numai prin deformațiile axiale ale barelor, ci și din lucrul mecanic al momentelor încovoietoare, deci chiar dacă se neglijează lucrul mecanic al forțelor axiale și al forțelor tăietoare, nodurile pot totuși primi atît rotiri cît și translații.

Direcția translațiilor se poate determina din condiții geometrice, astfel că la fiecare nod rămîn cîte două necunoscute : mărimea translației și mărimea rotirii. Translațiile nu pot fi neglijate, ele influențînd sensibil starea de solicitare a sistemului.

Sistemul din fig. 6 este un ansamblu de bare drepte legate între ele prin articulații și acționat de o serie de forțe exterioare concentrate la noduri. Deformata este reprezentată punctat. Sistemul este geometricește indeformabil și rotirile tuturor capetelor de bare în noduri sînt libere, astfel că toate barele se încarcă numai cu eforturi axiale, iar singurele deplasări posibile ale nodurilor sînt translațiile datorite deformațiilor axiale ale barelor.

Direcțiile acestor translații nu sînt cunoscute, deci la fiecare nod vom avea cîte două condiții de continuitate : direcția și mărimea translației.

Sistemele de felul celor din fig. 5 și 6, care se caracterizează prin cîte 2 sau mai multe condiții de continuitate la fiecare nod, le vom denumi *sisteme cu legături de tipul II*. În realitate, orice sistem format din bare, dacă

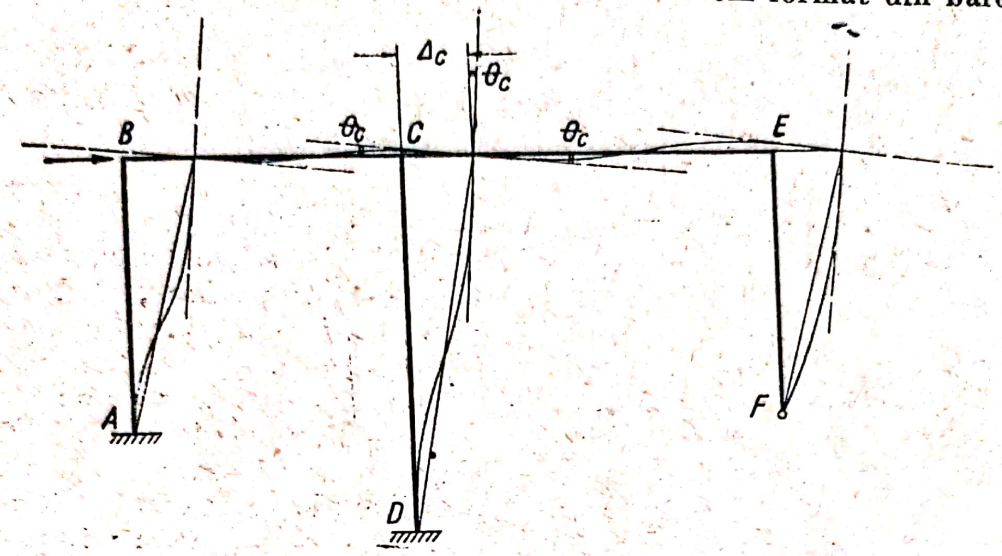


Fig. 5

se ține seama de toate elementele, este un sistem cu legături de tipul II. Cazurile din fig. 2—4 se reduc la tipul I numai prin aproximațiile admise, diferențiindu-se principial numai prin faptul că aceste aproximații sînt posibile fără erori prea mari.

Pentru determinarea eforturilor este necesar să se scrie, în afară de *condițiile de continuitate* (care se referă la deplasări), și *condițiile de echilibru*, care se referă la solicitări (forțe sau momente). Condiția de echilibru în jurul unui nod este ca suma solicitărilor capetelor de bare care se întîlnesc în nod să fie egală cu zero. La fiecare nod vom avea cîte o condiție de echilibru, corespunzătoare fiecărei condiții de continuitate. Astfel, la condiția de continuitate a rotirilor va corespunde o condiție de echilibru a momentelor (suma momentelor la capetele de bare în jurul nodului să fie egală cu zero, sau, dacă asupra nodului acționează și un moment exterior, să echilibreze momentul exterior) — iar la condiția de continuitate a translațiilor va corespunde o condiție de echilibru a forțelor.

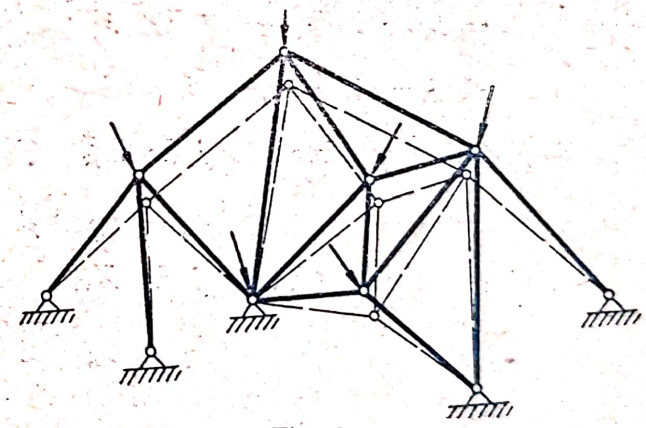


Fig. 6

II. Relațiile între solicitări și deplasări pentru o bară

Dintr-un sistem de bare, pe care pentru simplitate să-l presupunem cu legături de tipul I, izolăm o bară jk (fig. 7). În poziția deformată a sistemului, nodurile j, k se deplasează în j', k', iar extremitățile barei se încarcă,

datorită continuității cu restul sistemului, cu solicitările $X_{jk}^{(j)}$ $X_{jk}^{(k)}$. Deplasările $\delta_j = jj'$, $\delta_k = kk'$ pot fi rotiri sau translații, iar solicitările $X_{jk}^{(j)}$, $X_{jk}^{(k)}$ forțe sau momente.

Notăm :

δ_{jj} = deplasarea din j, produsă de $X_{jk}^{(j)}$

δ_{jk} = deplasarea din j, produsă de $X_{jk}^{(k)}$

$\varphi_{jk}^{(j)}$ = deplasarea din j, produsă de sarcinile exterioare aplicate pe bară, cînd $X_{jk}^{(j)} = X_{jk}^{(k)} = 0$ (deplasările în j și k sînt libere)

$\delta_j = \varphi_{jk}^{(j)} + \delta_{jj} + \delta_{jk}$ = deplasarea totală din j

$\bar{X}_{jk}^{(j)}$, $\bar{X}_{jk}^{(k)}$ = solicitările care apar la capetele j și k ale barei, datorită sarcinilor de pe bară, cînd deplasările în j și k sînt împiedicate ($\delta_j = \delta_k = 0$).

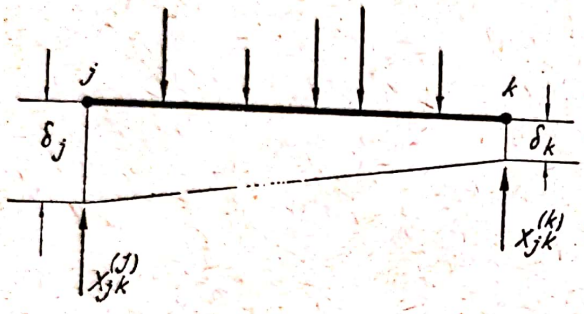


Fig. 7

Convenția de semne :

— Pentru deplasările δ se alege un sens în care se consideră pozitive (de ex. pentru translații orizontale sensul de la stînga spre dreapta, sau pentru rotiri, sensul acelor de ceasornic).

— Solicitările X se consideră pozitive cînd tind să producă în capetele respective de bară deplasări pozitive.

Admițînd ca valabil principiul suprapunerii efectelor, relațiile între solicitările X și deplasările δ vor fi liniare.

a) *Exprimarea deplasărilor în funcție de solicitări*

Deplasarea produsă în j de $X_{jk}^{(j)}$, cînd $X_{jk}^{(k)} = 0$:

$$\delta_{jj} = \eta_{jj} \; X_{jk}^{(j)}$$

Deplasarea produsă în j de $X_{jk}^{(k)}$, cînd $X_{jk}^{(j)} = 0$:

$$\delta_{jk} = \eta_{jk} \; X_{jk}^{(k)}$$

unde η_{jj}, η_{jk} sînt niște coeficienți de influență, independenți de valorile solicitărilor și funcții numai de elementele caracteristice geometrice și de material ale barei (lungimea, aria sau momentul de inerție al secțiunii transversale, modulul de elasticitate al materialului din care este alcătuită). În tabela următoare se arată care sînt caracteristicile de material și geometrice care intervin în expresiile coeficienților η_{jj}, η_{jk} la cîteva tipuri de sisteme formate din bare.

După cum se observă din tabelă, natura caracteristicilor geometrice și de material care intervin nu depinde de felul solicitărilor exterioare sau al deplasărilor, ci numai de felul eforturilor al căror lucru mecanic este cel care se consideră în calcul. Astfel de exemplu, în cazul rețelelor de grinzi, deși solicitările exterioare sînt forțe aplicate la noduri, iar deplasările — translații, intervine momentul de inerție al secțiunii transversale a barelor, deoarece lucrul mecanic de deformație care se consideră în calcul este cel produs de momentele încovoietoare.

Scanned with OKEN Scanner

Tipul de sistem	Solicitările exterioare ale nodurilor	Deplasările nodurilor	Eforturile al căror lucru mecanic este predominant	Condiții de echilibru	Condiții de continuitate	Caracteristica de material	Caracteristicile geometrice ale barelor
Sisteme articulate plane (fig. 6)	Forțe acționînd în planul sistemului ($\overline{F}$)	Translații în planul sistemului (Δ)	Forțe axiale (N)	$\Sigma F = 0$ (ca mărime și direcție)	Δ = același la nod, ca mărime și direcție	Modulul de elasticitate (E)	1) Aria secțiunii transversale (A) 2) Lungimea barei (l)
Rețele plane de grinzi (fig. 2)	Forțe normale pe planul sistemului ($\overline{P}$)	Translații (săgeți) după direcțiile forțelor (y)	Momente încovoietoare (M)	$\Sigma P = 0$	y = același la nod	Idem	1) Momentul de inerție al secțiunii transversale (I) 2) Lungimea barei (l)
Cadre plane cu noduri fixe (fig. 3—4)	Momente în planul cadrului ($\overline{M}$)	Rotiri în planul cadrului (θ)	Momente încovoietoare (M)	$\Sigma M = 0$	θ = același la nod	Idem	Idem
Cadre ortogonale spațiale cu noduri fixe (v. cap. V) — Barele supuse la încovoiere	Momente în planul grinzilor supuse la încovoiere ($\overline{M}$)	Rotiri în planul grinzilor supuse la încovoiere (θ)	Momente încovoietoare (M)	$\Sigma M + \Sigma M^{(t)} = 0$	θ = același la nod	Idem	1) Momentul de inerție (I) 2) Lungimea barei (l)
Cadre ortogonale spațiale cu noduri fixe (v. cap. V) — Barele supuse la răsucire			Momente de răsucire ($M^{(t)}$)			Modulul de elasticitate transversal (G)	1) Momentul de inerție la răsucire (I_t) 2) Lungimea barei (l)
Cadre plane cu noduri deplasabile (fig. 5)	Forțe și momente acționînd în planul sistemului ($\overline{F}$, $\overline{M}$)	Translații și rotiri în planul sistemului (Δ, θ)	Momente încovoietoare (M)	$\Sigma F = 0$ $\Sigma M = 0$	Δ = același la nod θ = același la nod	Modulul de elasticitate (E)	1) Momentul de inerție (I) 2) Lungimea barei (l)

Scanned with OKEN Scanner

Coeficientul η_{jk} reprezintă deplasarea produsă în capătul j al barei jk de o solicitare avînd valoarea egală cu unitatea, aplicată în k. Conform teoremei reciprocității, avem : $\eta_{jk} = \eta_{kj}$.

Deplasarea totală a capătului j, considerînd că pe bara jk se aplică și sarcini exterioare :

$$\delta_j = \varphi_{jk}^{(j)} + \delta_{jj} + \delta_{jk} = \varphi_{jk}^{(j)} + \eta_{jj} X_{jk}^{(j)} + \eta_{jk} X_{jk}^{(k)}$$

Relațiile :

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_j &= \varphi_{jk}^{(j)} + \eta_{jj} X_{jk}^{(j)} + \eta_{jk} X_{jk}^{(k)} \\ \delta_k &= \varphi_{jk}^{(k)} + \eta_{jk} X_{jk}^{(j)} + \eta_{kk} X_{jk}^{(k)} \end{aligned}} \qquad (1.1)$$

dau expresiile deplasărilor în funcție de solicitări.

b) *Exprimarea solicitărilor în funcție de deplasări*

Dacă se imprimă capătului j al barei o deplasare δ_j, păstrînd în k $\delta_k = 0$, va apare în j o solicitare :

$$X_{jk}^{(j)} = \nu_{jj} \ \delta_j$$

Dacă se imprimă capătului k o deplasare δ_k, păstrînd $\delta_j = 0$, apare în j solicitarea :

$$X_{jk}^{(j)} = \nu_{jk} \ \delta_k$$

Presupunînd că pe bara jk se aplică și sarcini exterioare, solicitarea totală în capătul j va fi :

$$X_{jk}^{(j)} = \overline{X}_{jk}^{(j)} + \nu_{jj} \ \delta_j + \nu_{jk} \ \delta_k$$

Relațiile :

$$\boxed{\begin{aligned} X_{jk}^{(j)} &= \overline{X}_{jk}^{(j)} + \nu_{jj} \ \delta_j + \nu_{jk} \ \delta_k \\ X_{jk}^{(k)} &= \overline{X}_{jk}^{(k)} + \nu_{jk} \ \delta_j + \nu_{kk} \ \delta_k \end{aligned}} \qquad (1.2)$$

dau expresiile solicitărilor în funcție de deplasări.

Coeficienții ν_{jj}, ν_{jk} sînt, ca și coeficienții η_{jj}, η_{jk}, niște constante ale sistemului, depinzînd numai de caracteristicile geometrice și de material ale barelor. Coeficientul ν_{jk} reprezintă solicitarea care apare în capătul j al barei jk, dacă se imprimă nodului k o deplasare avînd valoarea egală cu unitatea, păstrîndu-se nodul j nedeplasat.

Coeficientul ν_{jj} caracterizează deformabilitatea barei, fiind egal cu solicitarea care trebuie aplicată în j pentru a produce în j o deplasare unitară. De aceea poate fi denumit *rigiditatea de deplasare* a barei jk în j.

Se observă că dacă $\nu_{jk} = -\nu_{jj}$, relațiile (1.2) devin :

$$\left.\begin{aligned} X_{jk}^{(j)} &= \overline{X}_{jk}^{(j)} + \nu_{jj} \ (\delta_j - \delta_k) \\ X_{jk}^{(k)} &= \overline{X}_{jk}^{(k)} + \nu_{jj} \ (\delta_k - \delta_j) \end{aligned}\right\} \qquad (1.2')$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd acest sistem de 2 ecuații în raport cu δ_j, δ_k, pentru a regăsi relațiile (1.1), δ_j și δ_k se reduc și rămîne :

$$X_{jk}^{(j)} + X_{jk}^{(k)} = \overline{X}_{jk}^{(j)} + \overline{X}_{jk}^{(k)}$$

sau, dacă bara nu este încărcată ($\overline{X}_{jk}^{(j)} = \overline{X}_{jk}^{(k)} = 0$), sau este simetrică și simetric încărcată ($\overline{X}_{jk}^{(j)} = -\overline{X}_{jk}^{(k)}$) :

$$\boxed{X_{jk}^{(j)} + X_{jk}^{(k)} = 0} \tag{1.3}$$

Cazul particular $\nu_{jk} = -\nu_{jj}$ apare la unele tipuri de sisteme formate din bare (v. cap. V, VI) și prezintă o serie de caracteristici interesante din punctul de vedere al posibilității rezolvării prin aproximații succesive, asupra cărora se va reveni în capitolele următoare. Din (1.3) se vede că în acest caz deplasările nu se pot exprima în funcție de solicitări, ecuațiile (1.1) înlocuindu-se cu (1.3).

c) *Relațiile între coeficienții* ν *și* η

Ecuațiile (1.2) se pot deduce și prin rezolvarea ecuațiilor (1.1) în raport cu $X_{jk}^{(j)}$, $X_{jk}^{(k)}$. Se obține :

$$X_{jk}^{(j)} = \frac{\eta_{kk}}{\eta_{jj}\eta_{kk} - \eta_{jk}^2}\left[\delta_j - \varphi_{jk}^{(j)} - \frac{\eta_{jk}}{\eta_{kk}}\left(\delta_k - \varphi_{jk}^{(k)}\right)\right]$$

Egalînd această expresie cu (1.2), rezultă :

$$\left.\begin{aligned} \nu_{jj} &= \frac{\eta_{kk}}{\eta_{jj}\eta_{kk} - \eta_{jk}^2}; \qquad \nu_{jk} = -\frac{\eta_{jk}}{\eta_{jj}\eta_{kk} - \eta_{jk}^2} \\ \overline{X}_{jk}^{(j)} &= -\frac{\eta_{kk}\varphi_{jk}^{(j)} - \eta_{jk}\varphi_{jk}^{(k)}}{\eta_{jj}\eta_{kk} - \eta_{jk}^2} = -\nu_{jj}\varphi_{jk}^{(j)} - \nu_{jk}\varphi_{jk}^{(k)} \end{aligned}\right| \tag{1.4}$$

III. Scrierea sistemului de ecuații

Pornind de la relațiile (1.1) și (1.2), se pot scrie condițiile de continuitate și de echilibru ale sistemului, obținîndu-se sistemul de ecuații ce urmează să se rezolve prin aproximații succesive.

a) *Scrierea ecuațiilor pornind de la relațiile (1.2) (metoda deplasărilor)*

Dacă se pornește de la relațiile între solicitări și deplasări scrise în forma (1.2), expresia solicitării $X_{jk}^{(j)}$ a unui capăt de bară se poate considera separată în două părți : o parte cunoscută ($\overline{X}_{jk}^{(j)}$), reprezentînd solicitarea care apare la capătul de bară datorită sarcinilor de pe bară, în situația $\delta_j = \delta_k = 0$, respectiv pentru bara presupusă cu deplasările nodurilor împiedicate (blocate) — și o parte necunoscută ($\nu_{jj}\,\delta_j + \nu_{jk}\,\delta_k$), reprezentînd solicitarea datorită deplasărilor nodurilor j și k. Se poate atunci împărți calculul lui $X_{jk}^{(j)}$ în două etape :

— calculul termenului $\overline{X}_{jk}^{(j)}$, considerînd un sistem inițial (*sistem de bază*) cu deplasările nodurilor blocate ;

— rezolvarea sistemului de ecuații avînd ca necunoscute deplasările δ_j, δ_k ale nodurilor și apoi, cu valorile obținute pentru deplasări, calculul termenului $\nu_{jj}\ \delta_j + \nu_{jk}\delta_k$.

Se folosește deci procedeul denumit în Statică „*metoda deplasărilor*" și care constă în a determina inițial solicitările la capetele barelor într-un sistem de bază cu deplasările nodurilor considerate blocate și a suprapune apoi peste acestea solicitările care rezultă datorită deplasărilor nodurilor În sistemul de bază, se calculează reacțiunile $\bar{X}_{jk}^{(j)}$, date la noduri de barele încărcate ; suma lor algebrică $\bar{X}_j$ în jurul unui nod reprezintă o solicitare neechilibrată (forță sau moment), care tinde să imprime nodului o deplasare. Echilibrul este menținut în sistemul de bază prin blocarea forțată a nodurilor, iar în sistemul cu nodurile deblocate el se restabilește prin solicitările suplimentare care apar la capetele de bare datorită deplasărilor.

În faza a doua a calculului (deblocarea nodurilor) sistemul apare încărcat numai la noduri, cu reacțiunile date de barele încărcate ca solicitări exterioare $\bar{X}_j$, deși în realitate ele sînt solicitări interioare (forțe de legătură), reprezentînd acțiunea barelor asupra nodurilor. În cazul cînd, pe lîngă sarcinile de pe bare, există și solicitări exterioare efective aplicate direct la noduri (de ex. la cadrele halelor industriale : momente din console sau forțe concentrate orizontale din șerpuirea podurilor rulante, din presiunea vîntului etc., care în calcul se admit a fi considerate aplicate la noduri) — acestea se adună, cu semnul lor, la solicitările neechilibrate interioare din sistemul de bază.

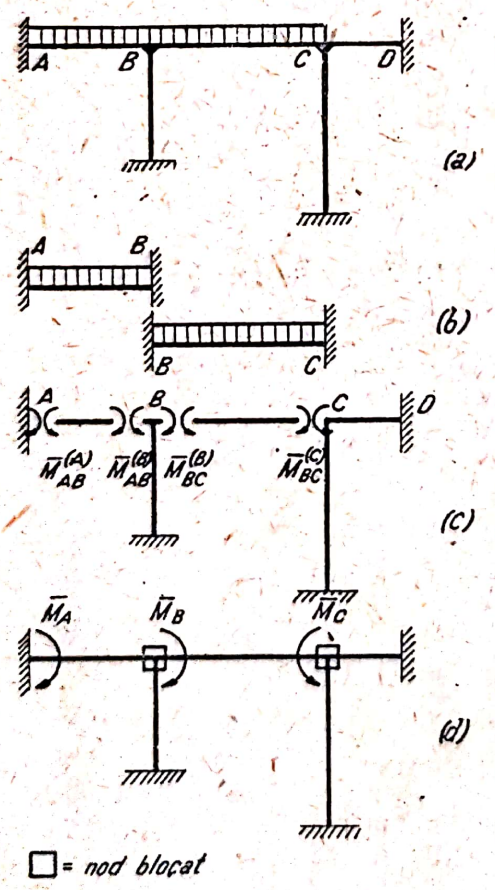


Fig. 8

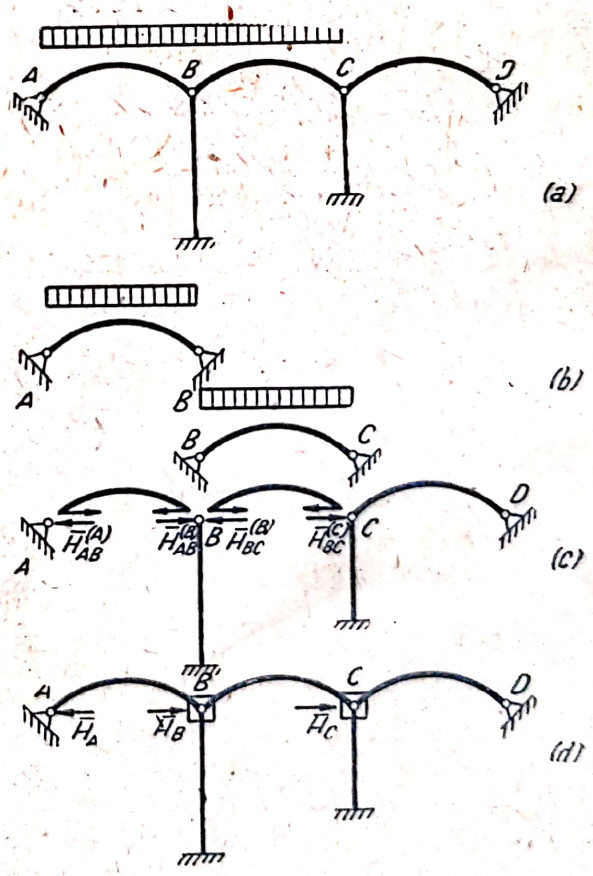


Fig. 9

În fig. 8—11 sînt date cîteva exemple de determinare a solicitărilor exterioare ale sistemului de bază, în metoda deplasărilor.

Scanned with OKEN Scanner

Cadrul cu noduri fixe din fig. 8, *a* are barele AB, BC încărcate cu o sarcină uniform distribuită. În sistemul de bază, cu rotirile nodurilor blocate, barele AB, BC sînt încastrate perfect în A, B și C (fig. 8, *b*). Momentele de încastrare perfectă $\bar{M}_{AB}^{(A)}$, $\bar{M}_{AB}^{(B)}$, $\bar{M}_{BC}^{(B)}$, $\bar{M}_{BC}^{(C)}$ reprezintă reacțiunile barelor încărcate, la noduri (fig. 8, *c*). Sistemul de bază este deci încărcat cu momentele neechilibrate (fig. 8, *d*) :

$$\bar{M}_A = \bar{M}_{AB}^{(A)}$$

$$\bar{M}_B = \bar{M}_{AB}^{(B)} + \bar{M}_{BC}^{(B)}$$

$$\bar{M}_C = \bar{M}_{BC}^{(C)}$$

(în figură, sensul lui $\bar{M}_B$ este arătat presupunînd $\bar{M}_{BC}^{(B)} > \bar{M}_{AB}^{(B)}$).

Sistemul de arce articulate pe pile flexibile din fig. 9, *a* are deschiderile AB, BC încărcate cu o sarcină uniform distribuită. În sistemul de bază translațiile orizontale ale nodurilor B, C sînt blocate, astfel că arcele încărcate AB, BC devin arce dublu articulate, cu reazeme fixe (fig. 9, *b*). În această situație se determină împingerile $\bar{H}_{AB}^{(A)}$, $\bar{H}_{AB}^{(B)}$, $\bar{H}_{BC}^{(B)}$, $\bar{H}_{BC}^{(C)}$, care reprezintă reacțiunile barelor încărcate, la noduri (fig. 9, *c*). Sistemul de bază va fi deci încărcat cu împingerile neechilibrate (fig. 9, *d*) :

$$\bar{H}_A = \bar{H}_{AB}^{(A)}$$

$$\bar{H}_B = \bar{H}_{AB}^{(B)} + \bar{H}_{BC}^{(B)}$$

$$\bar{H}_C = \bar{H}_{BC}^{(C)}$$

(în figură, sensul lui $\bar{H}_B$ este arătat presupunînd $\bar{H}_{AB}^{(B)} > \bar{H}_{BC}^{(B)}$).

Se observă analogia între sistemele din fig. 8 și 9, care au scheme asemănătoare și aceeași încărcare, însă diferă prin natura deplasărilor nodurilor.

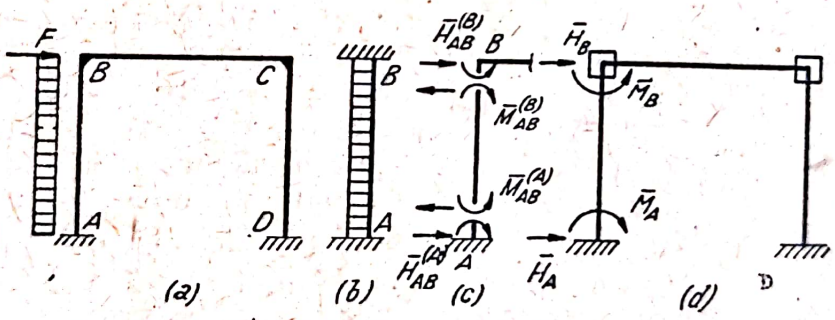


Fig. 10

Cadrul cu noduri deplasabile din fig. 10, *a* are bara AB încărcată cu o sarcină uniform distribuită și, în plus, o sarcină orizontală F concentrată, aplicată în nodul B. Deplasările blocate în sistemul de bază sînt : rotirile nodurilor B și C și translația lor orizontală (aceeași pentru amîndouă nodurile). Bara încărcată AB apare atunci ca încastrată perfect în A și B și cu reazemul din B fix. Reacțiunile ei asupra nodurilor A, B sînt momentele de încastrare perfectă $\bar{M}_{AB}^{(A)}$, $\bar{M}_{AB}^{(B)}$ și forțele $\bar{H}_{AB}^{(A)}$, $\bar{H}_{AB}^{(B)}$. Solicitările exterioare ale sistemului de bază :

$$\bar{H}_A = \bar{H}_{AB}^{(A)}; \quad \bar{H}_B = \bar{H}_{AB}^{(B)} + F$$

$$\bar{M}_A = \bar{M}_{AB}^{(A)}; \quad \bar{M}_B = \bar{M}_{AB}^{(B)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculul după metoda deplasărilor se pretează în mod avantajos a fi efectuat prin aproximații succesive, deoarece chiar principiul metodei, de a porni de la o situație inițială în care necunoscutele sistemului de ecuații (deplasările nodurilor) sînt egale cu zero și valorile solicitărilor depind numai de termenii liberi ai ecuațiilor ($\bar{X}_j$), concordă cu principiul metodei iterației, unde de asemenea se pornește cu niște valori în primă aproximație pentru necunoscute, în funcție de termenii liberi, care apoi se corectează treptat pînă la valorile finale exacte. Rezolvarea prin iterație a sistemului de ecuații reprezintă trecerea treptată de la sistemul de bază la sistemul în poziția finală de echilibru elastic.

Sistemul de ecuații poate fi scris în două moduri :

1) Se aleg ca necunoscute deplasările δ_j ale nodurilor. Pentru a rezulta un sistem de ecuații în δ_j, se scriu condițiile de echilibru în jurul nodurilor, înlocuind solicitările $X_{jk}^{(j)}$ cu expresiile lor în funcție de deplasări (1.2).

2) Se aleg ca necunoscute solicitările $X_{jk}^{(j)}$ la capetele barelor. Pentru a rezulta un sistem de ecuații în $X_{jk}^{(j)}$, se scriu condițiile de echilibru la noduri și se înlocuiesc deplasările cu expresiile lor în funcție de solicitări (1.1). Pentru ca să apară termenii liberi din metoda deplasărilor ($\bar{X}_{jk}^{(j)}$), se înlocuiesc $\varphi_{jk}^{(j)}$, $\varphi_{jk}^{(k)}$ cu expresiile lor în funcție de $\bar{X}_{jk}^{(j)}$, $\bar{X}_{jk}^{(k)}$.

1) *Se aleg ca necunoscute deplasările δ_j ale nodurilor.* Considerăm (fig. 11) un nod j în interiorul unui sistem de bare și nodurile k vecine (legate direct prin bare de nodul j).

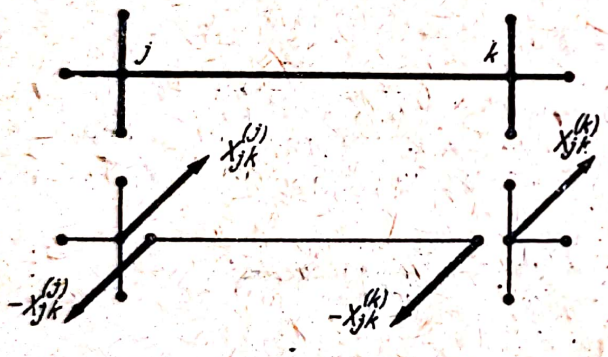


Fig. 11

Acțiunea reciprocă între bara jk și nodul j este reprezentată prin perechea de solicitări $X_{jk}^{(j)}$. Adoptînd pentru cele două solicitări (pe capăt de bară și pe nod) aceeași convenție de semne, ele vor rezulta totdeauna de semn contrar. La stabilirea relațiilor (1.1), (1.2) pentru o bară izolată (fig. 7) s-a înțeles prin $X_{jk}^{(j)}$ solicitarea pe capăt de bară. Trecînd la scrierea ecuațiilor pentru întreg sistemul de bare, vom înțelege de aci înainte prin $X_{jk}^{(j)}$ *solicitarea pe nod*, astfel că în relațiile (1.1), (1.2) se vor schimba semnele lui $X_{jk}^{(j)}$, $X_{jk}^{(k)}$, $\bar{X}_{jk}^{(j)}$, $\bar{X}_{jk}^{(k)}$.

Condiția de echilibru în jurul nodului j :

$$\boxed{\Sigma X_{jk}^{(j)} = 0} \qquad (1.5)$$

Înlocuind solicitările $X_{jk}^{(j)}$ cu expresiile lor în funcție de deplasări (1.2) :

$$\Sigma X_{jk}^{(j)} = \Sigma \bar{X}_{jk}^{(j)} - \Sigma \nu_{jj} \ \delta_j - \Sigma \nu_{jk} \ \delta_k$$

și punînd $\sum \bar{X}_{jk}^{(j)} = \bar{X}_j$, se obține relația :

$$\boxed{\bar{X}_j = \delta_j \Sigma \nu_{jj} + \Sigma \delta_k \nu_{jk}} \qquad (1.6)$$

La fiecare nod rezultă cîte o ecuație (1.6), în care :

— necunoscutele sînt deplasările nodurilor ;

Scanned with OKEN Scanner

— coeficienții necunoscutelor sînt niște coeficienți de influență, funcții de caracteristicile geometrice și de material ale barelor;

— termenii liberi sînt solicitările exterioare ale nodurilor în sistemul de bază.

2) *Se aleg ca necunoscute solicitările $X_{jk}^{(j)}$ la capetele barelor.* Din (1.4) se pot deduce expresiile lui $\varphi_{jk}^{(j)}$ și $\varphi_{jk}^{(k)}$ în funcție de $\overline{X}_{jk}^{(j)}$, $\overline{X}_{jk}^{(k)}$:

$$\varphi_{jk}^{(j)} = -\eta_{jj}\,\overline{X}_{jk}^{(j)} - \eta_{jk}\,\overline{X}_{jk}^{(k)}$$

Înlocuind în (1.1) pe $\varphi_{jk}^{(j)}$ cu expresia lui:

$$\boxed{\delta_j = [X_{jk}^{(j)} - \overline{X}_{jk}^{(j)}]\,\eta_{jj} + [X_{jk}^{(k)} - \overline{X}_{jk}^{(k)}]\,\eta_{jk}} \qquad (1.7)$$

Pentru fiecare capăt de bară se scrie cîte o ecuație (1.7), iar în plus la fiecare nod cîte o ecuație (1.5). Se obține astfel un sistem de ecuații de un număr egal cu numărul capetelor de bare, plus numărul nodurilor și în care necunoscutele sînt $X_{jk}^{(j)}$ și δ_j. Deplasările δ_j nu s-au eliminat din ecuații, ci au rămas ca necunoscute suplimentare la fiecare nod; totuși, în rezolvarea prin aproximații succesive, ele pot fi eliminate din calcul, exprimîndu-se în fiecare treaptă a iterației în funcție de valorile corespunzătoare ale solicitărilor neechilibrate $\overline{X}_j$ (v. cap. II, IV).

Se observă că în ambele moduri de a scrie ecuațiile (1.6 sau 1.5 + 1.7) condițiile de continuitate la noduri s-au introdus implicit, folosind aceeași notație δ_j pentru deplasările capetelor din j ale tuturor barelor jk, deci considerînd aceste deplasări egale între ele.

b) *Scrierea ecuațiilor pornind de la relațiile (1.1) (metoda eforturilor)*

Dacă se pornește de la relațiile între solicitări și deplasări scrise în forma (1.1), se poate considera expresia deplasării δ_j separată în două părți: o parte cunoscută ($\varphi_{jk}^{(j)}$), care reprezintă deplasarea produsă în capătul j al barei jk de sarcinile de pe bară, în situația $X_{jk}^{(j)} = X_{jk}^{(k)} = 0$, respectiv pentru bara presupusă fără continuitate în j și k cu alte bare (cu deplasările în j și k libere) — și o parte necunoscută ($\eta_{jj}\,X_{jk}^{(j)} + \eta_{jk}X_{jk}^{(k)}$), reprezentînd deplasarea produsă de solicitările $X_{jk}^{(j)}$, $X_{jk}^{(k)}$ datorite continuității. Se poate atunci împărți calculul lui δ_j în două etape:

— calculul termenului $\varphi_{jk}^{(j)}$, considerînd un sistem de bază cu legăturile de continuitate între bare tăiate la toate nodurile;

— rezolvarea sistemului de ecuații avînd ca necunoscute solicitările care apar la capetele barelor datorită continuității ($X_{jk}^{(j)}$, $X_{jk}^{(k)}$) și, cu valorile obținute, calculul termenului $\eta_{jj}\,X_{jk}^{(j)} + \eta_{jk}\,X_{jk}^{(k)}$.

Se folosește deci de data aceasta procedeul denumit în Statică *metoda eforturilor*, care constă în a determina inițial deplasările capetelor de bare într-un sistem de bază cu continuitatea la noduri tăiată și a suprapune apoi peste acestea deplasările suplimentare care rezultă din restabilirea continuității la noduri. De ex. în cazul unui cadru cu noduri fixe: în sistemul de bază continuitatea rotirilor la noduri se consideră tăiată, toate barele apar articulate la capete și momentele pe reazeme sînt egale cu zero.

Utilizînd relațiile (1.1) și scriind condițiile de continuitate, rezultă un sistem de ecuații în care necunoscutele sînt solicitările X. În sistemul

Scanned with OKEN Scanner

de bază valorile acestor necunoscute se consideră egale cu zero, astfel că şi aici, ca şi în metoda deplasărilor, stadiul de pornire din rezolvarea prin iteraţie a sistemului de ecuaţii îşi găseşte semnificaţia fizică în sistemul de bază ales. Operaţiunile din rezolvarea prin iteraţie reprezintă trecerea treptată de la stadiul iniţial ($X = 0$) la valorile exacte ale necunoscutelor X, prin restabilirea succesivă a continuităţii la noduri.

Folosirea metodei eforturilor este avantajoasă, pentru simplitatea calculului prin aproximaţii succesive, în special în cazul sistemelor de bare care prezintă particularitatea că *la fiecare nod se întîlnesc numai cîte două bare*. Exemple : grinzile continue, reţelele ortogonale de grinzi (dacă se consideră ca bare grinzi întregi). La astfel de sisteme, din condiţiile de echilibru al solicitărilor în jurul nodurilor rezultă că solicitările la capetele celor două bare care se întîlnesc într-un nod trebuie să fie totdeauna egale în valoare absolută, astfel că se poate considera o necunoscută unică la nod, egală cu forţa de legătură între cele două bare, care poate fi un moment sau o forţă.

Să considerăm trei noduri consecutive i, j, k (fig. 12) dintr-un sistem cu două bare la fiecare nod.

Deplasările capetelor din j ale barelor ij şi jk (1.1) :

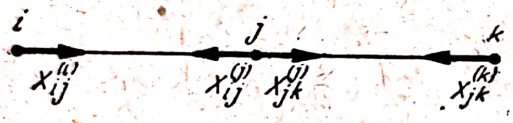


Fig. 12

$$\delta_{ij}^{(j)} = X_{ij}^{(j)}\ \eta_{jj}^{(i)} + X_{ij}^{(i)}\ \eta_{ji} + \varphi_{ji}^{(j)}$$

$$\delta_{jk}^{(j)} = X_{jk}^{(j)}\ \eta_{jj}^{(k)} + X_{jk}^{(j)}\ \eta_{jk} + \varphi_{jk}^{(j)}$$

unde s-au notat cu $\eta_{jj}^{(i)}$, $\eta_{jj}^{(k)}$ coeficienţii de influenţă η_{jj} pe barele ij şi jk.

Alegînd convenţii de semn potrivite [1]), condiţiile de echilibru la noduri devin :

$$X_{ij}^{(i)} = X_i\,;\ X_{ij}^{(j)} = X_{jk}^{(j)} = X_j\,;\ X_{jk}^{(k)} = X_k$$

iar condiţia de continuitate la nodul j ;

$$\delta_{ij}^{(j)} + \delta_{jk}^{(j)} = 0$$

Înlocuind pe $\delta_{ij}^{(j)}$ şi $\delta_{jk}^{(j)}$ cu expresiile lor în funcţie de solicitări, rezultă o ecuaţie avînd ca necunoscute solicitările (forţele de legătură) X :

$$\eta_{ji}\ X_i + (\eta_{jj}^{(i)} + \eta_{jj}^{(k)})\ X_j + \eta_{jk}\ X_k = -\varphi_{ji}^{(j)} - \varphi_{jk}^{(j)} \qquad (1.8)$$

Ecuaţia (1.8) ar putea fi numită *ecuaţia celor 3 forţe de legătură* şi este forma generalizată a ecuaţiilor celor 3 momente (*Clapeyron*) din cazul grinzilor continue. Particularizînd pentru cazul grinzilor continue, se obţine ecuaţia celor 3 momente (v. cap. V).

În cazul sistemelor avînd la fiecare nod mai mult decît 2 bare, pentru a ajunge la ecuaţii de felul celei de mai sus, este necesar să se considere grupuri de cîte 2 bare şi rezultă ecuaţii cu 4 necunoscute, corespunzătoare, în cazul particular al cadrelor, la ecuaţiile de 4 momente.

---

[1]) La exemplele tratate în cap. V şi VI apar în fiecare caz în parte aceste convenţii, a căror definire aici, la sistemul de ecuaţii în forma generală, ar fi fost mai puţin clară.

Scanned with OKEN Scanner

IV. Alte sisteme

Există şi probleme din alte domenii, a căror rezolvare comportă scrierea de sisteme de ecuaţii liniare, analoge cu cele din cazul sistemelor static nedeterminate formate din bare. Analogia formei sub care se prezintă ecuaţiile corespunde şi unei analogii în semnificaţia fizică a diferitelor elemente care intră în ecuaţii.

Să considerăm de exemplu *o reţea de conductori electrici*, din care să izolăm o porţiune AB dintre două noduri succesive (fig. 13). Curentul parcurge conductorul în sensul $A \to B$. Pe parcursul conductorului, în punctele *1*, *2*, *3*, sînt prize de curent, din care se consumă curenţii i_1, i_2, i_3. Prin extremitatea A intră în conductor curentul I_A, iar prin extremitatea B iese curentul:

$$I_B = I_A - (i_1 + i_2 + i_3)$$

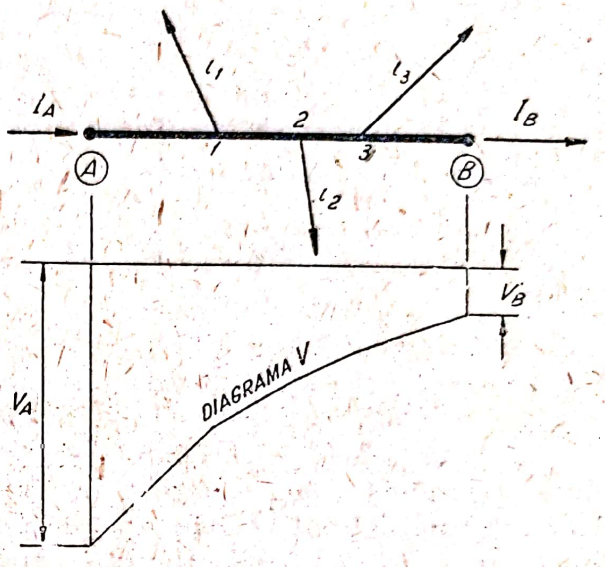


Fig. 13

În fig. 13 s-a prezentat şi diagrama variaţiei tensiunii V. Căderea totală de tensiune între A şi B este $V_A - V_B$.

Considerînd comparativ fig. 1 şi 13, se observă imediat analogia care există între funcţiunea barei din fig. 1 şi cea a conductorului din fig. 13. Curenţii de consum i_1, i_2, i_3 corespund sarcinilor de pe bară, iar curenţii I_A, I_B reacţiunilor pe reazeme. Suma sarcinilor este egală cu suma reacţiunilor:

$$I_A - I_B = i_1 + i_2 + i_3$$

(I_B intră cu semnul —, avînd sensul de la nod spre exterior). Tensiunile corespund deplasărilor, astfel că diagrama V înlocuieşte deformata. În locul energiei potenţiale acumulate de bară prin deformarea ei elastică, intervine energia electrică. Ca elemente caracteristice geometrice şi de material apar secţiunea transversală a conductorului şi rezistivitatea lui electrică.

După cum poziţia de echilibru elastic a barei este determinată numai dacă se cunosc, pe lîngă sarcinile de pe bară, şi valorile deplasărilor capetelor ei, în cazul conductorului electric starea de încărcare electrică este determinată numai dacă, pe lîngă curenţii de consum de pe conductor, se cunosc şi tensiunile la capete (de fapt nu este necesar să se cunoască valorile lor absolute, ci numai diferenţa $V_A - V_B$).

În cazul reţelelor arborescente (fig. 14) diferenţa de tensiune se poate determina din aproape în aproape de la un nod la altul, curentul neputînd ajunge de la un punct la altul al reţelei decît pe un singur drum. În cazul reţelelor buclate (fig. 15), unde curentul poate ajunge de la un punct la altul pe mai multe trasee, situaţia este aceeaşi ca şi pentru un sistem static nedeterminat format din bare: scrierea condiţiilor de echilibru pentru fiecare element între două noduri nu este suficientă pentru determinarea valorilor curenţilor. Trebuie să se scrie în plus la fiecare nod condiţia de continuitate a tensiunilor (tensiunile în toate capetele de conductori care se întîlnesc în nod să fie egale) şi condiţia de echilibru în jurul nodului (legea

Scanned with OKEN Scanner

lui *Kirchoff*: suma intensităților curenților în jurul nodului să fie egală cu zero).

Relația între tensiuni și curenți fiind liniară (legea lui *Ohm*), se ajunge la un sistem de ecuații liniare, care se poate scrie luînd ca necunoscute fie tensiunile la noduri, fie curenții la capetele conductorilor. Din rezolvarea acestui sistem de ecuații se obțin valorile necunoscutelor.

Rețelele electrice intră în categoria sistemelor cu legături de tipul I, singurele necunoscute la noduri fiind tensiunile.

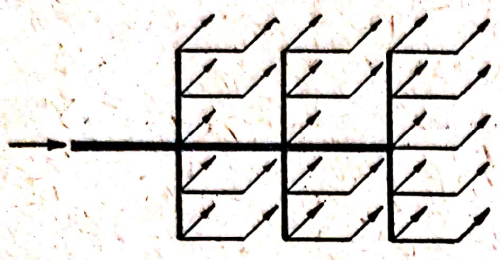


Fig. 14

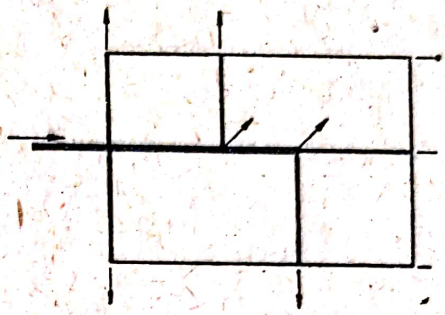


Fig. 15

Aceeași analogie se poate stabili dacă în locul rețelei electrice se consideră o *rețea de distribuție a apei*. Elementele unei astfel de rețele corespund ca funcțiune celor ale unei rețele electrice, întrucît este vorba tot de transmiterea continuă a unei energii printr-un sistem format din elemente liniare. În locul unui curent electric, sistemul transmite un curent de apă sub presiune. În acest mod, ca solicitări exterioare ale conductelor apar, în locul intensităților curenților electrici, debite de apă, iar în locul tensiunii electrice apare presiunea hidrostatică. Sistemul acumulează energie potențială sub forma de înălțime piezometrică. Caracteristicile geometrice și de material ale conductelor sînt: lungimea și secțiunea transversală, rugozitatea pereților.

Ca și o rețea electrică, o rețea de distribuție a apei devine nedeterminată cînd cuprinde circuite închise (inele), astfel încît în interiorul ei apa poate ajunge de la un punct la altul pe mai multe drumuri. Atunci valorile presiunii hidrostatice la noduri sînt necunoscute, iar pentru determinarea lor este necesar să se scrie condițiile de continuitate și de echilibru la noduri. Condiția de continuitate la un nod este ca presiunea hidrostatică în toate capetele de conducte care se întîlnesc în nod să fie aceeași. Condiția de echilibru în jurul unui nod se exprimă prin legea cunoscută a continuității curentului: suma debitelor în jurul nodului să fie egală cu zero.

Cazul rețelelor de conducte de apă prezintă o particularitate care-l diferențiază de cazurile tratate mai înainte. Datorită regimului de scurgere a apei prin conducte, relația dintre debite și căderile de presiune este de un grad mai mare decît 1 și deci nu se poate admite ca valabil principiul suprapunerii efectelor.

Dacă notăm:

Q = debitul într-o conductă AB;

$\Delta H = H_B - H_A$ = căderea de presiune între capetele conductei;

λ = un coeficient, în expresia căruia intră caracteristicile geometrice și de material ale conductei;

relația între Q și H este de forma:

$$\Delta H = \lambda Q^n \tag{1.9}$$

unde valoarea coeficientului λ și a exponentului n variază în formulele propuse de diferiți autori. În majoritatea formulelor uzuale $n = 2$.

Asupra posibilităților de extindere a metodelor de rezolvare prin aproximații succesive caracteristice sistemelor de ecuații liniare și la cazuri de acest fel, unde sistemul de ecuații este de grad mai mare, sînt date indicații în cap. X.

V. Concluzii

Din analiza comparativă a sistemelor enumerate și care diferă destul de mult între ele ca alcătuire fizică, rezultă că ele prezintă totuși suficiente elemente comune pentru a putea fi privite printr-o prismă unitară și încadrate într-o teorie de calcul generală, care să se poată apoi particulariza pentru fiecare caz în parte.

Elementele comune sînt următoarele:

a) *Funcțiunea* — transmiterea unei solicitări (transmiterea sarcinilor exterioare la reazeme, transmiterea unui curent electric sau de apă).

b) *Comportarea sub solicitări* — sistemul înmagazinează energie potențială (lucru mecanic de deformație, energie electrică, energie hidraulică).

c) *Schema* — sistemul se compune din elemente liniare, adică elemente avînd una din dimensiuni (lungimea) predominantă în raport cu celelalte două, astfel ca să se poată neglija variația solicitărilor în planul secțiunii transversale, considerînd numai variația lor în lungul axei elementului.

d) *Forma sistemului de ecuații* la care se ajunge scriind condițiile de continuitate și de echilibru la noduri.

În tabela de mai jos, sînt prezentate noțiunile corespunzătoare ale diferitelor sisteme examinate.

Sistemul	Sistem format din bare	Rețea electrică	Rețea de distribuție a apei
Elementele liniare care compun sistemul	Bare	Conductori electrici	Conducte de presiune
Solicitările exterioare ale nodurilor ($\bar{X}$)	Solicitări mecanice: momente ($\bar{M}$) și forțe ($\bar{F}$)	Curenți (de alimentare sau de consum) $\bar{I}$	Debite (de alimentare sau de consum) $\bar{Q}$
Energie potențială	De deformație	Electrică	Hidraulică
Prin ce se concretizează (Y)	Deplasări elastice (δ)	Tensiune electrică (V)	Presiune hidrostatică (H)
Caracteristicile de material ale elementelor	Caracteristici elastice	Rezistivitate electrică	Rugozitate
Cu ce se încarcă elementele (X)	Eforturi (M, F)	Curenți (I)	Debite (Q)
Motivul nedeterminării sistemului	Nu se cunosc valorile Y (δ, V, H) la capetele elementelor		
Condiția de continuitate la un nod	La toate capetele de elemente care se întîlnesc în nod, Y (δ, V, H) să fie aceleași		
Condiția de echilibru în jurul unui nod $\Sigma X = 0$	$\Sigma M = 0$ $\Sigma F = 0$	$\Sigma I = 0$	$\Sigma Q = 0$

Scanned with OKEN Scanner

După cum se vede din tabelă, noțiunile simbolizate prin X, $\overline{X}$, Y apar în toate sistemele și au totdeauna aceeași semnificație. Deci, dacă în ecuațiile (1.5), (1.6), (1.7) se introduc aceste noțiuni, se obțin ecuațiile sub forma generalizată, valabilă pentru toate sistemele considerate [pentru rețelele de conducte de apă apare în plus și exponentul n din formula (1.9)].

Găsirea unor definiții și denumiri convenabile pentru noțiunile generalizate X, $\overline{X}$, Y este dificilă. Dacă pentru X și $\overline{X}$ se pot păstra eventual denumirile de solicitări ale elementelor și solicitări exterioare ale nodurilor, Y este mai greu de definit și de denumit.

Ecuațiile, scrise în X, $\overline{X}$, Y devin:

a) Dacă se aleg ca necunoscute valorile Y la noduri:

$$\overline{X}_j = Y_j \sum \nu_{jj} + \sum Y_k \, \nu_{jk} \tag{1.6'}$$

b) Dacă se aleg ca necunoscute valorile X la capetele elementelor:

$$\sum X_{jk}^{(j)} = 0 \tag{1.5'}$$

$$Y_j = [X_{jk}^{(j)} - \overline{X}_{jk}^{(j)}] \, \eta_{jj} + [X_{jk}^{(k)} - \overline{X}_{jk}^{(k)}] \, \eta_{jk} \tag{1.7'}$$

c) În ceea ce privește ecuațiile (1.8), generalizarea lor pentru un domeniu mai larg decît al sistemelor formate din bare conduce la forme mai variate. De exemplu pentru o rețea electrică o metodă corespunzătoare metodei eforturilor din cazul sistemelor de bare ar fi considerarea, ca sistem de bază, a rețelei ca fiind împărțită în circuite izolate și scrierea ecuațiilor de continuitate luînd ca necunoscute curenții de pe barele comune ale circuitelor (corespunzătoare forțelor de legătură la sistemele de bare).

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

REZOLVAREA PRIN ITERAŢIE A SISTEMULUI DE ECUAŢII

A. REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAŢII LINIARE PRIN METODA ITERAŢIEI

I. Metoda clasică (Gauss)

Rezolvarea prin iteraţie (aproximaţii succesive) a unui sistem de ecuaţii constă în determinarea valorilor necunoscutelor pornind de la nişte valori în primă aproximaţie şi corectînd apoi aceste valori treptat, pînă cînd ele devin foarte apropiate de cele exacte, respectiv pînă cînd, introducîndule în sistemul de ecuaţii, toate ecuaţiile se verifică sau erorile de închidere ajung suficient de mici pentru a putea fi neglijate.

Într-un sistem de ecuaţii avînd necunoscutele x_1, $x_2 \ldots x_n$, se consideră pentru toate necunoscutele valori în primă aproximaţie $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)} \ldots$ $\ldots x_n^{(1)}$, care se introduc în sistemul de ecuaţii, explicitînd în fiecare ecuaţie cîte una din necunoscute, în funcţie de aceste valori. Rezultă astfel pentru x_1, $x_2 \ldots x_n$ nişte noi valori, în a doua aproximaţie, $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)} \ldots x_n^{(2)}$, care diferă de cele considerate iniţial. Introducînd valorile $x^{(2)}$ în ecuaţii, rezultă pentru necunoscute noi valori $x^{(3)}$. Calculul se continuă în acest fel pînă cînd între valorile din două trepte de calcul succesive diferenţele ajung să fie neglijabile. Dacă z este ordinul ultimei trepte de calcul, cînd diferenţele $x^{(z)} - x^{(z-1)}$ tind la zero, se poate considera ca rezultat final al calculului $x = x^{(z)}$.

În locul valorilor integrale ale necunoscutelor, se pot introduce în ecuaţii la fiecare treaptă de calcul numai corecţiile $\Delta x^{(1)} = x^{(2)} - x^{(1)}$, $\Delta x^{(2)} = x^{(3)} - x^{(2)}$ etc. Astfel, odată calculat în treapta a doua de calcul $x^{(2)}$ în funcţie de $x^{(1)}$, în treapta următoare de calcul nu se mai intră cu $x^{(2)}$, ci numai cu corecţia $\Delta x^{(1)} = x^{(2)} - x^{(1)}$. Introducînd în ecuaţii valorile $\Delta x^{(1)}$, rezultă în funcţie de acestea pentru x_1, $x_2 \ldots x_n$ valorile $\Delta x^{(2)}$, care reprezintă cea de a doua corecţie, ş.a.m.d. Calculul se continuă pînă cînd corecţiile $\Delta x^{(z)}$ devin neglijabile. Atunci, ca rezultat al calculului :

$$x = x^{(1)} + \Delta x^{(1)} + \Delta x^{(2)} + \ldots + \Delta x^{(z)} \qquad (2.1)$$

(valoarea finală a unei necunoscute rezultă egală cu valoarea ei în primă aproximaţie $x^{(1)}$, plus o sumă de corecţii succesive din ce în ce mai mici).

Din forma expresiei (2.1) se observă că rezolvarea prin iteraţie a sistemului de ecuaţii se reduce la o dezvoltare în serii a necunoscutelor şi la

calculul succesiv al termenilor acestor serii pînă la aproximaţia dorită. Evident, pentru ca pe această cale să se poată ajunge la un rezultat, trebuie ca seriile care se obţin să fie convergente. De asemenea, convergenţa trebuie să fie destul de rapidă, pentru ca numărul de trepte de calcul necesar obţinerii unei aproximaţii acceptabile să nu fie prea mare. Altfel, metoda de rezolvare prin iteraţie îşi pierde avantajele. Aceste condiţii nu sînt totdeauna îndeplinite, astfel că nu orice sistem de ecuaţii poate fi rezolvat prin iteraţie. De aceea, în orice problemă comportînd rezolvarea unui sistem de ecuaţii, în cazul cînd se utilizează metoda iteraţiei, este necesar să se verifice de la început dacă seria termenilor iteraţiei este convergentă şi care este rapiditatea convergenţei.

În cele ce urmează, ne ocupăm numai de cazul *sistemelor de ecuaţii liniare*, de forma (1.5), (1.6), (1.7) sau (1.8).

Să considerăm sistemul:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10}\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jj}x_j + \ldots + a_{jn}x_n = a_{j0}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n0}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

avînd necunoscutele $x_1 \ldots x_n$.

Scriind ecuaţiile în ordinea de mai sus, diagonala formată din termenii $a_{11}x_1$, $a_{22}x_2 \ldots a_{jj}x_j \ldots a_{nn}x_n$ poartă numele de *diagonală principală* a sistemului.

În fiecare ecuaţie, necunoscuta care se găseşte pe diagonala principală se numeşte *necunoscută principală*.

Dacă se alege altă ordine de scriere a ecuaţiilor, diagonala principală se modifică şi în fiecare ecuaţie o altă necunoscută devine necunoscută principală, încît întreaga schemă de pornire pentru rezolvarea prin metoda iteraţiei se schimbă. Apare deci de la început problema alegerii unei ordini optime de scriere a ecuaţiilor, care să corespundă celei mai rapide convergenţe a iteraţiei. În cazul care ne interesează, cel al ecuaţiilor din Statică, de tipul (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), stabilirea acestei ordini, respectiv a necunoscutei principale din fiecare ecuaţie, se poate face cu uşurinţă — după cum se va vedea mai departe — ţinînd seama de semnificaţia fizică a termenilor care apar în ecuaţii.

Pentru rezolvarea prin iteraţie, sistemul se pune sub forma (2.3), explicitînd în fiecare ecuaţie necunoscuta principală.

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{a_{10}}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \ldots - \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j - \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\\
x_2 &= \frac{a_{20}}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \ldots - \frac{a_{2j}}{a_{22}}x_j - \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_j &= \frac{a_{j0}}{a_{jj}} - \frac{a_{j1}}{a_{jj}}x_1 - \ldots - \frac{a_{j(j-1)}}{a_{jj}}x_{j-1} - \frac{a_{j(j+1)}}{a_{jj}}x_{j+1} - \ldots - \frac{a_{jn}}{a_{jn}}x_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= \frac{a_{n0}}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \ldots - \frac{a_{nj}}{a_{nn}}x_j - \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{a_{n(n-1)}}{a_{nn}}x_{n-1}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația de ordinul j devine :

$$x_j = \frac{a_{j0}}{a_{jj}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{jk}}{a_{jj}} x_k \qquad (2.4)$$

unde s-au notat cu indicele k toate necunoscutele sistemului, afară de x_j.

Punînd :

$$\frac{a_{j0}}{a_{jj}} = b_{j0} \quad \text{și} \quad -\frac{a_{jk}}{a_{jj}} = b_{jk},$$

avem :

$$\boxed{x_j = b_{j0} + \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k} \quad (k \neq j) \qquad (2.5)$$

După ce toate ecuațiile sistemului sînt scrise sub forma (2.5), se poate începe rezolvarea prin iterație.

Prima operațiune constă în alegerea valorilor inițiale (în primă aproximație) ale necunoscutelor, cu care să se intre în calcul. Teoretic, se pot alege niște valori arbitrare, rezultatele fiind independente de modul cum se aleg valorile inițiale. Totuși, dacă există posibilitatea aprecierii de la început a ordinului de mărime al valorilor necunoscutelor, numărul de trepte de calcul poate fi redus simțitor. Pentru sistemele de ecuații de tipul celor scrise în cap. I, în care toți termenii au semnificații fizice bine precizate, o evaluare în primă aproximație a necunoscutelor este totdeauna posibilă, făcîndu-se aproximații chiar în fenomenul fizic corespunzător. De exemplu, într-o rețea electrică, ținînd seama de pozițiile punctului de alimentare cu curent și punctelor de consum, sensul general de circulație al curentului prin rețea rezultă destul de ușor și în consecință se pot evalua căderile de tensiune și curenții pe conductori. De asemenea, într-o rețea de distribuție a apei, considerînd „tăieturi" în punctele în care se apreciază că debitul este apropiat de zero, se transformă rețeaua închisă într-una arborescentă, în care liniile piezometrice ale conductelor sînt determinate.

În cazul cînd termenii din ecuații nu au semnificații fizice care să permită evaluări de acest fel, de modalități pur matematice de apreciere a valorilor inițiale ale necunoscutelor nu dispunem. De aceea, în metoda clasică de rezolvare prin iterație a sistemelor de ecuații liniare, se pornește calculul considerînd în fiecare ecuație toate necunoscutele egale cu zero, cu excepția necunoscutei principale. Rezultă ca valoare inițială a necunoscutei principale :

$$x_j^{(1)} = b_{j0} = \frac{a_{j0}}{a_{jj}} \qquad (2.6)$$

(valoarea inițială a unei necunoscute se determină din ecuația unde ea este necunoscuta principală și este egală cu termenul liber raportat la coeficientul necunoscutei).

Acest mod de alegere a valorilor inițiale se aplică obișnuit și în cazul sistemelor static nedeterminate formate din bare, unde considerarea la început a necunoscutelor (deplasărilor nodurilor) egale cu zero este dictată de sistemul de bază ales.

Scanned with OKEN Scanner

Calculul urmează apoi astfel :

a) *Dacă se operează cu valorile integrale ale necunoscutelor (operarea cu x)*

În toate ecuațiile se introduc valorile $x^{(1)}$. Ecuația de ordinul j devine :

$$x_j^{(2)} = b_{j0} + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, x_k^{(1)}$$

$x_j^{(2)}$ este valoarea în a doua aproximație a lui x_j.

Se repetă calculul, introducînd în locul valorilor $x^{(1)}$, valorile $x^{(2)}$.

$$x_j^{(3)} = b_{j0} + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, x_k^{(2)}$$

Cînd $x_j^{(z)}$ ajunge să difere puțin de $x_j^{(z-1)}$ se încheie calculul și avem :

$$x_j = x_j^{(z)}$$

b) *Dacă se operează cu corecțiile (operarea cu Δx)*

În toate ecuațiile se introduc valorile $x^{(1)}$.

$$x_j^{(2)} = b_{j0} + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, x_k^{(1)} = x_j^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, x_k^{(1)}$$

$$\Delta x_j^{(1)} = x_j^{(2)} - x_j^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, x_k^{(1)}$$

Se repetă calculul, introducînd în locul valorilor $x^{(1)}$ valorile $\Delta x^{(1)}$.

$$\Delta x_j^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, \Delta x_k^{(1)}$$

$$\Delta x_j^{(3)} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, \Delta x_k^{(2)} \text{ etc.}$$

Cînd $\Delta x_j^{(z)}$ tinde la zero, se încheie calculul și avem :

$$x_j = x_j^{(1)} + \Delta x_j^{(1)} + \Delta x_j^{(2)} + \ldots + \Delta x_j^{(z)} \text{ sau}$$

$$x_j = x_j^{(1)} + \sum_{k=1}^{z} \Delta x_j$$

(calculul este același ca și în operarea cu x, cu diferența că în treptele de calcul de la II în sus nu se mai introduce $x_j^{(1)} = b_{j0}$).

Mersul calculului prin ambele metode poate fi urmărit pe exemplele nr. 1 și 2 (rezolvarea unui sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute).

Exemplul 1. Rezolvarea unui sistem de 4 ecuații liniare cu 4 necunoscute prin iterație, operînd cu x.

Sistemul de ecuații :

$$\begin{aligned} 10\,x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= +\ 109 \\ -\ 3\,x_1 + 10x_2 + 4x_3 - x_4 &= +\ \ 8 \\ 2\,x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= -\ \ 25 \\ 5\,x_1 - 4x_2 + x_3 - 10x_4 &= +\ \ 21 \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluțiile acestui sistem sînt:

$$x_1 = +5;\ x_2 = +6;\ x_3 = -10;\ x_4 = -3.$$

Explicităm necunoscutele principale în fiecare ecuație:

$$\begin{aligned} x_1 &= +10{,}9 - 0{,}2\,x_2 + 0{,}5\,x_3 - 0{,}1\,x_4 \\ x_2 &= +\ 0{,}8 + 0{,}3\,x_1 - 0{,}4\,x_3 + 0{,}1\,x_4 \\ x_3 &= -\ 5{,}0 - 0{,}4\,x_1 - 0{,}6\,x_2 - 0{,}2\,x_4 \\ x_4 &= -\ 2{,}1 + 0{,}5\,x_1 - 0{,}4\,x_2 + 0{,}1\,x_3 \end{aligned}$$

Valorile în primă aproximație ale necunoscutelor:

$$x_1^{(1)} = +10{,}90$$

$$x_2^{(1)} = +\ 0{,}80$$

$$x_3^{(1)} = -\ 5{,}00$$

$$x_4^{(1)} = -\ 2{,}10$$

(Se observă că aceste valori, cu excepția lui $x_4^{(1)}$, sînt destul de depărtate de valorile exacte ale necunoscutelor.)

Admitem o eroare de maximum 2% la rezultate.

Treapta II de calcul:

$$x_1^{(2)} = +10{,}90 - 0{,}2 \times 0{,}80 - 0{,}5 \times 5{,}00 + 0{,}1 \times 2{,}10 = +8{,}45$$

$$x_2^{(2)} = +\ 0{,}80 + 0{,}3 \times 10{,}90 + 0{,}4 \times 5{,}00 - 0{,}1 \times 2{,}10 = +5{,}85$$

$$x_3^{(2)} = -\ 5{,}00 - 0{,}4 \times 10{,}90 - 0{,}6 \times 0{,}80 + 0{,}2 \times 2{,}10 = -9{,}42$$

$$x_4^{(2)} = -\ 2{,}10 + 0{,}5 \times 10{,}90 - 0{,}4 \times 0{,}80 - 0{,}1 \times 5{,}00 = +2{,}53$$

Treapta III de calcul:

$$x_1^{(3)} = +10{,}90 - 0{,}2 \times 5{,}85 - 0{,}5 \times 9{,}42 - 0{,}1 \times 2{,}53 = +\ 4{,}78$$

$$x_2^{(3)} = +\ 0{,}80 + 0{,}3 \times 8{,}45 + 0{,}4 \times 9{,}42 + 0{,}1 \times 2{,}53 = +\ 7{,}34$$

$$x_3^{(3)} = -\ 5{,}00 - 0{,}4 \times 8{,}45 - 0{,}6 \times 5{,}85 - 0{,}2 \times 2{,}53 = -12{,}41$$

$$x_4^{(3)} = -\ 2{,}10 + 0{,}5 \times 8{,}45 - 0{,}4 \times 5{,}85 - 0{,}1 \times 9{,}42 = -\ 1{,}15$$

Treapta IV de calcul:

$$x_1^{(4)} = +10{,}90 - 0{,}2 \times 7{,}34 - 0{,}5 \times 12{,}41 + 0{,}1 \times 1{,}15 = +\ 3{,}36$$

$$x_2^{(4)} = +\ 0{,}80 + 0{,}3 \times 4{,}78 + 0{,}4 \times 12{,}41 - 0{,}1 \times 1{,}15 = +\ 7{,}07$$

$$x_3^{(4)} = -\ 5{,}00 - 0{,}4 \times 4{,}78 - 0{,}6 \times 7{,}34 + 0{,}2 \times 1{,}15 = -11{,}07$$

$$x_4^{(4)} = -\ 2{,}10 + 0{,}5 \times 4{,}78 - 0{,}4 \times 7{,}34 - 0{,}1 \times 12{,}41 = -\ 3{,}88$$

(După primele 4 trepte de calcul ordinul de mărime al necunoscutelor s-a conturat.)

Treapta	$x_1 = +5$		$x_2 = +6$		$x_3 = -10$		$x_4 = -3$	
	Valoare	Eroare %	Valoare	Eroare %	Valoare	Eroare %	Valoare	Eroare %
I	+10,90		+0,80		−5,00		−2,10	
II	+8,45		+5,86		−9,42		+2,53	
III	+4,78		+7,33		−12,41		−1,15	
IV	+3,36		+7,07		−11,07		−3,88	
V	+4,34	−13,2	+5,85	−2,5	−9,80	−2,0	−4,35	+45,0
VI	+5,27	+5,4	+5,58	−7,0	−9,38	−6,2	−3,25	+8,3
VII	+5,38	+7,6	+5,80	−3,3	−9,81	−1,9	−2,64	−11,2
VIII	+5,10	+2,0	+6,07	+1,1	−10,10	+1,0	−2,71	−9,7
IX	+4,91	−1,8	+6,10	+1,7	−10,14	+1,4	−2,99	−0,3

Din tabelă, în care sînt concentrate și rezultatele treptelor de calcul următoare, se vede că pentru a ajunge la aproximația cerută au fost necesare 9 trepte de calcul.

Exemplul 2. Rezolvarea unui sistem de 4 ecuații liniare cu 4 necunoscute prin iterație, operînd cu Δx.

Reluăm sistemul din exemplul nr. 1.

Valorile în primă aproximație ale necunoscutelor sînt aceleași:

$$x_1^{(1)} = +10{,}90$$
$$x_2^{(1)} = +0{,}80$$
$$x_3^{(1)} = -5{,}00$$
$$x_4^{(1)} = -2{,}10$$

Treapta II de calcul (nu se mai introduce $x^{(1)}$ în valoarea lui $x^{(2)}$):

$$\Delta x_1^{(1)} = -0{,}2 \times 0{,}80 - 0{,}5 \times 5{,}00 + 0{,}1 \times 2{,}10 = -2{,}45$$
$$\Delta x_2^{(1)} = +0{,}3 \times 10{,}90 + 0{,}4 \times 5{,}00 - 0{,}1 \times 2{,}10 = +5{,}06$$
$$\Delta x_3^{(1)} = -0{,}4 \times 10{,}90 - 0{,}6 \times 0{,}80 + 0{,}2 \times 2{,}10 = -4{,}42$$
$$\Delta x_4^{(1)} = +0{,}5 \times 10{,}90 - 0{,}1 \times 0{,}80 - 0{,}1 \times 5{,}00 = +4{,}63$$

Treapta III de calcul:

$$\Delta x_1^{(2)} = -0{,}2 \times 5{,}06 - 0{,}5 \times 4{,}42 - 0{,}1 \times 4{,}63 = -3{,}67$$
$$\Delta x_2^{(2)} = -0{,}3 \times 2{,}45 + 0{,}4 \times 4{,}42 + 0{,}1 \times 4{,}63 = +1{,}47$$
$$\Delta x_3^{(2)} = +0{,}4 \times 2{,}45 - 0{,}6 \times 5{,}06 - 0{,}2 \times 4{,}63 = -2{,}99$$
$$\Delta x_4^{(2)} = -0{,}5 \times 2{,}45 - 0{,}4 \times 5{,}06 - 0{,}1 \times 4{,}42 = -3{,}68$$

etc.

Comparînd calculele după cele două metode, se vede imediat că:

$$\Delta x_1^{(1)} = x_1^{(2)} - x_1^{(1)} = +8{,}45 - 10{,}90 = -2{,}45$$
$$\Delta x_1^{(2)} = x_1^{(3)} - x_1^{(2)} = +4{,}78 - 8{,}45 = -3{,}67$$

Deci operațiunile de calcul sînt aceleași, cu excepția termenului liber, care în operarea cu x apare la fiecare treaptă de calcul, iar în operarea cu Δx apare numai în prima treaptă de calcul. Rezultă că pentru a ajunge la aceeași aproximație, sînt necesare în ambele metode același număr de trepte de calcul.

Rezultatele calculului de la treapta IV de calcul înainte sînt date în tabelă.

Treapta	$x_1 = +5$		$x_2 = +6$		$x_3 = -10$		$x_4 = -3$	
	Δx	Eroare %	Δx	Eroare %	Δx	Eroare %	Δx	Eroare %
I	+10,90		+0,80		−5,00		−2,10	
II	−2,45		+5,06		−4,42		+4,63	
III	−3,67		+1,47		−2,99		−3,68	
IV	−1,42		−0,26		+1,34		−2,73	
V	+0,98		−1,22		+1,27		−0,47	
VI	+0,93		−0,27		+0,42		+1,10	
VII	+0,11		+0,22		−0,43		+0,61	
VIII	−0,28		+0,27		−0,29		−0,07	
IX	−0,19		+0,03		−0,04		−0,28	
X	+4,91	−1,8	+6,10	+1,7	−10,14	+1,4	−2,99	−0,3

Iterația ar trebui oprită în momentul cînd erorile devin mai mici decît cele pe care le-am admis în calcul. Cum erorile față de valorile exacte ale necunoscutelor nu se cunosc, se poate opri iterația atunci cînd corecțiile, exprimate în procente față de valorile la care s-a ajuns prin calcul, devin mai mici decît erorile procentuale admise. Din acest punct de vedere, ope-

Scanned with OKEN Scanner

rarea cu Δx apare mai comodă, deoarece avem totdeauna în față valorile corecțiilor. În schimb, prezintă față de operarea cu x dezavantajul că valorile finale ale necunoscutelor nu se obțin direct $[x_j = x_j^{(z)}]$, ci mai este necesară după terminarea iterației însumarea:

$$x_j = x_j^{(1)} + \sum_1^z \Delta x_j$$

Există și unele reguli de evaluare a erorilor efective într-o treaptă dată a iterației. Astfel de ex. după *R. v. Mises* (v. bibl. 76), dacă în treapta z a iterației corecția $\Delta x^{(z)}$ este de ordinul a $^1/_2$ din corecția $\Delta x^{(m)}$ dintr-o altă treaptă anterioară m, atunci eroarea lui $x^{(z)}$ față de valoarea exactă a lui x este de ordinul de mărime al diferenței $x^{(z)} - x^{(m)}$. Se dau și alte reguli similare.

II. Rezolvarea succesivă a ecuațiilor (metoda Seidel) [1]

În felul în care a fost expus mai sus, calculul se conduce pe cicluri, rezolvîndu-se în fiecare treaptă de calcul simultan toate ecuațiile sistemului, puse sub forma (2.5), pe baza valorilor necunoscutelor determinate din treapta de calcul precedentă. Astfel, în treapta de ordinul (m):

$$(1)\quad x_1^{(m)} = x_1^{(1)} + b_{12}x_2^{(m-1)} + b_{13}x_3^{(m-1)} + \dots$$

$$(2)\quad x_2^{(m)} = x_2^{(1)} + b_{21}x_1^{(m-1)} + b_{23}x_3^{(m-1)} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Din rezolvarea ecuației (1), obținem deci pentru x_1 noua valoare $x_1^{(m)}$. Cînd trecem însă apoi la rezolvarea ecuației (2), pentru calculul lui $x_2^{(m)}$, nu folosim pe $x_1^{(m)}$, deși îl cunoaștem, ci tot pe $x_1^{(m-1)}$, cunoscut din treapta de calcul precedentă. Ori $x_1^{(m)}$ constituie o valoare mai exactă a lui x_1 decît $x_1^{(m-1)}$, astfel că pentru îmbunătățirea rapidității convergenței erorilor, ar fi avantajos să introducem în ecuația (2) pe $x_1^{(m-1)}$ în loc de $x_1^{(m-1)}$.

Aceasta revine la a înlocui rezolvarea simultană a tuturor ecuațiilor în aceeași treaptă de calcul, cu o rezolvare succesivă, ținînd seama la fiecare ecuație și de corecțiile anterioare din aceeași treaptă de calcul.

Vom avea atunci, în treapta de ordinul (m):

$$(1)\quad x_1^{(m)} = x_1^{(1)} + b_{12}x_2^{(m-1)} + b_{13}x_3^{(m-1)} + b_{14}x_4^{(m-1)} + \dots$$
$$(2)\quad x_2^{(m)} = x_2^{(1)} + b_{21}x_1^{(m)} + b_{23}x_3^{(m-1)} + b_{24}x_4^{(m-1)} + \dots$$
$$(3)\quad x_3^{(m)} = x_3^{(1)} + b_{31}x_1^{(m)} + b_{32}x_2^{(m)} + b_{34}x_4^{(m-1)} + \dots$$
$$\dots\dots\dots\quad\dots\dots\dots\dots\quad\dots\dots\dots\dots$$

Ordinea în care urmează să se rezolve ecuațiile poate fi aleasă oricum. Totuși, interesează să se aleagă ordinea optimă, adică aceea care comportă

[1] v. bibl. 65.

Scanned with OKEN Scanner

numărul cel mai mic de operaţiuni pentru a ajunge la aproximaţia dorită. O regulă pe baze ştiinţifice în această privinţă nu se poate da; o indicaţie ar fi să se rezolve ecuaţiile în ordinea valorilor necunoscutelor principale, de la cele mai mari spre cele mai mici. În felul acesta, valorile mari, care aduc corecţii importante în celelalte ecuaţii, sînt introduse de la început.

Să reluăm sistemul de ecuaţii folosit în exemplele nr. 1 şi nr. 2 şi să-l rezolvăm prin această metodă, operînd cu x.

Exemplul 3. Rezolvarea prin metoda Seidel, operînd cu x, a sistemului de ecuaţii din exemplele 1 şi 2.

Treapta I:

$x_1^{(1)} = +10{,}90$

$x_3^{(1)} = -5{,}00 - 0{,}40 \times 10{,}90 = -9{,}36$

(la calculul lui $x_3^{(1)}$ s-a ţinut seama şi de $x_1^{(1)}$ calculat mai înainte).

$x_4^{(1)} = -2{,}10 + 0{,}5 \times 10{,}90 - 0{,}1 \times 9{,}36 = +2{,}41$

$x_2^{(1)} = +0{,}80 + 0{,}3 \times 10{,}90 + 0{,}4 \times 9{,}36 + 0{,}1 \times 2{,}41 = +8{,}05$

Treapta II:

$x_1^{(2)} = +10{,}90 - 0{,}2 \times 8{,}05 - 0{,}5 \times 9{,}36 - 0{,}1 \times 2{,}41 = +4{,}37$

$x_3^{(2)} = -5{,}00 - 0{,}4 \times 4{,}37 - 0{,}6 \times 8{,}05 - 0{,}2 \times 2{,}41 = -12{,}06$

(folosim pe $x_1^{(2)}$, iar pentru x_2 şi x_4 valorile din treapta de calcul precedentă).

$x_2^{(2)} = +0{,}80 + 0{,}3 \times 4{,}37 + 0{,}4 \times 12{,}06 + 0{,}1 \times 2{,}41 = +7{,}17$

$x_4^{(2)} = -2{,}10 + 0{,}5 \times 4{,}37 - 0{,}4 \times 7{,}17 - 0{,}1 \times 12{,}06 = -3{,}99$

Treapta III:

$x_3^{(3)} = -5{,}00 - 0{,}4 \times 4{,}37 - 0{,}6 \times 7{,}17 + 0{,}2 \times 3{,}99 = -10{,}25$ (eroare $+2{,}5\%$)

$x_2^{(3)} = +0{,}80 + 0{,}3 \times 4{,}37 + 0{,}4 \times 10{,}25 - 0{,}1 \times 3{,}99 = +5{,}81$ ($-3{,}2\%$)

$x_1^{(3)} = +10{,}90 - 0{,}2 \times 5{,}81 - 0{,}5 \times 10{,}25 + 0{,}1 \times 3{,}99 = +5{,}02$ ($+0{,}4\%$)

$x_4^{(3)} = -2{,}10 + 0{,}5 \times 5{,}02 - 0{,}4 \times 5{,}81 - 0{,}1 \times 10{,}25 = -2{,}94$ ($-2{,}0\%$)

Treapta IV:

$x_3^{(4)} = -5{,}00 - 0{,}4 \times 5{,}02 - 0{,}6 \times 5{,}81 + 0{,}2 \times 2{,}94 = -9{,}91$ ($+0{,}9\%$)

$x_2^{(4)} = +0{,}80 + 0{,}3 \times 5{,}02 + 0{,}4 \times 9{,}91 - 0{,}1 \times 2{,}94 = +5{,}98$ ($-0{,}4\%$)

$x_1^{(4)} = +10{,}90 - 0{,}2 \times 5{,}98 - 0{,}5 \times 9{,}91 + 0{,}1 \times 2{,}94 = +5{,}03$ ($+0{,}6\%$)

$x_4^{(4)} = -2{,}10 + 0{,}5 \times 5{,}03 - 0{,}4 \times 5{,}98 + 0{,}1 \times 9{,}91 = -2{,}97$ ($-1{,}0\%$)

După cum se observă, convergenţa este mult mai rapidă decît în metoda folosită în exemplul nr. 1, după 4 trepte de calcul erorile rămînînd

Scanned with OKEN Scanner

sub 1%, în timp ce în exemplul nr. 1 după 9 trepte de calcul ajunsesem la erori pînă la 2%.

Procedeul de rezolvare succesivă a ecuațiilor poate fi folosit și dacă se operează cu corecțiile Δx. În acest caz este recomandabil să se rezolve ecuațiile pornind de la corecțiile mai mici spre cele mai mari, deoarece astfel corecțiile mari rămîn mai mult timp în calcul, efectul lor fiind mai bine utilizat.

În exemplul nr. 4 este rezolvat sistemul de ecuații din exemplele precedente, prin această metodă.

Exemplul 4.

Treapta I:

$x_2^{(1)} = + 0{,}80$

$x_4^{(1)} = - 2{,}10 - 0{,}4 \times 0{,}80 = - 2{,}42$

$x_3^{(1)} = - 5{,}00 - 0{,}6 \times 0{,}80 + 0{,}2 \times 2{,}42 = - 5{,}00$

$x_1^{(1)} = +10{,}90 - 0{,}2 \times 0{,}80 - 0{,}5 \times 5{,}00 + 0{,}1 \times 2{,}42 = + 8{,}48$

Treapta II:

$\Delta x_2^{(1)} = + 0{,}3 \times 8{,}48 + 0{,}4 \times 5{,}00 - 0{,}1 \times 2{,}42 = + 4{,}30$

$\Delta x_4^{(1)} = + 0{,}5 \times 8{,}48 - 0{,}4 \times 4{,}30 - 0{,}1 \times 5{,}00 = + 2{,}02$

$\Delta x_3^{(1)} = - 0{,}4 \times 8{,}48 - 0{,}6 \times 4{,}30 - 0{,}2 \times 2{,}02 = - 6{,}37$

$\Delta x_1^{(1)} = - 0{,}2 \times 4{,}30 - 0{,}5 \times 6{,}37 - 0{,}1 \times 2{,}02 = - 4{,}25$

Treapta III:

$\Delta x_4^{(2)} = - 0{,}5 \times 4{,}25 - 0{,}1 \times 6{,}37 = - 2{,}77$

(Respectînd regula de alegere a ordinii de rezolvare a ecuațiilor recomandată mai sus, în fiecare treaptă ecuațiile se rezolvă în altă ordine. Astfel, între două corectări consecutive ale aceleiași ecuații nu se corectează și toate celelalte ecuații. În cazul nostru, între $\Delta x_4^{(1)}$ și $\Delta x_4^{(2)}$ s-au calculat numai $\Delta x_3^{(1)}$ și $\Delta x_1^{(1)}$, la x_2 neapărînd nici o nouă corecție. De aceea în expresia lui $\Delta x_4^{(2)}$ nu va apărea x_2. Într-adevăr, cum între $\Delta x_4^{(1)}$ și $\Delta x_4^{(2)}$ x_2 nu a mai căpătat nici o corecție, iar corecțiile lui anterioare au intrat în expresia lui $\Delta x_4^{(2)}$, x_2 nu va mai influența asupra lui $\Delta x_4^{(2)}$. Ca regulă generală deci, cînd se operează cu corecțiile Δx, se introduc în expresia lui $\Delta x_j^{(m)}$ numai corecțiile celorlalte necunoscute x_k, calculate între $\Delta x_j^{(m-1)}$ și $\Delta x_j^{(m)}$.)

$$\Delta x_2^{(2)} = - 0{,}3 \times 4{,}25 + 0{,}4 \times 6{,}37 + 0{,}1 \quad (2{,}02 - 2{,}77) = + 1{,}19$$

(între $\Delta x_2^{(1)}$ și $\Delta x_2^{(2)}$, ecuația x_4 se rezolvă de două ori, deci în expresia lui $\Delta x_2^{(2)}$ vor apărea și $\Delta x_4^{(1)} = + 2{,}02$ și $\Delta x_4^{(2)} = - 2{,}77$).

$\Delta x_1^{(2)} = + 0{,}1 \times 2{,}77 - 0{,}2 \times 1{,}19 = + 0{,}04$

$\Delta x_3^{(2)} = - 0{,}4 \ (0{,}04 - 4{,}25) - 0{,}6 \times 1{,}19 + 0{,}2 \times 2{,}77 = + 1{,}51$

Treapta IV:

$\Delta x_1^{(3)} = + 0{,}5 \times 1{,}51 = + 0{,}76$ (eroare + 0,6%)

$\Delta x_2^{(3)} = + 0{,}3 \ (0{,}76 + 0{,}04) - 0{,}4 \times 1{,}51 = - 0{,}36$ (eroare − 1,2%)

$\Delta x_3^{(3)} = - 0{,}4 \times 0{,}76 + 0{,}6 \times 0{,}36 = - 0{,}08$ (eroare − 0,6%)

$\Delta x_4^{(3)} = + 0{,}5 \ (0{,}04 + 0{,}76) - 0{,}4 \ (1{,}19 - 0{,}36) + 0{,}1 \ (1{,}51 - 0{,}08) = + 0{,}21$ (eroare + 1,3%)

Scanned with OKEN Scanner

Treapta V:

$\Delta x_3^{(4)} = -0{,}2 \times 0{,}21 = -0{,}4$ (eroare + 0,2%)

$\Delta x_2^{(4)} = +0{,}4\ (0{,}04 + 0{,}08) + 0{,}1 \times 0{,}21 = +0{,}07$ (eroare 0)

$\Delta x_4^{(4)} = -0{,}4 \times 0{,}07 - 0{,}1 \times 0{,}04 = -0{,}04$ (eroare − 0,2%)

$\Delta x_1^{(4)} = -0{,}2\ (0{,}07 - 0{,}36) - 0{,}5\ (0{,}04 + 0{,}08) - 0{,}1\ (0{,}21 - 0{,}04) = -0{,}02$ (eroare 0)

Comparînd calculul cu cel din exemplul 2, se vede că şi în acest caz convergenţa se ameliorează sensibil folosind rezolvarea succesivă a ecuaţiilor în locul rezolvării simultane.

III. Suprapunerea efectelor

În capitolul I s-a arătat că scriind condiţiile de continuitate şi de echilibru la noduri pentru un sistem static nedeterminat format din bare (sau condiţiile corespunzătoare pentru unul din celelalte tipuri de sisteme analoge tratate), se ajunge la un sistem de ecuaţii liniare numai dacă se admite ca valabil principiul suprapunerii efectelor solicitărilor exterioare. În această ipoteză, valorile necunoscutelor static nedeterminate rezultă aceleaşi dacă se introduc în calcul simultan toate solicitările exterioare sau se face calculul separat pentru fiecare solicitare exterioară şi se însumează rezultatele.

În sistemul de ecuaţii, solicitările exterioare ale sistemului de bază cu deplasările blocate sau libere sînt termenii liberi a_{j0}, iar necunoscutele static nedeterminate sînt necunoscutele x_j. Deci exprimarea matematică a principiului suprapunerii efectelor ar fi următoarea: valorile necunoscutelor x_j rezultă aceleaşi dacă se rezolvă sistemul de ecuaţii introducînd simultan termenii liberi în toate ecuaţiile, sau se rezolvă considerînd termenul liber numai la cîte o ecuaţie (punînd în celelalte ecuaţii termenii liberi egali cu zero) şi se însumează la sfîrşit rezultatele.

Într-adevăr, exprimînd necunoscutele în funcţie de determinanţi, avem:

$$x_j = \frac{a_{10}\, d_1 + a_{20}\, d_2 + \ldots + a_{n0}\, d_n}{D} = \frac{\sum_1^n a_{j0}\, d_j}{D} \qquad (2.7)$$

unde: D = determinantul sistemului

$a_{10}, a_{20} \ldots a_{n0}$ = termenii liberi

$d_1, d_2 \ldots d_n$ = determinanţii minori corespunzători

deci x_j este o funcţie liniară de termenii liberi.

Această proprietate a sistemelor de ecuaţii liniare apare în mod evident şi în rezolvarea prin metoda iteraţiei. În calculul prin metoda iteraţiei nu este necesar să se introducă toţi termenii liberi de la început, ei putînd fi introduşi oricînd în cursul calculului. Deci calculul se poate duce pînă la sfîrşit cu termen liber într-o singură ecuaţie, iar apoi relua de la început cu termen liber în altă ecuaţie etc.

Exprimări de forma (2.7) ale necunoscutelor în funcţie de termenii liberi îşi găsesc aplicaţii în special la calculul cadrelor cu noduri deplasabile, cînd metoda aproximaţiilor succesive se utilizează numai pentru treapta I de calcul (noduri fixe), iar pentru determinarea translaţiilor nodurilor se scriu ecuaţii de lucru mecanic virtual. Pentru a nu rezolva sistemul de ecuaţii pentru fiecare schemă de încărcare în parte, se rezolvă luîndu-se pe rînd

Scanned with OKEN Scanner

termenii liberi în cîte o singură ecuație și egali cu 1. Astfel necunoscutele se obțin ca niște funcții :

$$x_1, x_2 \ldots x_n = f(a_{10}, a_{20} \ldots a_{n0})$$

iar apoi se ține seama de diferitele scheme de încărcare modificînd numai termenii liberi în expresiile necunoscutelor.

IV. Reprezentarea grafică a rezolvării unui sistem de 2 ecuații cu 2 necunoscute prin metoda iterației

Deosebit de sugestivă pentru urmărirea și înțelegerea operațiunilor din metoda iterației este reprezentarea lor grafică. Pentru a fi posibilă o reprezentare în plan, să considerăm un sistem de 2 ecuații cu 2 necunoscute, pe care să-l rezolvăm prin iterație :

(1) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_{10}$

(2) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_{20}$

Explicitînd în fiecare ecuație necunoscuta principală, avem :

(1) $x_1 = b_{10} + b_{12}x_2$

(2) $x_2 = b_{20} + b_{21}x_1$

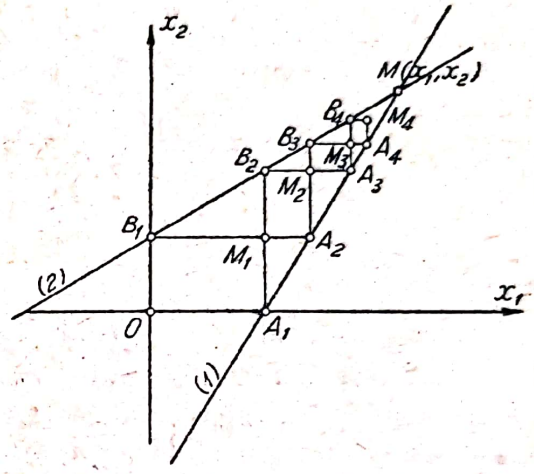


Fig. 16

Cele două ecuații sînt reprezentate în fig. 16 prin dreptele (1), (2). Rezolvarea sistemului de ecuații are drept scop determinarea coordonatelor x_1 și x_2 ale punctului de intersecție (M) al celor două drepte.

Folosim metoda iterației. Pentru aflarea valorilor inițiale ale lui x_1 și x_2 punem în ecuația (1) $x_2 = 0$, iar în ecuația (2) $x_1 = 0$. Obținem pe grafic punctele : A_1 de coordonate $(b_{10},0)$ pe dreapta (1) și respectiv $B_1(0,b_{20})$ pe dreapta (2). Primele valori ale lui x_1 și x_2 sînt $x_1^{(1)} = b_{10}$ și $x_2^{(1)} = b_{20}$, deci poziția în primă aproximație a punctului de intersecție căutat M este M_1 (b_{10}, b_{20}).

Treapta II de calcul :

$x_1^{(2)} = b_{10} + b_{12}x_2^{(1)}$ (pe grafic : căutăm pe dreapta (1) punctul de ordonată $b_{10} + b_{12}x_2^{(1)}$). Din B_1 ducem o paralelă la axa Ox_1 pînă cînd intersectează dreapta (1). Punctul găsit A_2 are coordonatele $x_1^{(2)}$, $x_2^{(1)}$. $x_2^{(2)} = b_{20} + b_{21}x_1^{(1)}$ (pe grafic, analog, ducem din A_1 o dreaptă paralelă cu Ox_2 pînă cînd intersectează dreapta (2). Punctul de intersecție B_2 are coordonatele $x_1^{(1)}$, $x_2^{(2)}$).

Poziția în a doua aproximație a punctului M este M_2 $[x_1^{(2)}, x_2^{(2)}]$.

În același mod se găsesc în treptele următoare de calcul A_3, B_3, M_3, apoi A_4, B_4, M_4 etc. Cînd punctele M_{m-1} și M_m ajung să devină suficient de apropiate între ele, respectiv corecțiile la x_1 și x_2 să devină mai mici decît erorile admise, calculul se încheie. M_m se găsește atunci suficient de aproape de punctul real de intersecție M al dreptelor (1) și (2).

Cînd coeficienții unghiulari ai celor două drepte sînt de semne diferite, reprezentarea grafică a iterației capătă aspectul din fig. 17. Corecțiile,

în loc să fie tot timpul de acelaşi semn, sînt alternativ pozitive şi negative. În figură s-au reprezentat primele 6 trepte de calcul. Se observă că $M_1 \ldots M_6$ tind în sensul indicat prin săgeată spre punctul real de intersecţie M al dreptelor (*1*) şi (*2*).

S-a arătat mai înainte că nu este neapărat necesar ca valorile iniţiale ale necunoscutelor să se aleagă punînd în fiecare ecuaţie toate necunoscutele

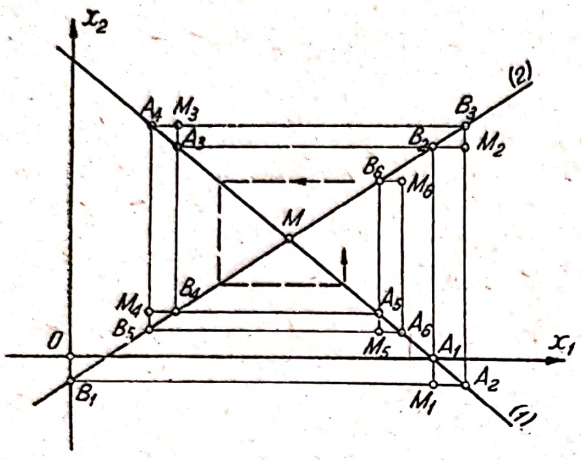


Fig. 17

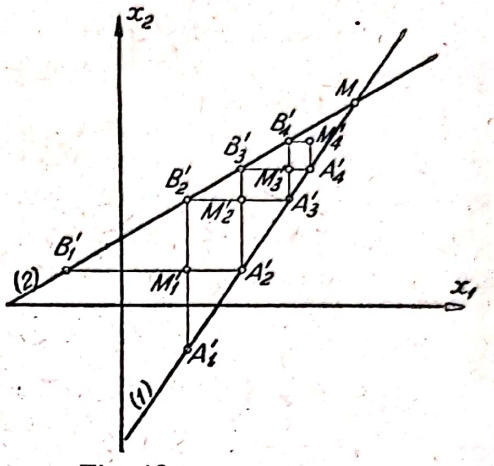


Fig. 18

egale cu zero, în afară de necunoscuta principală, ci se poate porni şi cu alte valori iniţiale. De exemplu, în cazul din fig.16, luînd în loc de $x_1^{(1)} = b_{10}$ şi $x_2^{(1)} = b_{20}$ nişte valori iniţiale arbitrare, — în reprezentarea grafică, în loc să pornim de la punctele A_1, B_1 de pe axele de coordonate, pornim de la două puncte oarecare A_1', B_1' de pe dreptele (*1*) şi (*2*). După cum se vede din fig. 18, rezultatul final al calculului este acelaşi, punctele M_1 şi $M_2 \ldots$ tinzînd tot către M.

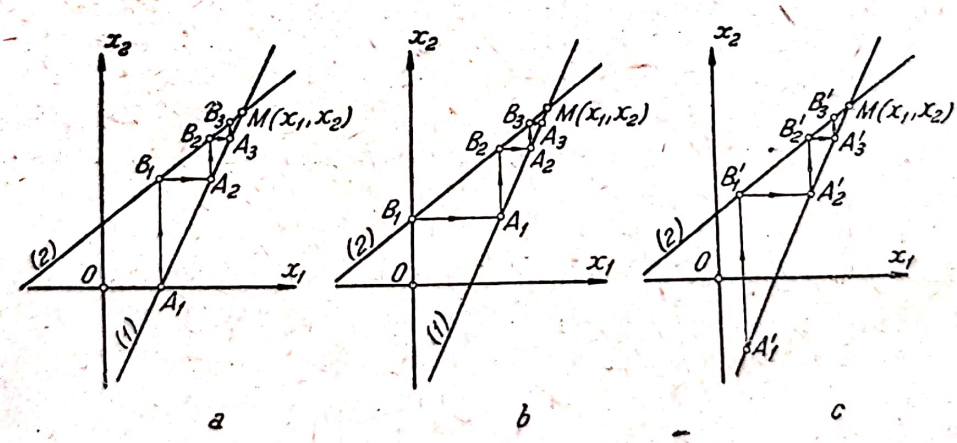


Fig. 19

Reprezentările grafice din fig. 16, 17, 18 corespund calculului prin iteraţie cu rezolvarea simultană a ecuaţiilor în fiecare treaptă de calcul. Dacă ecuaţiile se rezolvă succesiv, aşa cum s-a procedat în exemplele de calcul nr. 3 şi 4, se ajunge la reprezentări grafice de felul celor din fig. 19.

Dacă pornim de la ecuaţia (*1*) (fig. 19, *a*), avem valoarea iniţială a lui x_1 :

$$x_1^{(1)} = b_{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe grafic corespunde punctul A_1 $(b_{10}, 0)$ de pe dreapta (*1*). Pentru aflarea valorii inițiale a lui x_2 folosim pe $x_1^{(1)}$ cunoscut :

$$x_2^{(1)} = b_{20} + b_{21}\, x_1^{(1)}$$

Pe grafic, ducem din A_1 o dreaptă paralelă cu axa Ox_2, pînă cînd taie dreapta (*2*). Punctul de intersecție B_1 are coordonatele $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ și reprezintă poziția în primă aproximație a punctului căutat M.

Treapta II de calcul : Rezolvăm din nou ecuația (*1*), folosind pe $x_2^{(1)}$:

$$x_1^{(2)} = b_{10} + b_{12} x_2^{(1)}$$

Pe grafic, ducem din B_1 o dreaptă paralelă cu axa Ox_1, pînă cînd taie dreapta (*1*). Punctul de intersecție A_2 are coordonatele $x_1^{(2)}$, $x_2^{(1)}$.

Analog, determinăm succesiv punctele $B_2\,[x_1^{(2)}, x_2^{(2)}]$, $A_3\,[x_1^{(3)}, x_2^{(2)}]$, $B_3[x_1^{(3)}, x_2^{(3)}]$ etc. Aceste puncte tind către punctul căutat M.

Dacă se pornește calculul de la ecuația (*2*), se ajunge la reprezentarea grafică din fig. 19, *b*. În fig. 19, *c* s-a dat reprezentarea grafică a calculului cînd se pornește de la ecuația (*1*), însă în loc de $x_1^{(1)} = b_{10}$, se ia o valoare inițială arbitrară pentru x_1 (punctul A_1').

În cazul dreptelor din fig. 17 corespunde reprezentarea grafică din fig. 20.

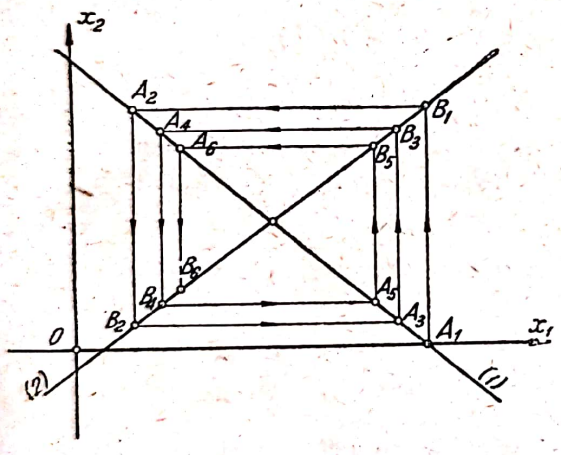


Fig. 20

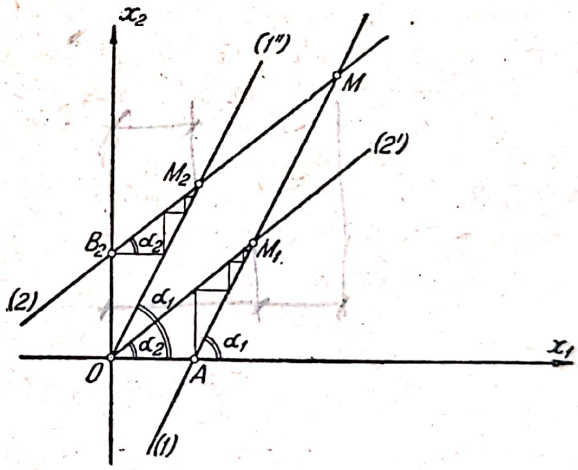


Fig. 21

Comparînd fig. 16 cu 19, *a*, respectiv 17 cu 20 sau 18 cu 19,*c* se vede imediat că pentru a ajunge la aceeași aproximație, cu rezolvarea simultană a ecuațiilor, este necesar un număr dublu de operațiuni (un număr dublu de segmente de dreaptă AB) decît cu rezolvarea succesivă.

Să urmărim acum grafic și suprapunerea efectelor, în cazul că termenii liberi ai celor două ecuații se iau în considerație simultan sau pe rînd.

Sistemul de ecuații considerat este (fig. 21) :

$$(1)\quad a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = a_{10}$$
$$(2)\quad a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = a_{20}$$

Împărțim acest sistem în două sisteme, fiecare avînd termen liber la cîte o singură ecuație :

$$(1')\quad a_{11}\, x_1' + a_{12}\, x_2' = a_{10}$$
$$(2')\quad a_{21}\, x_1' + a_{22}\, x_2' = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

şi :

$$(1'') \quad a_{11}\, x_1'' + a_{12}\, x_2'' = 0$$
$$(2'') \quad a_{21}\, x_1'' + a_{22}\, x_2'' = a_{20}$$

Suprapunînd efectele termenilor liberi, va trebui să avem la sfîrşit :

$$x_1 = x_1' + x_1''$$
$$x_2 = x_2' + x_2''$$

Pe grafic, (*1'*) şi (*2''*) sînt aceleaşi drepte ca şi (*1*) şi (*2*), iar (*1''*) şi (*2'*) sînt două drepte paralele cu (*1*) şi (*2*), însă trecînd prin origină, deoarece coeficienţii unghiulari sînt aceiaşi, iar termenii liberi sînt egali cu zero.

Prin rezolvarea sistemului (*1*), (*2*) se obţine punctul $M(x_1, x_2)$, iar prin rezolvarea sistemelor (*1'*), (*2'*) şi (*1''*), (*2''*) se obţin punctele M_1 (x_1', x_2') şi M_2 (x_1'', x_2'').

$$x_1 = BM \cos \alpha_2 ; \; x_1' = OM_1 \cos \alpha_2 = M_2M \cos \alpha_2 ;$$
$$x_1'' = BM \cos \alpha_2 ;$$
$$x_1' + x_1'' = (BM_2 + M_2M) \cos \alpha_2 = BM \cos \alpha_2 = x_1.$$

Analog rezultă $x_2' + x_2'' = x_2$.

Reprezentări grafice de felul celor date mai sus pentru sisteme de 2 ecuaţii cu 2 necunoscute pot fi construite şi pentru sisteme de 3 ecuaţii cu 3 necunoscute, fie în spaţiu, fie reduse în plan cu ajutorul unei epure.

Pentru funcţii neliniare, reprezentări grafice asemănătoare ale operaţiunilor din rezolvarea prin metoda iteraţiei sînt date în toate tratatele (v. de ex. bibl. 8). Reprezentările din fig. 16—21 sînt extrase dintr-un studiu al ing. *Mircea Soare* (v. şi *Ch. Dubin*, bibl. 22, *H. Craemer*, bibl 12).

B. ORGANIZAREA CALCULULUI PE O SCHEMĂ DE TRANSMITERI (METODA R. HALASZ)

I. Schema de transmiteri

Operaţiunile din metoda iteraţiei pot fi organizate pe o schemă, cu ajutorul căreia calculul devine mecanic. Cea mai comodă formă de schemă a fost dată de *Kerkhofs* şi *R. Halasz* (v. bibl. 34, 35), după ideea schemei folosite în metodele practice pentru calculul prin aproximaţii succesive al cadrelor cu noduri fixe, publicate anterior de alţi autori.

Principiul schemei Halasz se bazează pe faptul că în metoda iteraţiei fiecare necunoscută x_k se calculează totdeauna (în toate treptele de calcul) din aceeaşi ecuaţie, şi anume din ecuaţia în care ea este necunoscută principală. De asemenea, înlocuirea valorii x_k, calculată în ecuaţia de ordinul k, într-o altă ecuaţie j, se face totdeauna prin înmulţirea cu acelaşi coeficient b_{jk}.

$$x_j = b_{j0} + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, x_k \quad (k \neq j)$$

(în ecuaţia j, x_k intră întotdeauna înmulţit cu b_{jk}).

Putem spune atunci că efectul necunoscutei x_k *se transmite* asupra necunoscutei x_j la fiecare treaptă de calcul prin înmulţirea cu *coeficientul de transmitere* b_{jk}.

Scanned with OKEN Scanner

Se alcătuieşte o schemă, în care fiecare necunoscută (respectiv ecuaţie) este reprezentată printr-un nod. De exemplu, în cazul sistemului de ecuaţii (2.8) :

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \qquad\qquad + a_{15}x_5 = a_{10} \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \qquad\quad = a_{20} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = a_{30} \\ a_{41}x_1 + \qquad + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = a_{40} \\ \qquad\qquad a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = a_{50} \end{array}\right\} \qquad (2.8)$$

care, pus sub forma (2.5) devine :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_{10} + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{15}x_5 \\ x_2 = b_{20} + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 \\ x_3 = b_{30} + b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{34}x_4 + b_{35}x_5 \\ x_4 = b_{40} + b_{41}x_1 + b_{43}x_3 + b_{45}x_5 \\ x_5 = b_{50} + b_{53}x_3 + b_{54}x_4 \end{array}\right\} \qquad (2.9)$$

schema este cea din fig. 22.

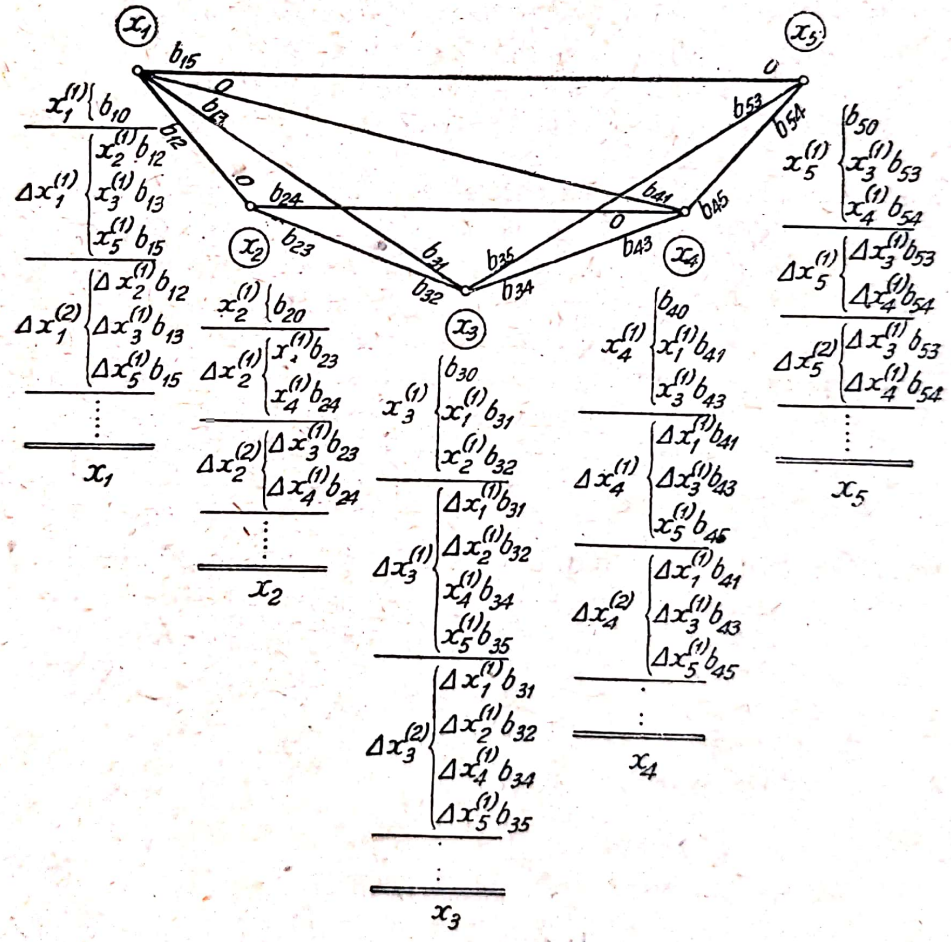


Fig. 22

Nodurile se leagă între ele prin bare. Apoi, în dreptul fiecărui nod, la fiecare capăt de bară, se scriu coeficienţii de transmitere b_{jk} către nodul respectiv, de la nodurile de unde vin barele. De ex. la nodul x_1, la capetele barelor x_2x_1, x_3x_1, x_5x_1, s-au scris coeficienţii de transmitere respec-

tivi b_{12}, b_{13}, b_{15} de la nodurile x_2, x_3, x_5 către nodul x_1. La capătul barei $x_4\,x_1$ s-a scris $b_{14} = 0$, deoarece în ecuația (*1*), unde x_1 este necunoscută principală, nu apare necunoscuta x_4, deci nu există transmitere de la x_4 către x_1. De la x_1 la x_4 va exista însă transmitere, deoarece necunoscuta x_1 apare în ecuația (*4*).

Între x_2 și x_5 nu există transmitere, deoarece nici x_2 nu apare în ecuația (*5*), nici x_5 în ecuația (*2*). De aceea bara $x_2\,x_5$ nu este necesară în schemă și a fost suprimată.

Calculul se începe scriind în dreptul fiecărui nod valorile inițiale ale necunoscutelor :

$$x_1^{(1)} = b_{10};\quad x_2^{(1)} = b_{20} \ldots\quad x_5^{(1)} = b_{50}$$

Sub aceste valori se trage cîte o linie, care marchează terminarea primei trepte de calcul.

Urmează treapta a doua de calcul, în care valorile $x_{1\ldots5}^{(1)}$ se înlocuiesc în celelalte ecuații, adică se transmit de la nodul unde au fost calculate la celelalte noduri, prin înmulțirea lor cu coeficienții de transmitere b_{jk}. De exemplu, spre nodul x_1 se transmit : $x_2^{(1)} b_{12}$, $x_3^{(1)} b_{13}$, $x_5^{(1)} b_{15}$. Suma valorilor transmise spre nodul x_1 reprezintă prima corecție $\Delta x_1^{(1)}$ a lui x_1. La fel, la celelalte noduri. Se însumează la fiecare nod valorile transmise și se trage din nou o linie, care marchează terminarea celei de a doua trepte de calcul.

În treapta a treia de calcul, se transmit corecțiile $\Delta x_{1\ldots5}^{(1)}$. Prin însumarea la noduri a valorilor transmise, se obțin corecțiile de ordinul doi $\Delta x_{1\ldots5}^{(2)}$ și calculul continuă astfel pînă cînd corecțiile devin suficient de mici.

Cînd iterația este terminată, se însumează la fiecare nod toate valorile din coloană și se obține valoarea finală a necunoscutei respective. Se observă că s-a aplicat metoda iterației cu rezolvarea simultană a ecuațiilor și operînd cu corecțiile Δx, adică metoda folosită în exemplul de calcul nr. 2. În fig. 23 este reprezentat pe o schemă de transmiteri calculului din exemplul nr. 2.

Ecuațiile sub forma explicitată sînt (v. exemplul nr. 1) :

$$\begin{aligned}
x_1 &= +\,10{,}9 - 0{,}2\,x_2 + 0{,}5\,x_3 - 0{,}1\,x_4\\
x_2 &= +\;\;0{,}8 + 0{,}3\,x_1 - 0{,}4\,x_3 + 0{,}1\,x_4\\
x_3 &= -\;\;5{,}0 - 0{,}4\,x_1 - 0{,}6\,x_2 - 0{,}2\,x_4\\
x_4 &= -\;\;2{,}1 + 0{,}5\,x_1 - 0{,}4\,x_2 + 0{,}1\,x_3
\end{aligned}$$

deci coeficienții de transmitere vor fi :

$$\begin{aligned}
&b_{12} = -0{,}2\,; \quad b_{13} = +0{,}5\,; \quad b_{14} = -0{,}1\\
&b_{21} = +0{,}3\,; \quad b_{23} = -0{,}4\,; \quad b_{24} = +0{,}1\\
&b_{31} = -0{,}4\,; \quad b_{32} = -0{,}6\,; \quad b_{34} = -0{,}2\\
&b_{41} = +0{,}5\,; \quad b_{42} = -0{,}4\,; \quad b_{43} = +0{,}1
\end{aligned}$$

Comparînd schema cu exemplul nr. 2, se constată că operațiunile de calcul sînt identice, astfel încît avantajul organizării calculului pe schemă constă numai în faptul că operațiunile se pot face mecanic. Dacă însă în locul rezolvării simultane a ecuațiilor folosim rezolvarea succesivă, utili-

Scanned with OKEN Scanner

zarea schemei de transmiteri, pe lîngă mecanizarea calculului, mai prezintă şi avantaje din punctul de vedere al rapidităţii convergenţei, în sensul că se poate alege şi urmări o ordine mai favorabilă de rezolvare a ecuaţiilor.

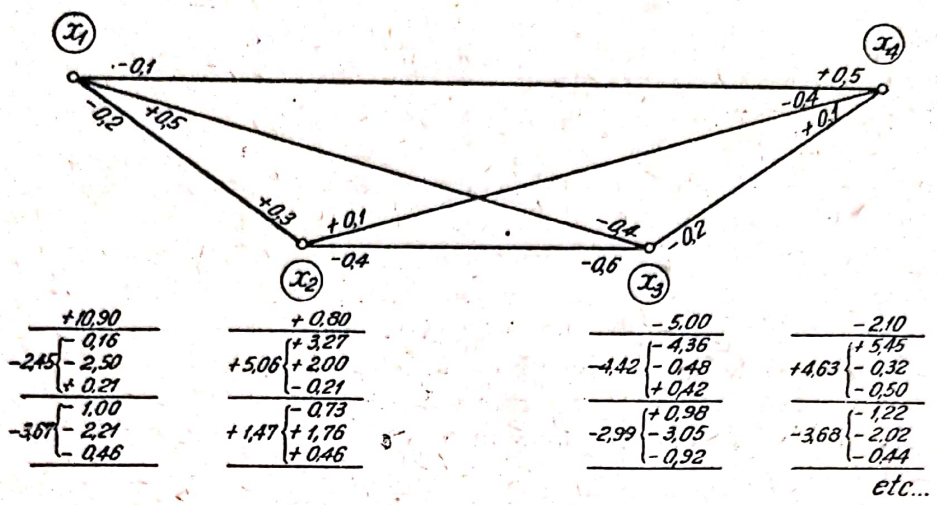


Fig. 23

În fig. 24 este reprezentat calculul pe schemă de transmiteri a sistemului de ecuaţii (2.7), cu rezolvarea succesivă a ecuaţiilor.

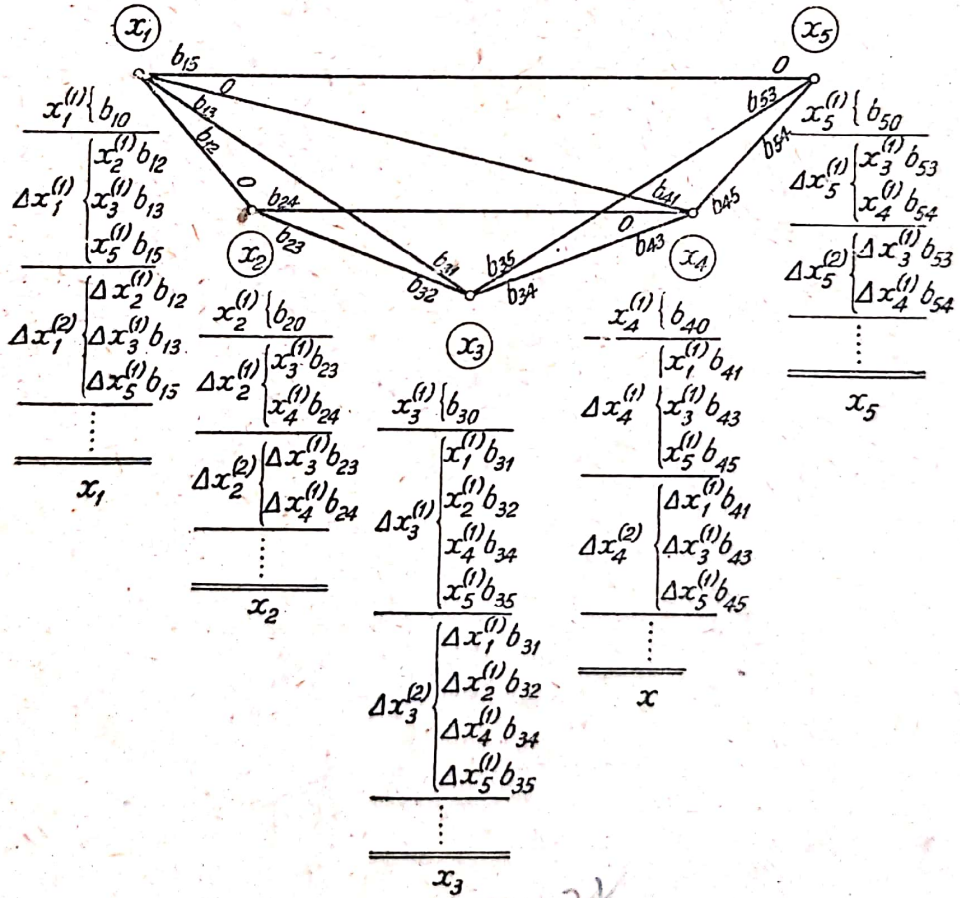


Fig. 24

Se scriu în dreptul fiecărui nod valorile b_{10}, b_{20} . . . b_{50} provenite din termenii liberi. Începem calculul de la x_1. Valoarea în primă aproximaţie a lui x_1 va fi $x_1^{(1)} = b_{10}$. Trecînd la x_2, ar urma să ţinem seamă şi de $x_1^{(1)}$

transmis. Însă cum de la x_1 la x_2 nu se transmite nimic, $x_2^{(1)} = b_{20}$. Valoarea în primă aproximaţie a lui x_3, ţinînd seama de $x_1^{(1)}$ şi $x_2^{(1)}$ transmise, va fi :

$$x_3^{(1)} = b_{30} + x_1^{(1)} b_{31} + x_2^{(1)} b_{32}$$

În continuare :

$$x_4^{(1)} = b_{40} + x_1^{(1)} b_{41} + x_3^{(1)} b_{43}$$
$$x_5^{(1)} = b_{50} + x_3^{(1)} b_{53} + x_4^{(1)} b_{54}$$

Pe schemă sînt arătate şi corecţiile din treptele de calcul II şi III, ordinea corectării valorilor necunoscutelor fiind totdeauna de la x_1 spre x_5.

În schema fig. 24 s-a lucrat pe bază de rezolvare succesivă a ecuaţiilor şi operînd cu corecţiile Δx, deci metoda folosită în exemplul de calcul nr. 4. În fig. 25 este reprezentat pe o schemă de transmiteri calculul din exemplul nr. 4. Coeficienţii de transmitere sînt aceiaşi ca în fig. 23.

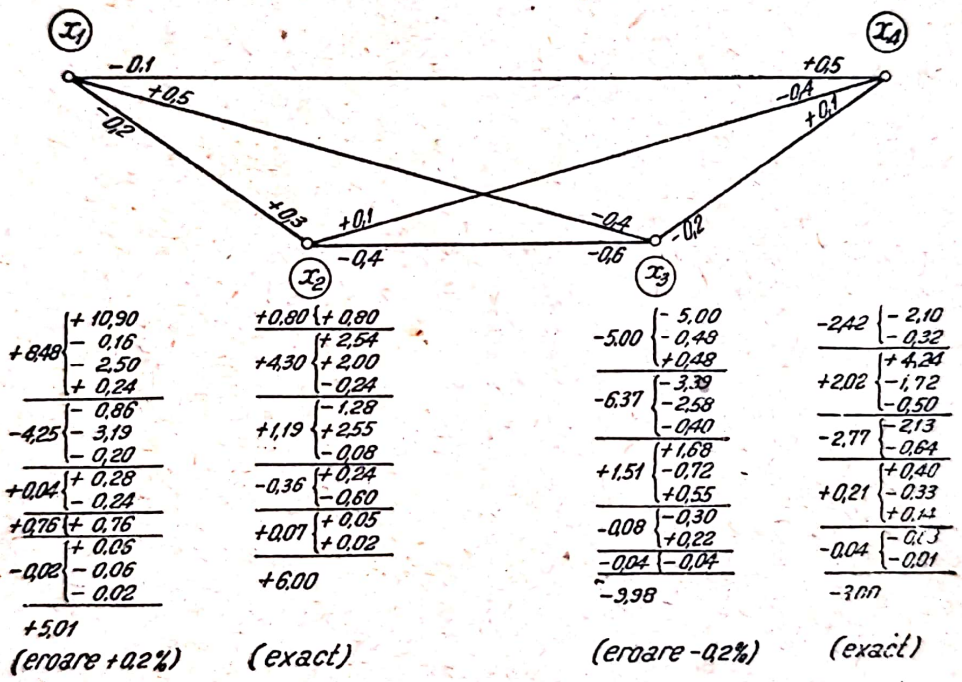


Fig. 25

Comparînd schema cu exemplul nr. 4, se constată şi aici că operaţiunile de calcul sînt identice. Ordinea de corectare a necunoscutelor s-a păstrat aceeaşi, adică de la corecţiile mai mici spre cele mai mari.

Recapitulînd :

a) În procedeul de rezolvare simultană a ecuaţiilor (fig. 22 şi 23) se corectează simultan toate nodurile, iar apoi se fac toate transmiterile.

b) În procedeul de rezolvare succesivă a ecuaţiilor (fig. 24 şi 25), se corectează nodurile pe rînd, iar transmiterile se fac pe măsura corectării nodurilor şi anume : înaintea de corectarea unui nod se fac toate transmiterile cître acel nod. Ordinea de corectare a nodurilor : de la cele cu corecţii mici din treapta de calcul precedentă spre cele cu corecţii mari.

Convergenţa în procedeul b) este mai rapidă decît în procedeul a), pe de o parte datorită utilizării la fiecare corecţie a tuturor corecţiilor

Scanned with OKEN Scanner

anterioare din aceeaşi treaptă de calcul, iar pe de altă parte prin faptul că ordinea de corectare a nodurilor este indiferentă, deci putem alege ordinea cea mai avantajoasă pentru rapiditatea convergenţei.

Organizarea calculului pe schemă de transmiteri ne permite însă folosirea unei ordini de corectare a nodurilor şi mai avantajoase pentru convergenţă decît cea arătată mai sus. Procedeul este următorul: după corectarea unui nod, se fac imediat transmiterile de la nodul corectat spre toate celelalte noduri. Se corectează apoi nodurile în ordinea de la cele la care suma valorilor transmise de la alte noduri este mai mare, spre acelea la care este mai mică. În felul acesta se lucrează cu corecţiile transmise şi nu cu cele din treapta de calcul precedentă, deci efectiv de la punctele mai dezechilibrate spre cele mai echilibrate, astfel încît rapiditatea convergenţei este ameliorată.

Se vede imediat că acest procedeu nu poate fi practic aplicat decît dacă se lucrează pe o schemă de transmiteri. Altfel urmărirea ordinei de rezolvare a ecuaţiilor este dificilă.

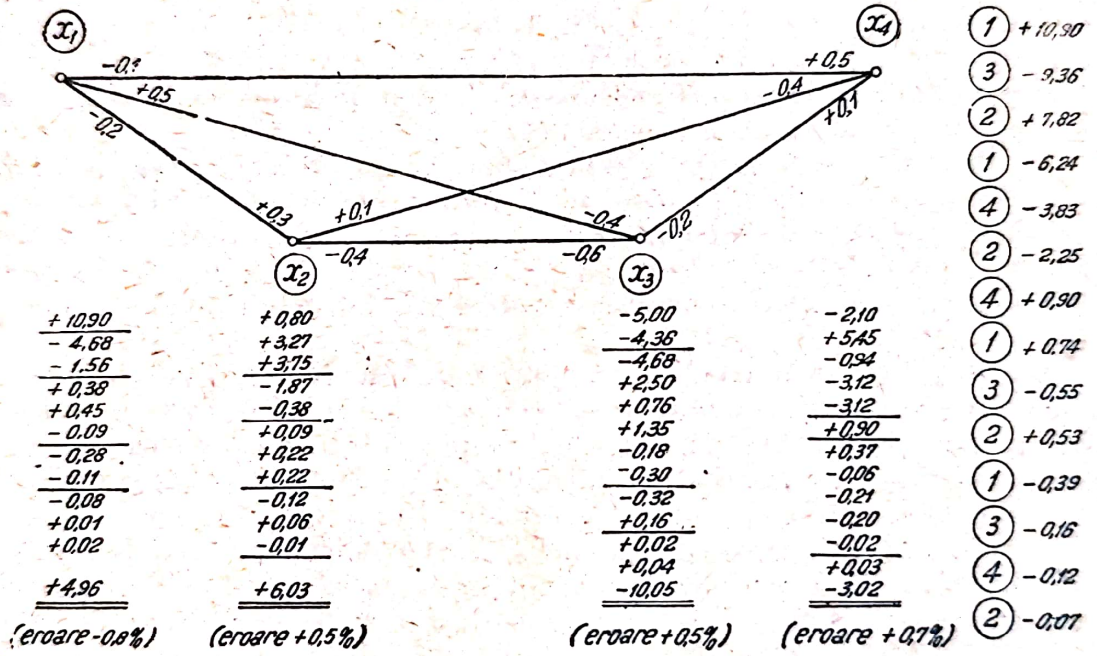


Fig. 26

În fig. 26 este arătată schema de calcul după procedeul de mai sus a sistemului de ecuaţii folosit în exemplele precedente. Coloana din dreapta schemei reprezintă ordinea în care s-au corectat nodurile şi cantităţile ce se transmit de la fiecare nod după corectarea lui.

Calculul începe de la x_1, a cărui valoare în primă aproximaţie (+10,90) este cea mai mare. Înscriem în coloana x_1 valoarea iniţială + 10,90, sub care tragem linie. Transmitem + 10,90 la toate celelalte noduri. Vom avea: + 10,90 (+ 0,3) = + 3,27; +10,90 (— 0,4) = — 4,36; + 10,90 (+ 0,5) = =+5,45. Avem acum la nodurile x_2, x_3, x_4 valorile necorectate:

x_2 . . . + 0,80 (din termenul liber) + 3,27 (transmis) = + 4,07

x_3 . . . — 5,00 (din termenul liber) — 4,36 (transmis) = — 9,36

x_4 . . . — 2,10 (din termenul liber) + 5,45 (transmis) = + 3,35

Scanned with OKEN Scanner

Cea mai mare valoare de corectat se găseşte la nodul x_3 (−9,36). Corectăm deci acest nod şi marcăm valorile corectate trăgînd o linie sub — 4,36. Apoi se transmite — 9,36 la celelalte noduri.

$$-9{,}36\ (+0{,}5) = -4{,}68\ ;\quad -9{,}36\ (-0{,}4) = +3{,}75\ ;\quad -9{,}36\ (+0{,}1) = -0{,}94$$

Vom avea atunci la x_1, x_2, x_4 valorile necorectate :

$x_1 \ldots -4{,}68$

$x_2 \ldots +0{,}80 + 3{,}27 + 3{,}75 = +7{,}82$

$x_4 \ldots -2{,}10 + 5{,}45 - 0{,}94 = +2{,}29$

Cea mai mare dintre acestea se găseşte la x_2 (+ 7,82), deci vom corecta acum acest nod.

Calculul continuă astfel în ordinea arătată în coloana din dreapta schemei, pînă cînd cantităţile de transmis devin suficient de mici. Cînd se corectează pentru ultima dată un nod (se „închide" nodul), se fac transmiterile şi către nodurile închise înaintea lui. În timpul calculului, după fiecare corectare de nod se trage o linie sub valorile luate în consideraţie, astfel ca la corectarea următoare să se lucreze numai cu valorile care apar la nod între cele două corectări succesive, adică numai cu ce rămîne sub linia trasă după corectarea precedentă.

Se observă că în acest procedeu dispare cu totul împărţirea în „trepte de calcul", operaţiunile de corectare făcîndu-se continuu, totdeauna de la nodul unde valoarea de corectat este mai mare, astfel că pînă la sfîrşit nu la toate nodurile va rezulta acelaşi număr de corecţii. În exemplul nostru, nodurile *1* şi *2* s-au corectat de cîte 4 ori, iar nodurile *3* şi *4* de cîte 3 ori.

Convergenţa este cea mai rapidă posibilă. Numărul de operaţiuni necesare în exemplul ales echivalează cu 3,5 cicluri de corecţii în celelalte procedee. Se ajunge la erori sub 1%. Se poate însă observa că şi cu mai puţine operaţiuni (de exemplu renunţînd la ultimele 3 corectări), se ajunsese la erori destul de mici. Avantajul procedeului din fig. 26 apare însă şi mai mult într-un caz cînd convergenţa suferă local la două sau trei noduri. Atunci corecţiile se fac de mai multe ori la rînd între aceste noduri şi numai după ce sînt aduse la ordinul de mărime al celor din celelalte noduri se continuă calculul cu restul schemei.

Dintre modurile de organizare şi conducere a calculului în metoda iteraţiei descrise pînă aici, cel folosit în fig. 26 este cel mai practic şi mai rapid, astfel că pe baza lui vor fi dezvoltate aplicaţiile din capitolele următoare.

II. Folosirea coeficienţilor de transmitere exponenţiali

În general, operaţiunile de transmitere nu prezintă o incomoditate pentru calcul, deoarece constau din înmulţiri, care se pot face cu rigla de calcul. Ca operaţiune mai greoaie rămîne însă adunarea pe coloană la terminarea calculului, care nu se poate face cu rigla. Pentru eliminarea acestei dificultăţi, R. Halasz propune folosirea în calcul a logaritmilor.

Dacă în loc să lucrăm cu numerele, lucrăm cu logaritmii, adică punem

$x_i = \log y_i$ şi $b_{j0} = \log b'_{j0}$, expresia :

$$x_j = b_{j0} + b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + \ldots + b_{jn}x_n$$

devine :

$$\log y_j = \log b'_{j0} + b_{j1} \log y_1 + b_{j2} \log y_2 \ldots + b_{jn} \log y_n$$

sau :

$$y_j = b'_{j0}\, y_1^{b_{j1}}\, y_2^{b_{j2}} \ldots y_n^{b_{jn}} \qquad (2.10)$$

Operaţiunea de transmitere se transformă atunci dintr-o înmulţire într-o ridicare la putere :

$$y_j = y_k^{b_{jk}}$$

exponentul fiind coeficientul de transmitere. Această ridicare la putere se poate face cu rigla de calcul, folosind scara e^x. La sfîrşitul calculului, coloanele de la fiecare nod nu vor mai reprezenta sume, ci produse, cf. ecuaţiei (2.10), care se pot de asemenea efectua cu rigla de calcul. Ca rezultat, obţinem valorile y_j, care apoi trebuie transformate :

$$x_j = \log y_j$$

şi rezultă necunoscutele căutate.

Este de notat că în această metodă corecţiile (cantităţile de transmis) sînt numerele ai căror logaritmi reprezintă corecţiile reale, încît cînd corecţiile reale tind la zero, corecţiile din calcul vor tinde la 1. Deci vom opri iteraţia cînd vom constata că valorile transmise tind la 1.

Am amintit metoda de mai sus numai cu caracter informativ, întrucît deşi teoretic pare că aduce o simplificare, pentru aplicaţiile practice prezintă unele dezavantaje care o fac să-şi piardă cu totul interesul. Astfel :

— Se lucrează cu cantităţi de un ordin de mărime diferit de al celor care ne interesează. De aceea este şi greu să se aprecieze cînd se poate opri iteraţia, mărimea erorilor procentuale la logaritmi nefiind concludentă în ceea ce priveşte erorile procentuale la numere.

— La începutul şi la terminarea calculului mai sînt necesare transformări din logaritmi în numere şi apoi înapoi în logaritmi. Aceste transformări sînt operaţiuni greoaie şi la care se pot uşor strecura erori.

III. Procedeul de iteraţie elementar al lui Wright

Aplicînd procedeul de iteraţie al lui Wright (v. bibl. 6, 51, 77), se obţin unele simplificări în calculul numeric, ajungîndu-se ca pe schema de transmiteri să se efectueze numai operaţiuni cu cîte o singură cifră.

De ex. în cazul unui sistem de 2 ecuaţii cu 2 necunoscute :

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = a_{10}$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = a_{20}$$

se notează valoarea iniţială a necunoscutei x_1 :

$$x_1 = b_{10} = \frac{a_{10}}{a_{11}} = p_1 + 10 q_1 + 100\, r_1 + 1000\, s_1 + \ldots$$

unde : p_1 = cifra unităţilor
q_1 = cifra zecilor
r_1 = cifra sutelor
s_1 = cifra miilor etc. din numărul b_{10}

La fel : $b_{20} = p_2 + 10\, q_2 + 100\, r_2 + 1000\, s_2 \ldots$

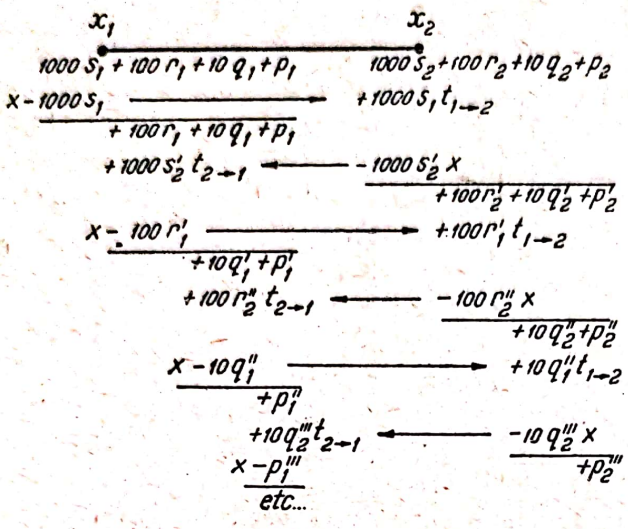
Scanned with OKEN Scanner

Se calculează coeficienţii de transmitere :

$$t_{1 \to 2} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \; ; \; t_{2 \to 1} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$$

şi se trec într-un tablou (fig. 27) valorile lor, înmulţite cu cifrele de la 1 la 10.

Schema de calcul este arătată în fig. 27.



.	$t_{2\to 1}$	$t_{1\to 2}$
1	$t_{2\to 1}$	$t_{1\to 2}$
2	$2t_{2\to 1}$	$2t_{1\to 2}$
3	$3t_{2\to 1}$	$3t_{1\to 2}$
4	$4t_{2\to 1}$	$4t_{1\to 2}$
5	$5t_{2\to 1}$	$5t_{1\to 2}$
6	$6t_{2\to 1}$	$6t_{1\to 2}$
7	$7t_{2\to 1}$	$7t_{1\to 2}$
8	$8t_{2\to 1}$	$8t_{1\to 2}$
9	$9t_{2\to 1}$	$9t_{1\to 2}$

Fig. 27

Presupunem de exemplu că b_{10} şi b_{20} sînt numere formate din cîte 4 cifre. Se înscriu pe schema de transmiteri sub forma :

$$b_{10} = 1000\,s_1 + 100\,r_1 + 10\,q_1 + p_1$$
$$b_{20} = 1000\,s_2 + 100\,r_2 + 10\,q_2 + p_2$$

Se începe corectarea nodurilor de la nodul *1*. *În loc să se transmită de la 1 la 2 întrega valoarea a lui* b_{10}, *se transmit numai miile întregi* $1000\,s_1$. Se scrie sub b_{10} $1000\,s_1$, care apoi se transmite la *2* cu $1000\,s_1\,t_{1\to 2}$. Se scade în coloana nodului *1* cantitatea corectată $1000\,s_1$ din b_{10}, rămînînd pentru treapta următoare de calcul cantitatea necorectată $100\,r_1 + 10\,q_1 + p_1$.

La transmiterea de la *1* la *2*, nu mai este necesar să se calculeze produsul $s_1 \times t_{1\to 2}$, acesta găsindu-se gata calculat în tabloul din dreapta schemei, deoarece s_1 este un număr format dintr-o singură cifră.

Urmează corectarea nodului *2*, unde s-au acumulat cantităţile necorectate : b_{20} şi $1000\,s_2\,t_{1\to 2}$ (aceasta din urmă cuprinde la rîndul ei mii, sute, zeci şi unităţi).

Notăm cu s_1', r_1', q_1' p_1' cifrele miilor, sutelor, zecilor şi unităţilor din suma $b_{20} + 1000\,s_1\,t_{1\to 2}$. Se corectează şi se transmit la nodul *1* numai miile întregi $1000\,s_1'$.

În coloana nodului *2* se scade $1000\,s_1'$ şi rămîn de corectat în treapta următoare $100\,r_2' + 10\,q_2' + p_2'$.

Se corectează din nou nodul *1*. Dacă admitem că numărul $1000\,s_1'\,t_{2\to 1}$, transmis de la *2*, nu mai are mii, ci numai sute, zeci şi unităţi, se notează :

$$100\,r_1 + 10\,q_1 + p_1 + 1000\,s_2'\,t_{2\to 1} = 100\,r_1' + 10\,q_1' + p_1'$$

şi se corectează numai sutele întregi $100\,r_1'$.

Scanned with OKEN Scanner

Calculul continuă astfel, corectîndu-se în treptele următoare zecile, unităţile şi eventualele zecimale care ar apare, mergînd pînă la aproximaţia dorită. La sfîrşitul calculului se însumează la fiecare nod cantităţile corectate. Astfel, la nodul *1* se însumează $-1000\ s_1 - 100\ r_1' - 10\ q_1'' - p_1'''$, iar la nodul *2*: $-1000\ s_2' - 100\ r_2'' - 10\ q_2''' - p_2''''$. Cum pe schemă acestea fuseseră înscrise cu semnul —, se schimbă semnele sumelor şi se obţin valorile necunoscutelor:

$$x_1 = 1000\ s_1 + 100\ r_1' + 10\ q_1'' + p_1'''$$
$$x_2 = 1000\ s_2' + 100\ r_2'' + 10\ q_2''' + p_2''''$$

Pentru a recunoaşte la sfîrşitul iteraţiei cu uşurinţă cantităţile din coloane care trebuie însumate, acestea se marchează cu un semn special (fig. 27).

Se poate întîmpla, în special cînd convergenţa iteraţiei este mai lentă, să nu se reducă numărul de cifre la fiecare treaptă de calcul. De exemplu, în cazul considerat, dacă la prima transmitere de la *2* la *1* cantitatea transmisă $1000\ s_2'\ t_2 \to_1$ cuprinde şi mii, la a doua corectare a nodului *1* apar din nou mii întregi. Atunci necunoscutele rezultă din sume de forma:

$$x_1 = 1000\ (s_1 + s_1' + \ldots) + 100\ (r_1' + r_1'' + \ldots) + 10\ (q_1'' + q_1''' + \ldots) + p_1'''$$

Avantajele acestui procedeu sînt următoarele:

1. În afară de calculele elementare (înmulţiri cu cîte o singură cifră) necesare pentru întocmirea tabloului auxiliar, nu se mai efectuiează nici o înmulţire pe schemă, valorile produselor dintre coeficienţii de transmitere şi cifrele s, r, q, p luîndu-se direct din tablou. *Deci nu este necesară rigla de calcul.*

2. Însumarea finală a coloanelor este foarte simplă, deoarece se adună mii întregi, sute întregi etc.

Avem: $x_1 = 1000\ s_1 + 100\ r_1' + 10q'' + p_1'''$.

Se elimină, astfel, neajunsul, din metoda obişnuită de calcul pe schemă de transmiteri, al necesităţii unor însumări finale de coloane, care nu se pot face cu rigla de calcul.

3. Calculul este mai exact. În adevăr, în metoda obişnuită, dacă se lucrează cu rigla de calcul, erorile din primele trepte de calcul, cînd se operează cu numere mari, nu se mai corectează pînă la sfîrşit, chiar dacă se continuă iteraţia pînă la o aproximaţie oricît de mică. În procedeul Wright, operîndu-se tot timpul separat cu miile, sutele, zecile etc., nu apar astfel de erori, încît se pot obţine rezultate ori cît de exacte. Pentru a obţine aceeaşi exactitate în metoda obişnuită, trebuie să se efectueze produsele cu maşina de calcul.

Procedeul prezintă însă şi unele inconveniente:

1) La un număr mai mare de ecuaţii, întocmirea şi apoi utilizarea tabloului auxiliar devine destul de incomodă.

2) Numărul de cifre care apar pe schemă este mult mai mare decît în metoda obişnuită, astfel că la sisteme de multe ecuaţii schema se încarcă, devenind de asemenea incomodă.

În exmplul nr. 5 se rezolvă un sistem de 3 ecuaţii cu 3 necunoscute, utilizînd procedeul Wright.

Exemplul 5. Rezolvarea unui sistem de 3 ecuaţii cu 3 necunoscute cu procedeul Wright

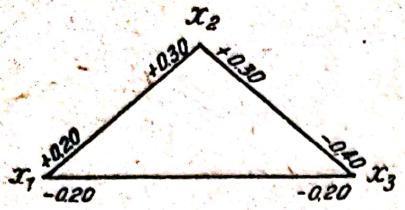
Sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} 5\,x_1 + x_2 - x_3 &= +5170 \\ 3\,x_1 + 10\,x_2 + 3\,x_3 &= -3580 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= +1810 \end{aligned}$$

(Valorile exacte ale necunoscutelor: $x_1 = +1255$, $x_2 = -820$, $x_3 = +285$.)

$$x_1 = 1034 - 0{,}20\,x_2 + 0{,}20\,x_3$$
$$x_2 = -358 - 0{,}30\,x_1 - 0{,}30\,x_3$$
$$x_3 = 362 + 0{,}20\,x_1 + 0{,}40\,x_3$$

$l_{2\to1} = -0{,}20$; $l_{3\to1} = +0{,}20$
$l_{1\to2} = -0{,}30$; $l_{3\to2} = -0{,}30$
$l_{1\to3} = +0{,}20$; $l_{2\to3} = +0{,}40$



	0.20	0.30	0.40
1	0,20	0.30	0.40
2	0.40	0.60	0.80
3	0,60	0.90	1,20
4	0.80	1,20	1.60
5	1.00	1,50	2.00
6	1,20	1,80	2,40
7	1.40	2,10	2,80
8	1,60	2,40	3,20
9	1.80	2,70	3.60

+1034 −1000 x +34 +140 +60 −200 x +34 +20 −50 x +4 +4 −2 −6 x 0− −1 +1 x 0− −1255

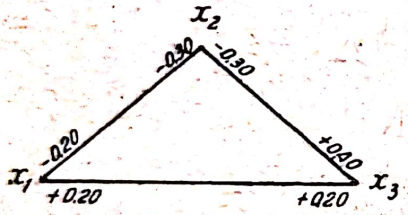
−358 −300 +700 x +42 −90 −60 +100 x −8 −15 −20 x −3 +3 −2 +2 0 x +820

+362 +200 −280 −300 x −18 +40 −40 +10 −8 +10 x −6 +1 +5 x 0− −285

ORDINEA

1-2-3-1-2-1-2-3-1-3-2-1

(a)



+1034 +134 +60 +30 −3 +1 +1256

−358 −310 −90 −58 −9 +4 +1 −820

+362 +207 −268 +39 −59 +6 −2 0− +285

ORDINEA
1 +1034
2 −668
3 +301
1 +134
2 −148
1 +30
3 −14
2 −5
1 −2
3 −2

(b)

Fig. 28

Deoarece cantităţile de transmis, aşa cum s-a arătat, se scriu cu semnul schimbat, coeficienţii de transmitere se vor înscrie pe schemă de asemenea cu semn schimbat, pentru ca valorile transmise să fie corecte.

Schema de transmiteri este arătată în fig. 28 a. Primele operaţiuni:

— nodul *1*: $x_1^{(1)} = +1034$. Se scrie dedesubt -1000 şi se transmite:

— la nodul *2* $-1000 \times 0{,}30 = -300$

— la nodul *3* $+1000 \times 0{,}20 = +200$

La nodul *1* rămîne $+1034 - 1000 = +34$

— nodul *2*: $-358 - 300 = -658$. Numărul cel mai apropiat de sute întregi $= 7$. Se scrie dedesubt $+700$ şi se transmite:

— la nodul *1* $+700 \times 0{,}20 = +140$

— la nodul *3* $-700 \times 0{,}40 = -280$

La nodul *2* rămîne $-358 - 300 + 700 = +42$, etc.

Însumarea la sfîrşitul calculului:

$$x_1 = -(-1000-200-50-60+1) = +1255$$
$$x_2 = -(+700+100-20+0) = -820$$
$$x_3 = -(-300+10+5) = +285$$

Pentru comparaţie, s-a dat în fig. 28 b schema de calcul după metoda obişnuită.

La cap. IV se dă un exemplu de aplicare a procedeului Wright la calculul unei grinzi continue.

IV. Aplicarea la sistemele de ecuaţii din Statică (1.5, 1.6, 1.7, 1.8)

Sub forma cu calculul organizat pe o schemă de transmiteri, metoda de rezolvare prin iteraţie a sistemelor de ecuaţii liniare stă la baza metodelor practice de aproximaţii succesive folosite în calculul sistemelor static nedeter-

minate formate din bare şi în celelalte probleme asemănătoare enumerate în cap. I.

Avantajul principal pe care-l prezintă acest mod de organizare al calculului constă în aceea că *pentru calculul necunoscutelor este suficient să cunoaştem termenii liberi din ecuaţii şi coeficienţii de transmitere; dacă putem găsi acestora semnificaţii fizice în cadrul sistemului de care ne ocupăm şi putem determina valorile lor nemijlocit pe baza acestor semnificaţii fizice, nu mai este necesar să se scrie ecuaţiile, ci putem trece direct la întocmirea schemei de transmiteri şi la calculul necunoscutelor care ne interesează.*

a) *În metoda deplasărilor*

Semnificaţiile fizice ale termenilor liberi şi coeficienţilor de transmitere rezultă imediat, dacă se consideră sistemele de ecuaţii (15.),(1.6), (1.7).

1) *Dacă se aleg ca necunoscute deplasările.* Ecuaţia nodului (j) este (1.6) :

$$\overline{X}_j = \delta_j \sum \nu_{jj} + \sum \delta_k \nu_{jk} \qquad (k \neq j)$$

Necunoscuta principală este deplasarea nodului pentru care se scrie ecuaţia (δ_j). Pusă sub forma (2.5), explicitînd necunoscuta principală, ecuaţia devine :

$$\delta_j = \frac{\overline{X}_j}{\Sigma \nu_{jj}} - \Sigma \delta_k \frac{\nu_{jk}}{\Sigma \nu_{jj}} \qquad (2.11)$$

deci, valoarea iniţială a necunoscutei δ_j este :

$$\boxed{\delta_j^{(1)} = \frac{\overline{X}_j}{\Sigma \nu_{jj}}} \qquad (2.12)$$

unde $\overline{X}_j$ = solicitarea exterioară a nodului, în sistemul de bază cu toate deplasările nodurilor blocate. $\delta_j^{(1)}$ a fost determinat punînd în ecuaţia (2.11) $\delta_k = 0$, deci reprezintă deplasarea pe care ar lua-o nodul j sub acţiunea lui $\overline{X}_j$, cînd s-ar debloca numai nodul j, păstrînd nodurile k blocate. După cum se ştie, aceasta este denumită în Statică *tendinţa de deplasare* a nodului blocat j.

Coeficientul de transmitere de la k la j va fi coeficientul care înmulţeşte pe δ_k în ecuaţia (2.11) :

$$\boxed{t_{k \to j} = -\frac{\nu_{jk}}{\Sigma \nu_{jj}} = -\frac{\nu_{jk}}{\nu_{jj}} \cdot \frac{\nu_{jj}}{\Sigma \nu_{jj}}} \qquad (2.13)$$

Coeficientul de transmitere a deplasării de la k la j se poate defini din punct de vedere static ca tendinţa de deplasare care apare în nodul j blocat, cînd se imprimă nodului k deblocat o rotire $\delta_k = 1$. Punînd în (2.11) $\delta_k = 1$ şi $\overline{X}_j = 0$, se obţine :

$$\delta_j = -\frac{\nu_{jk}}{\Sigma \nu_{jj}} = t_{k \to j}$$

Deci coeficientul de transmitere este de natura unui coeficient de influenţă. El este în acelaşi timp şi un raport de coeficienţi de influenţă, deoarece numărătorul ν_{jk} reprezintă solicitarea care trebuie aplicată în capătul k al barei

Scanned with OKEN Scanner

jk pentru ca în capătul j să se producă o deplasare $\delta_j = 1$, iar numitorul $\Sigma\nu_{jj}$ reprezintă solicitarea exterioară care trebuie aplicată în nodul j pentru ca în acest nod să apară o tendință de deplasare $\delta_j^{(1)} = 1$.

Iterația se începe considerînd în toate nodurile $\delta = 0$, deci pornind de la sistemul de bază din metoda deplasărilor, cu deplasările nodurilor blocate. În această situație solicitările exterioare ale nodurilor sînt $\overline{X}_j$, iar în fiecare nod există o tendință de deplasare $\delta_j^{(1)}$, avînd expresia (2.12), în funcție de $\overline{X}_j$. Corectarea unei ecuații reprezintă deblocarea nodului respectiv. Cum corectarea ecuațiilor se face succesiv, nodurile se vor debloca pe rînd, păstrînd totdeauna restul nodurilor blocate. După deblocarea unui nod, se fac transmiterile deplasărilor la nodurile vecine. Cantitățile transmise se adaugă la tendințele de deplasare acumulate la aceste noduri.

2) *Dacă se aleg ca necunoscute solicitările X ale capetelor de bare.* Avem pentru fiecare capăt de bară cîte o ecuație (1.7). Pentru capătul j al barei jk ecuația este:

$$\delta_j = [X_{jk}^{(j)} - \overline{X}_{jk}^{(j)}]\,\eta_{jj} + [X_{jk}^{(k)} - \overline{X}_{jk}^{(k)}]\frac{\eta_{jk}}{\eta_{jj}}$$

unde necunoscuta principală este solicitarea $X_{jk}^{(j)}$ a capătului de bară pentru care s-a scris ecuația. Explicitînd necunoscuta principală, ecuația devine:

$$X_{jk}^{(j)} = \overline{X}_{jk}^{(j)} + \frac{\delta_j}{\eta_{jj}} - [X_{jk}^{(k)} - \overline{X}_{jk}^{(k)}]\,\frac{\eta_{jk}}{\eta_{jj}} \qquad (2.14)$$

Valoarea inițială a necunoscutei $X_{jk}^{(j)}$ $\left(\text{pentru } X_{jk}^{(k)} = \overline{X}_{jk}^{(k)} = \frac{\delta_j}{\eta_{jj}} = 0\right)$ va fi:

$$X_{jk}^{(j)\,(1)} = \overline{X}_{jk}^{(j)} \qquad (2.15)$$

iar coeficientul de transmitere de la k la j va fi coeficientul care înmulțește pe $X_{jk}^{(k)}$ în ecuația (2.14):

$$\boxed{t_{k\to j} = -\frac{\eta_{jk}}{\eta_{jj}}} \qquad (2.16)$$

Din punct de vedere static, acest coeficient de transmitere poate fi definit ca solicitarea care apare în capătul j al barei jk, blocat, cînd asupra capătului k deblocat se aplică o solicitare $X_{jk}^{(k)} = 1$. Punînd în (2.14) $\delta_j = 0$, $\overline{X}_{jk}^{(j)} = \overline{X}_{jk}^{(k)} = 0$, $X_{jk}^{(k)} = 1$, rezultă:

$$X_{jk}^{(j)} = -\frac{\eta_{jk}}{\eta_{jj}} = t_{k\to j}$$

În afară de ecuațiile de capăt de bară, mai avem la fiecare nod cîte o relație de echilibru (1.5):

$$\sum X_{jk}^{(j)} = 0$$

Iterația începe prin deblocarea unui nod j, păstrînd blocate restul nodurilor k. În momentul deblocării:

$\overline{X}_j = \sum \overline{X}_{jk}^{(j)}$ = solicitarea neechilibrată a nodului;

$\Delta X_{jk}^{(j)} = X_{jk}^{(j)} - \overline{X}_{jk}^{(j)}$ = solicitarea capătului j al barei jk, datorită deblocării nodului j;

$\delta_j^{(1)} = \frac{\overline{X}_j}{\Sigma\nu_{jj}}$ (2.12) = deplasarea nodului j deblocat;

$\delta_k = 0$.

Relația de echilibru poate fi atunci scrisă:

$$\sum \bar{X}_{jk}^{(j)} = \sum X_{jk}^{(j)} - \sum \bar{X}_{jk}^{(j)} + \sum \bar{X}_{jk}^{(j)} = \sum [X_{jk}^{(j)} - \bar{X}_{jk}^{(j)}] + \bar{X}_j = 0$$

iar relația (1.2), punînd $\delta_k = 0$ și $\delta_j = \delta_j^{(1)}$ și schimbînd semnele, deoarece se consideră solicitările pe nod:

$$\Delta X_{jk}^{(j)} = X_{jk}^{(j)} - \bar{X}_{jk}^{(j)} = - \nu_{jj}\, \delta_j^{(1)} = - \frac{\nu_{jj}}{\Sigma \nu_{jj}} \bar{X}_j = - r_{jk}^{(j)} \bar{X}_j \qquad (2.17)$$

unde:

$$\boxed{r_{jk}^{(j)} = \frac{\nu_{jj}}{\Sigma \nu_{jj}}} \qquad (2.18)$$

Rezultă că dacă se deblochează nodul j, încărcat cu solicitarea neechilibrată $\bar{X}_j$, barele se încarcă în j cu solicitările:

$$\Delta X_{jk}^{(j)} = - r_{jk}^{(j)} \bar{X}_j$$

care echilibrează solicitarea $\bar{X}_j$:

$$\sum \Delta X_{jk}^{(j)} + \bar{X}_j = 0$$

Se poate spune că X_j se repartizează între capetele de bare, iar factorul $r_{jk}^{(j)}$ se poate numi *coeficient de repartiție*. Din (2.18) se vede că repartiția se face proporțional cu rigiditățile ν_{jj} ale barelor.

$\Delta X_{jk}^{(j)}$ reprezintă prima corecție la valoarea inițială $X_{jk}^{(j)(1)} = \bar{X}_{jk}^{(j)}$ a necunoscutei $X_{jk}^{(j)}$.

Mersul iterației este următorul: În situația inițială, cu nodurile blocate, acționează la noduri solicitările exterioare $\bar{X}_j$. Deblocînd un nod, repartizăm pe $\bar{X}_j$, determinînd valorile inițiale ale solicitărilor la capetele de bare. Apoi acestea se transmit la nodurile vecine. Cantitățile transmise se adaugă la solicitările exterioare (neechilibrate) ale acestor noduri. Operațiunile se repetă deblocînd nodurile pe rînd, astfel că vom avea alternativ operațiuni de repartiție și de transmitere.

Operațiunea de repartiție, care apare în plus în cazul cînd se aleg ca necunoscute solicitările, corespunde rezolvării în fiecare treaptă a iterației a ecuațiilor de echilibru la noduri (1.5). Ecuațiile de capăt de bară (1.7) se rezolvă prin transmiteri, iar ecuațiile de nod (1.5) prin repartiții.

Corespondența între operațiunile din cele două procedee de scriere și rezolvare prin iterație a sistemului de ecuații din metoda deplasărilor (luînd ca necunoscute deplasările sau solicitările) se poate observa dacă se compară expresiile coeficienților de transmitere (2.13) și (2.16).

În operarea cu deplasările, coeficientul de transmitere de la k la j:

$$t_{k \to j}^{(\delta)} = - \frac{\nu_{jk}}{\Sigma \nu_{jj}} = - \frac{\nu_{jk}}{\nu_{jj}} \cdot \frac{\nu_{jj}}{\Sigma \nu_{jj}}$$

În operarea cu solicitările, coeficientul de transmitere de la j la k:

$$t_{j \to k}^{(X)} = + \frac{\eta_{jk}}{\eta_{kk}}$$

Din (1.4):

$$\nu_{jj} = \frac{\eta_{kk}}{\eta_{jj}\, \eta_{kk} - \eta_{jk}^2}; \quad \nu_{jk} = - \frac{\eta_{jk}}{\eta_{jj}\, \eta_{kk} - \eta_{jk}^2}$$

$$\frac{\nu_{jk}}{\nu_{jj}} = - \frac{\eta_{jk}}{\eta_{kk}} = - t_{j \to k}^{(X)}$$

Scanned with OKEN Scanner

nlocuind în expresia lui $t_{k\to j}^{(\delta)}$:

$$\frac{\nu_{jk}}{\nu_{jj}} = -\, t_{j\to k}^{(X)} \quad \text{şi} \quad \frac{\nu_{jj}}{\Sigma \nu_{jj}} = r_{jk}^{(j)},$$

se obţine :

$$\boxed{t_{k\to j}^{(\delta)} = -\, t_{j\to k}^{(X)}\, r_{jk}^{(j)}} \tag{2.19}$$

Coeficientul de transmitere de la k la j din operarea cu deplasări este egal cu produsul între coeficientul de transmitere de la j la k din operarea cu solicitări şi coeficientul de repartiţie al barei jk în j, cu semn schimbat.

O transmitere din operarea cu deplasările corespunde deci unei transmiteri şi unei repartiţii în operarea cu solicitările.

b) *În metoda eforturilor*

Considerînd cazul simplu al sistemelor avînd la fiecare nod numai cîte două bare, pentru care s-a arătat în cap. I că scrierea sistemului de ecuaţii pornind de la metoda generală a eforturilor prezintă unele avantaje pentru calcul, ecuaţia unui nod curent j este (1.8) :

$$X_i\, \eta_{ji} + X_j\, \Sigma \eta_{jj} + X_k\, \eta_{jk} = -\, \varphi_{ji}^{(j)} - \varphi_{jk}^{(j)}$$

Necunoscuta principală este forţa de legătură din nodul pentru care se scrie ecuaţia (X_j). Pusă sub forma (2.5), explicitînd necunoscuta principală, ecuaţia devine :

$$X_j = -\, \frac{\varphi_{ji}^{(j)} + \varphi_{jk}^{(j)}}{\Sigma \eta_{jj}} - \frac{\eta_{ji}}{\Sigma \eta_{jj}}\, X_i - \frac{\eta_{jk}}{\Sigma \eta_{jj}}\, X_k \tag{2.20}$$

Valoarea iniţială a necunoscutei X_j :

$$\boxed{X_j^{(1)} = -\, \frac{\varphi_{ji}^{(j)} + \varphi_{jk}^{(j)}}{\Sigma \eta_{jj}}} \tag{2.21}$$

În sistemul de bază considerat, cu continuităţile la noduri tăiate, deplasările capetelor din j ale barelor ij şi jk (fig. 12) sînt $\varphi_{ji}^{(j)}$, $\varphi_{jk}^{(j)}$. Pentru aflarea valorii iniţiale $X_j^{(1)}$ a forţei de legătură X_j, punem în ecuaţia (2.20) X_i, $X_k = 0$, deci considerăm continuităţile în i şi k rămase tăiate şi continuitatea restabilită numai în j. Se observă diferenţa faţă de metoda deplasărilor, unde se proceda invers, pornind de la o situaţie cu toate nodurile blocate şi deblocînd numai nodul j, pentru determinarea valorii iniţiale a deplasării din j.

Coeficientul de transmitere de la k la j :

$$\boxed{t_{k\to j} = -\, \frac{\eta_{jk}}{\Sigma \eta_{jj}}} \tag{2.22}$$

Coeficientul de transmitere poate fi definit aici ca forţa de legătură care apare în j în sistemul cu continuităţile tăiate în i şi k şi cu continuitatea restabilită numai în j, cînd asupra nodului k acţionează solicitarea exterioară $X_k = 1$. În adevăr, punînd în (2.20) $\varphi_{ji}^{(j)} = \varphi_{jk}^{(j)} = 0$ (barele neîncărcate), $X_i = 0$ şi $X_k = 1$, rezultă :

$$X_j = -\, \frac{\eta_{jk}}{\Sigma \eta_{jj}} = t_{k\to j}$$

Mersul operațiunilor în rezolvarea prin iterație este deci următorul: Pornind de la situația cu barele încărcate și cu legăturile la noduri tăiate, se restabilește continuitatea succesiv la cîte un nod, obținînd valorile inițiale ale necunoscutelor X_j. La corectările ulterioare ale nodurilor, se ține seama și de cantitățile transmise de la nodurile vecine. Astfel, la corectarea unui nod j, bara jk apare cu capătul k liber deplasabil și încărcat cu X_k, acționînd ca solicitare exterioară. Sub efectul lui X_k, în j va apărea forța de legătură $X_j = X_k\, t_{k \to j}$.

Se observă și în semnificația fizică a operațiunilor de transmitere și corectare a nodurilor diferența față de metoda deplasărilor: *în metoda deplasărilor se transmite de la noduri deblocate la noduri blocate, iar în metoda eforturilor se transmite de la noduri cu continuitatea tăiată la noduri cu continuitatea restabilită.*

★

Din cele de mai sus rezultă că elementele necesare în schema de transmiteri (valorile inițiale ale necunoscutelor și coeficienții de transmitere) se pot determina fără a mai fi necesar să se scrie sistemul de ecuații.

Un alt avantaj al folosirii metodei aproximațiilor succesive pe bază de schemă de transmiteri apare din faptul că prin efectuarea operațiunilor de transmiteri avem mereu în față fenomenul fizic, putînd urmări propagarea din aproape în aproape a deplasărilor și solicitărilor în interiorul unui sistem. Intr-adevăr, operațiunea de transmitere în rezolvarea sistemului de ecuații reprezintă, după cum am arătat, înlocuirea valorii unei necunoscute x_k, calculată din ecuația (k), unde ea este necunoscuta principală, într-o altă ecuație (j), deci considerarea efectului necunoscutei x_k asupra necunoscutei x_j. Deci prin transmiterea de la k la j se propagă efectul solicitării sau deplasării din k asupra celei din j. În modul acesta, calculul se depărtează cu totul ca aspect de rezolvarea unui sistem de ecuații, căpătînd un caracter intuitiv și rămînînd tot timpul legat de fenomenul fizic, fiecare termen sau operațiune din calcul avînd o semnificație fizică ușor de urmărit.

Însumarea la terminarea iterației a valorilor din coloanele din dreptul nodurilor reprezintă o însumare de efecte produse în nod din acțiunea directă a solicitării exterioare a nodului și din transmiteri de la celelalte noduri, deci o suprapunere de efecte.

C. SERIA TERMENILOR ITERAȚIEI ȘI CONVERGENȚA EI

I. Seria termenilor iterației

După cum s-a arătat, organizarea operațiunilor din metoda iterației pe o schemă de transmiteri presupune folosirea operării cu corecțiile (Δx); termenii iterației sînt în acest caz pentru fiecare necunoscută termenii unei serii a cărei sumă reprezintă valoarea finală a necunoscutei respective. Pentru ca aplicarea metodei iterației să conducă la rezultat, este necesar ca seria termenilor iterației să fie convergentă.

În cele ce urmează vom stabili natura acestei serii. Cunoașterea ei este pe de o parte necesară pentru găsirea condiției de convergență, iar pe de altă parte, cunoscînd natura seriei, se poate calcula în unele cazuri mai simple direct suma ei, respectiv valoarea necunoscutei, fără a mai fi necesară efectuarea iterației.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm un sistem de ecuații având termen liber diferit de zero numai la ecuația de ordinul j. În fig. 29 s-a reprezentat o porțiune din schema de transmiteri, cuprinzînd nodul j și nodurile k vecine (legate direct prin transmiteri de j). Valoarea inițială a necunoscutei x_j va fi (2.6) :

$$x_j^{(1)} = \frac{a_{j0}}{a_{jj}} = b_{j0}$$

Pentru a pune în evidență seria termenilor iterației din nodul j, adoptăm următoarea ordine de corectare a nodurilor : se fac transmiterile de la j la toate nodurile vecine k, apoi se corectează nodurile k și restul nodurilor, făcînd transmiterile între ele, dar fără a transmite înapoi la j, pînă cînd cantitățile de transmis tind la zero, deci pînă cînd toate nodurile afară de j se corectează complet ; după aceasta se fac din nodurile k transmiterile spre j, obținîndu-se prima corecție $\Delta x_j^{(1)}$ a lui x_j. Calculul se repetă în aceeași ordine în fiecare treaptă de calcul, ducînd pentru fiecare corecție a lui x_j iterația pînă la sfîrșit în restul sistemului. Vom avea atunci, în prima treaptă de calcul :

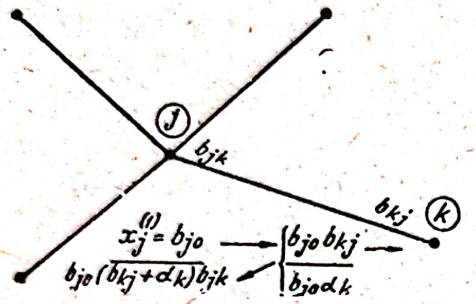


Fig. 29

$$x_k^{(1)} = x_j^{(1)} b_{jk} = b_{j0} b_{kj}$$

Corectînd tot sistemul afară de nodul j, se acumulează la fiecare nod k un grup de cantități transmise din restul sistemului, a căror sumă se poate nota cu $b_{j0}\,\alpha_k$, fiind proporțională cu b_{j0}. Factorul α_k este funcție de toți coeficienții de transmitere din schemă și independent de b_{j0}, expresia lui fiind formată din sume și produse de coeficienți de transmitere.

Cantitățile transmise înapoi spre j și care constituie prima corecție a lui x_j :

$$\Delta x_j^{(1)} = \sum_k b_{j0}\,(b_{jk} + \alpha_k)\,b_{jk} = b_{j0} \sum_k (b_{jk} + \alpha_k)\,b_{jk} = b_{j0}\,r$$

unde

$$r = \sum_k (b_{jk} + \alpha_k)\,b_{jk}$$

În treapta a doua de calcul vom obține în același mod :

$$\Delta x_j^{(2)} = \Delta x_j^{(1)}\,r = x_j^{(1)}\,r^2$$

Deci *seria termenilor iterației este o progresie geometrică având rația* r.

$$x_j = x_j^{(1)} + \Delta x_j^{(1)} + \Delta x_j^{(2)} + \ldots = x_j^{(1)} \frac{1}{1-r} = \frac{b_{j0}}{1-r}$$

Pentru a găsi valoarea rației, este suficient să se compare expresia de mai sus a lui x_j cu cea care se obține cu ajutorul determinanților.

$$x_j = \frac{b_{j0}}{1-r} = \frac{b_{j0}\,d_j}{D}$$

unde :

$$D \text{ (determinantul sistemului)} = \begin{vmatrix} 1 & -b_{12} & -b_{13} \dots & -b_{1j} \dots & -b_{1n} \\ -b_{21} & 1 & -b_{23} \dots & -b_{2j} \dots & -b_{2n} \\ -b_{31} & -b_{32} & 1 \dots & -b_{3j} \dots & -b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{n1} & -b_{n2} & -b_{n3} \dots & -b_{nj} \dots & 1 \end{vmatrix}$$

iar d_j = minorul principal corespunzător lui b_{j0}, care se obține din D suprimînd linia și coloana j.

$$\frac{1}{1-r} = \frac{d_j}{D} \cdot \text{ Rezultă : } \qquad \boxed{r = 1 - \frac{D}{d_j}} \qquad (2.22)$$

Demonstrația de mai sus poate fi făcută și pe altă cale, folosind de la început determinanții. Transmiterea valorii inițiale b_{j0} a necunoscutei x_j la nodurile k și în restul sistemului și corectarea întregului sistem în afară de nodul j, reprezintă înlocuirea necunoscutei x_j în toate ecuațiile în afară de cea unde este necunoscută principală, cu valoarea ei b_{j0}. În modul acesta sistemul de n ecuații se reduce la un sistem de $n-1$ ecuații, dispărînd ecuația j și necunoscuta x_j, pentru care s-a introdus o valoare cunoscută în primă aproximație b_{j0}. În ecuațiile rămase, termenii în x_j devin termeni liberi, cuprinzînd în loc de x_j pe b_{j0}. Astfel, termenul liber al ecuației k va fi b_{j0} multiplicat cu coeficientul de transmitere de la j la k :

$$b_{k0} = b_{j0}\, b_{kj}$$

Corectarea completă a ecuațiilor minus ecuația j reprezintă rezolvarea sistemului de $n-1$ ecuații prin iterație. Notînd cu x_k una din necunoscutele acestui sistem și cu x_m restul necunoscutelor, vom avea ca rezultat pentru x_k :

$$x_k = b_{k0} \frac{d_{kk}}{D_{n-1}} + \sum_m b_{m0} \frac{d_{km}}{D_{n-1}}$$

unde : D_{n-1} = determinantul sistemului de $n-1$ ecuații, care este chiar d_j din relația (2.19)
d_{kk} = minorul corespunzător lui b_{k0}
d_{km} = minorul corespunzător lui b_{m0}
Înlocuind $D_{n-1} = d_j$, $b_{k0} = b_{j0}\, b_{kj}$, $b_{m0} = b_{j0}\, b_{mj}$, expresia lui x_k devine :

$$x_k = b_{j0}\, b_{kj} \frac{d_{kk}}{d_j} + \sum_m b_{j0}\, b_{mj} \frac{d_{km}}{d_j}$$

Transmițînd înapoi spre j :

$$\Delta x_j^{(1)} = \sum_k x_k\, b_{jk} = \frac{b_{j0}}{d_j} \sum_k b_{jk} \left(b_{kj}\, d_{kk} + \sum_m b_{mj}\, d_{km}\right)$$

se observă că :

$$\sum_k b_{jk} \left(b_{kj}\, d_{kk} + \sum_m b_{mj}\, d_{km}\right) = -\sum_{k \neq j} d_k = -(D - d_j)$$

(cu d_k s-a notat minorul care se obține în sistemul de n ecuații suprimînd coloana j și rîndul k).

Deci :

$$\Delta x_j^{(1)} = \frac{b_{j0}}{b_j} (d_j - D)$$

$$\text{Rația } \quad r = \frac{d_j - D}{d_j} = 1 - \frac{D}{d_j}$$

(același rezultat)

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în toate ecuațiile avem termeni liberi diferiți de zero, expresia fiecărei necunoscute va rezulta, prin suprapunerea efectelor, ca o sumă de progresii geometrice de felul celei de mai sus.

Pentru exemplificare, vom determina rația progresiei geometrice pentru cazurile a 2 ecuații și 3 ecuații, folosind ordinea de corectare a nodurilor din fig. 29.

a) *Cazul a 2 ecuații cu 2 necunoscute*

Sistemul :

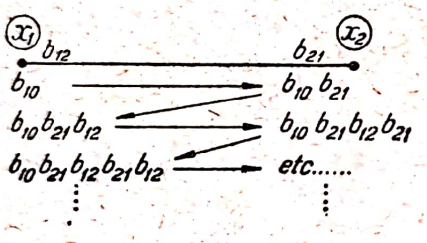
$$(1)\quad a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = a_{10}$$

$$(2)\quad a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = 0$$

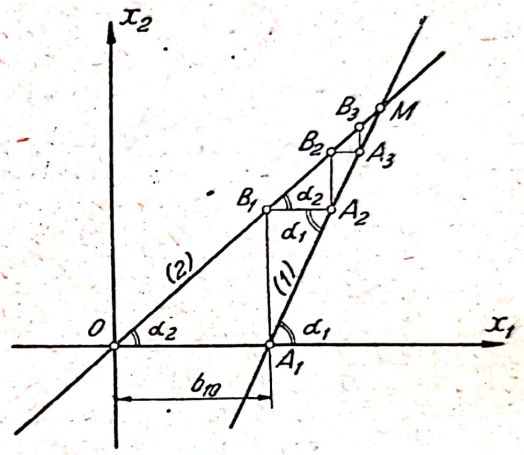
are termen liber diferit de zero numai în ecuația (1). Pus în forma pentru rezolvarea prin iterație, devine :

$$x_1 = \frac{a_{10}}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\,x_2 = b_{10} + b_{12}\,x_2$$

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}\,x_1 = b_{21}\,x_1$$



(a)



(b)

Fig. 30

Coeficienții de transmitere sînt b_{12} și b_{21}. Calculul este arătat pe schema fig. 30a. Se observă că rația progresiei este $b_{21}\,b_{12}$. Însumînd termenii progresiei, rezultă :

$$x_1 = \frac{b_{10}}{1-r} = \frac{b_{10}}{1 - b_{21}b_{12}}\,;\quad x_2 = \frac{b_{10}\,b_{21}}{1-r} = \frac{b_{10}\,b_{21}}{1 - b_{21}\,b_{12}}$$

Determinantul sistemului, pus sub forma :

$$x_1 \quad - b_{12}\,x_2 = b_{10}$$

$$-\,b_{21}x_1 + x_2 \quad = 0$$

va fi :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\,b_{12} \\ -\,b_{21} & 1 \end{vmatrix} = 1 - b_{21}\,b_{12}$$

Determinantul minor corespunzător lui b_{10} :

$$d_1 = 1$$

$$r = 1 - \frac{D}{d_1} = 1 - (1 - b_{21}\,b_{12}) = b_{21}\,b_{12}$$

deci relația (2.22) se verifică.

Scanned with OKEN Scanner

La același rezultat se poate ajunge și cu ajutorul reprezentării grafice (fig. 30 b). Dreapta (*1*) reprezintă ecuația (1), cu termen liber diferit de zero, iar dreapta (*2*), care trece prin origină, ecuația (2), cu termen liber egal cu zero. Coeficienții unghiulari ai celor două drepte sînt α_1, α_2. Mersul iterației este : A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 ... M.

$$x_1^{(1)} = b_{10} = OA_1$$

$$x_2^{(1)} = A_1 B_1 = OA_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = x_1^{(1)} \operatorname{tg} \alpha_2$$

$$\Delta x_1^{(1)} = B_1 A_2 = A_1 B_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 = x_2^{(1)} \operatorname{cotg} \alpha_1 = x_1^{(1)} \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{cotg} \alpha_1$$

$$\Delta x_2^{(1)} = A_2 B_2 = B_1 A_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = x_2^{(1)} \operatorname{cotg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2, \quad \text{etc.}$$

Rația este deci $\operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{cotg} \alpha_1 = b_{12} b_{21}$.

b) *Cazul a 3 ecuații cu 3 necunoscute*

Sistemul :

(1) $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = a_{10}$
(2) $a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = 0$
(3) $a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = 0$

are termen liber diferit de zero numai în ecuația (1). Pus în forma pentru rezolvarea prin iterație, devine :

$$x_1 = b_{10} + b_{12} x_2 + b_{13} x_3$$
$$x_2 = b_{21} x_1 + b_{23} x_3$$
$$x_3 = b_{31} x_1 + b_{32} x_2$$

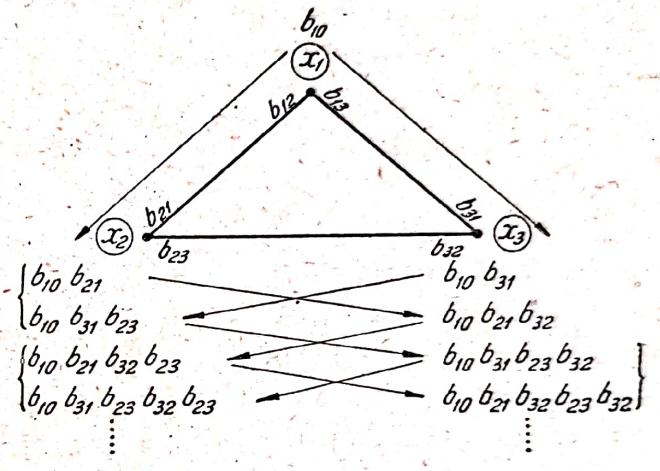


Fig. 31

Schema de transmiteri și mersul calculului în prima treaptă a iterației sînt arătate în fig. 31. Valoarea inițială a lui x_1 :

$$x_1^{(1)} = b_{10}$$

se transmite la x_2 și x_3. Apoi se corectează simultan x_2 și x_3, fără a transmite înapoi la x_1, pînă cînd cantitățile transmise între x_2 și x_3 tind la zero.

Termenii din coloana de la nodul x_2 formează o progresie geometrică avînd primul termen $b_{10} b_{21} + b_{10} b_{31} b_{23}$ și rația $b_{32} b_{23}$, deci :

$$x_2 = b_{10} (b_{21} + b_{31} b_{23}) \frac{1}{1 - b_{23} b_{32}}$$

analog :

$$x_3 = b_{10} (b_{31} + b_{21} b_{32}) \frac{1}{1 - b_{23} b_{32}}$$

Aceste valori se transmit înapoi la x_1. Prima corecție a lui x_1 va fi :

$$\Delta x_1^{(1)} = x_2 b_{12} + x_3 b_{13} = \frac{b_{10}}{1 - b_{23} b_{32}} [b_{12} (b_{21} + b_{31} b_{23}) + b_{13} (b_{31} + b_{21} b_{32})]$$

$$\Delta x_1^{(1)} = \frac{b_{10}}{1 - b_{23} b_{32}} [b_{12} b_{21} + b_{13} b_{31} + b_{12} b_{31} b_{23} + b_{13} b_{21} b_{32}]$$

Scanned with OKEN Scanner

Rația progresiei geometrice :

$$r = \frac{b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31} + b_{12}b_{31}b_{23} + b_{13}b_{21}b_{32}}{1 - b_{23}\,b_{32}}$$

Determinantul sistemului de ecuații, pus sub forma :

$$\begin{aligned} x_1 \quad &- b_{12}x_2 - b_{13}\,x_3 = b_{10} \\ -\,b_{21}x_1 + x_2 \quad &- b_{23}\,x_3 = 0 \\ -\,b_{31}x_1 - b_{32}x_2 + x_3 \quad &= 0 \end{aligned}$$

va fi :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{21} & 1 & -b_{23} \\ -b_{31} & -b_{32} & 1 \end{vmatrix} = 1 - b_{12}\,b_{23}\,b_{31} - b_{13}\,b_{32}\,b_{21} - \\ - b_{12}\,b_{21} - b_{13}\,b_{31} - b_{23}\,b_{32}$$

Determinantul minor corespunzător lui b_{10} :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & -b_{23} \\ -b_{32} & 1 \end{vmatrix} = 1 - b_{23}\,b_{32}$$

$$d_1 - D = 1 - b_{23}\,b_{32} - 1 + b_{12}\,b_{23}\,b_{31} + b_{13}\,b_{32}\,b_{21} + b_{12}\,b_{21} + \\ + b_{13}\,b_{31} + b_{23}\,b_{32} = b_{12}\,b_{23}\,b_{31} + b_{13}\,b_{32}\,b_{21} + b_{12}b_{21} + b_{13}\,b_{31}$$

$$\frac{d_1 - D}{d_1} = \frac{b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}\,b_{32}\,b_{21} + b_{12}b_{21} + b_{13}\,b_{31}}{1 - b_{23}\,b_{32}} = r$$

deci relația

$$r = \frac{d_1 - D}{d_1} = 1 - \frac{D}{d_1} \quad \text{se verifică.}$$

Faptul că seria termenilor iterației (în cazul cînd într-o singură ecuație a sistemului termenul liber este diferit de zero) este o progresie geometrică permite stabilirea condiției de convergență a iterației sub o formă foarte simplă : $|r| < 1$, ajungîndu-se, dacă se înlocuiește rația progresiei cu expresia ei în funcție de D și d_1, la o condiție pe care trebuie să o îndeplinească determinanții D și d_1.

De asemenea, în unele cazuri simple de sisteme de ecuații, unde rația progresiei geometrice poate fi identificată din primele 2—3 trepte de calcul, valorile necunoscutelor se pot calcula direct prin însumarea progresiei, fără a mai fi necesar să se continue iterația. Această posibilitate devine deosebit de avantajoasă atunci cînd convergența iterației este mai înceată și pentru a ajunge la rezultate este nevoie de un număr mare de trepte de calcul, care se economisesc prin însumarea directă a progresiei.

În cazul sistemelor static nedeterminate formate din bare, procedeul însumărilor de progresii geometrice se aplică avantajos cînd numărul de noduri nu este prea mare (3—4) și în special la sisteme deschise (a căror schemă nu formează contururi închise) : grinzi continue, cadre deschise etc. În cap. IV (exemplele nr. 11 și 12) sînt tratate aplicații ale acestui procedeu la

Scanned with OKEN Scanner

cadre cu noduri fixe şi grinzi continue. Aplicaţii asemănătoare se mai găsesc în lucrările prof. *Cristea Mateescu* (v. bibl. 46), prof. *P. Mazilu* (v. bibl. 47), *Klouček* (v. bibl. 41) ş. a.

II. Convergenţa iteraţiei

a) *Condiţia de convergenţă*

S-a arătat mai înainte că într-un sistem de ecuaţii liniare, necunoscutele putîndu-se exprima ca funcţii liniare de termenii liberi (2.7), se poate vorbi de o independenţă (suprapunere) a efectelor termenilor liberi asupra valorilor necunoscutelor. În consecinţă, ordinea în care se introduc în rezolvarea prin iteraţie a sistemului de ecuaţii termenii liberi nu influenţează asupra rezultatelor. Rezultă totodată că nici *convergenţa seriei termenilor iteraţiei nu va depinde de valorile termenilor liberi, ci numai de cele ale coeficienţilor de transmitere, respectiv de forma matricei* :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Condiţia de convergenţă a iteraţiei va fi deci o condiţie impusă aceste matrice.

Criteriile generale de convergenţă a iteraţiei, pentru fiecare din cele două metode de conducere a calculului (rezolvarea simultană sau succesivă a ecuaţiilor), au fost date de *R. v. Mises* şi *H. Pollaczek-Geiringer* (v. bibl. 76). Pentru iteraţia după metoda Gauss, condiţia de convergenţă este îndeplinită (v. şi bibl. 55) dacă *toate rădăcinile* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *ale ecuaţiei* :

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\lambda & a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\lambda \ldots a_{3n} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

au modulul mai mic decît 1.

Pentru verificarea pe această cale a convergenţei iteraţiei într-un caz numeric, este deci necesar să se rezolve ecuaţia $f(\lambda) = 0$, operaţiune care comportă dezvoltarea unui determinant de ordinul n şi apoi rezolvarea ecuaţiei care rezultă şi care este de forma :

$$f(\lambda) = A_0 \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + A_2 \lambda^{n-2} + \ldots + A_{n-1} \lambda + A_n = 0$$

Astfel de operaţiuni sînt destul de laborioase, mai ales cînd numărul de ecuaţii al sistemului este mai mare. În orice caz, se presupune scrierea sistemului de ecuaţii, adică tocmai ceea ce se evită prin utilizarea schemei de transmiteri, în cazurile cînd termenii din ecuaţii au o anumită semnificaţie fizică.

În operarea pe schemă de transmiteri, verificarea convergenţei se poate face practic numai pe bază de condiţii puse coeficienţilor de transmitere b_{jk}. O primă indicaţie asupra convergenţei o dau valorile acestor coeficienţi : cu cît ei vor fi mai mici, cu atît corecţiile se localizează, transmiţîn-

du-se în mai mică măsură de la un nod la altul. Convergența maximă ar corespunde unor coeficienți de transmitere tinzînd la zero, adică unui determinant de forma :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (2.23)$$

În acest caz valoarea fiecărei necunoscute s-ar calcula din ecuația respectivă, unde este necunoscută principală, în funcție de termenul liber, fără să mai existe vreo dependență între ecuații, deci fără să mai fie necesară iterația.

O condiție suficientă ca seria termenilor iterației să fie divergentă este ca toți coeficienții de transmitere să fie supraunitari. Atunci prin fiecare operațiune de transmitere se amplifică valorile corecțiilor, deci divergența este evidentă. Condiția nu este necesară, iterația putînd rămîne divergentă și dacă unii dintre coeficienții de transmitere, sau chiar toți, au valori subunitare. Deci, condiția ca toți coeficienții de transmitere să fie subunitari nu poate constitui un criteriu de convergență.

Pentru ca valorile $b_{jk} = -\frac{a_{jk}}{a_{jj}}$ să fie subunitare, trebuie ca în fiecare ecuație coeficientul cel mai mare să fie cel al necunoscutei principale (a_{jj}). În consecință, pentru rezolvarea prin iterație a unui sistem de ecuații, va trebui să aranjăm în prealabil ecuațiile într-o ordine astfel ca în fiecare ecuație să avem $| a_{jj} | > | a_{jk} |$. Nu totdeauna este posibil un astfel de aranjament, însă în orice caz există totdeauna o ordine optimă, în care condiția $a_{jj} | > | a_{jk} |$ să fie satis făcută într-un număr cît mai mare de ecuații.

b) *Criteriul lui Wittmeyer*

După *Wittmeyer* (v. bibl. 78, 24, 76), condiția de convergență a seriei termenilor iterației este ca în fiecare ecuație a sistemului :

$$a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + \dots + a_{jj} x_j + \dots + a_{jn} x_n = a_{j0}$$

să fie satisfăcută inegalitatea :

$$| a_{jj} | > | a_{j1} | + | a_{j2} | + \dots + | a_{jn} | = \sum_{k \neq j} | a_{jk} | \qquad (2.24)$$

(*în fiecare ecuație, coeficientul necunoscutei de pe diagonala principală, în valoare absolută, trebuie să fie mai mare decît suma valorilor absolute ale coeficienților celorlalte necunoscute din ecuație*).

Împărțind ambii termeni ai inegalității cu a_{jj}, rezultă :

$$\boxed{| 1 | > \sum_{k \neq j} | b_{jk} |} \qquad (2.25)$$

Transpusă pe schema de transmiteri, condiția sub forma (2.25) se poate deci enunța astfel : *la fiecare nod, suma valorilor absolute ale coeficienților de transmitere spre nod trebuie să fie mai mică decît* 1.

Scanned with OKEN Scanner

Criteriul de convergență al lui Wittmeyer poate fi demonstrat în modul următor (după *E. Melan*, v. bibl. 50):

Sistemul de ecuații se pune sub forma obișnuită (2.5) pentru rezolvarea prin metoda iterației:

$$x_j = b_{j0} + \sum_k b_{jk}\, x_k \qquad (k \neq j)$$

Rezolvînd ecuațiile simultan în fiecare treaptă a iterației (metoda Gauss), avem în treapta z:

$$x_j^{(z)} = \sum_k b_{jk}\, x_k^{(z-1)} + b_{j0}$$

Eroarea față de valoarea exactă a lui x_j, după treapta z:

$$e_j^{(z)} = x_j - x_j^{(z)} = \sum_k b_{jk}\, x_k - \sum_k b_{jk}\, x_k^{(z-1)} = \sum_k b_{jk}\, e_k^{(z-1)}$$

Condiția de convergență:

$$\lim_{z \to \infty} e_j^{(z)} = 0$$

Eroarea valorii inițiale $x_j^{(1)}$:

$$e_j^{(1)} = x_j - x_j^{(1)}$$

Eroarea după treapta 2 de calcul:

$$e_j^{(2)} = \sum_k b_{jk}\, e_k^{(1)}$$

La fel, după treapta 3 de calcul:

$$e_j^{(3)} = \sum_k b_{jk}\, e_k^{(2)}$$

Dar $e_k^{(2)} = \sum_l b_{kl}\, e_l^{(1)}$, unde cu l s-au notat celelalte ecuații ale sistemului ($l \neq k$). Înlocuind pe $e_k^{(2)}$ cu valoarea lui în expresia lui $e_j^{(3)}$, avem:

$$e_j^{(3)} = \sum_k b_{jk} \sum_l b_{kl}\, e_l^{(1)}$$

sau, schimbînd sumele:

$$e_j^{(3)} = \sum_k \sum_l b_{jk}\, b_{kl}\, e_l^{(1)}$$

Notăm:

$$\sum_k b_{jk}\, b_{kl} = b_{jl}^{(3)}$$

$$e_j^{(3)} = \sum_l b_{jl}^{(3)}\, e_l^{(1)}$$

În felul acesta obținem eroarea după treapta a treia în funcție de eroarea din prima treaptă (eroarea valorii inițiale $x^{(1)}$).

După treapta 4 de calcul se obține în mod analog $e_j^{(4)}$ în funcție de $e_l^{(1)}$:

$$e_j^{(4)} = \sum_k a_{jk}\, e_k^{(3)}, \quad \text{unde } e_k^{(3)} = \sum_l b_{kl}^{(3)}\, e_l^{(1)}$$

$$e_j^{(4)} = \sum_k b_{jk} \sum_l b_{kl}^{(3)}\, e_l^{(1)} = \sum_k \sum_l b_{jk}\, b_{kl}^{(3)}\, e_l^{(1)}$$

Scanned with OKEN Scanner

- Notăm :

$$\sum_k b_{jk}\, b_{kl}^{(3)} = b_{jl}^{(4)}$$

$$e_j^{(4)} = \sum_l b_{jl}^{(4)}\, e_l^{(1)}$$

După treapta z, expresia erorii $e_j^{(z)}$ a necunoscutei x_j în funcție de eroarea valorii inițiale a unei alte necunoscute x_k va fi :

$$e_j^{(z)} = \sum_k b_{jk}^{(z)}\, e_k^{(1)}$$

unde :

$$b_{jk}^{(z)} = \sum_l b_{jl}\, b_{lk}^{(z-1)}$$

Condiția de convergență : $\lim\limits_{z \to \infty} e_j^{(z)} = 0$

Să notăm acum cu $b_{lk}^{\prime(z-1)}$ cel mai mare în valoare absolută dintre $b_{lk}^{(z-1)}$ $(l = 1 \ldots n)$. Vom avea :

$$b_{jk}^{(z)} = \sum_l b_{jl}\, b_{lk}^{(z-1)} < \sum_l b_{jl}\, b_{lk}^{\prime(z-1)} = S_j\, b_{lk}^{\prime(z-1)}$$

unde :

$$S_j = \sum_l |\, b_{jl}\,|$$

În același mod :

$$b_{lk}^{\prime(z-1)} = \sum_m b_{lm}^{\prime(z-2)} < \sum b_{lm}^{\prime}\, b_{mk}^{\prime(z-2)} = S_l^{\prime} b_{mk}^{\prime(z-2)}$$

unde $b_{mk}^{\prime(z-2)}$ este din nou cel mai mare dintre $b_{mk}^{(z-2)}$ $(m = 1 \ldots n)$. Cu atît mai mult :

$$b_{jk}^{(z)} < b_{mk}^{(z-2)}\, S_j\, S_l^{\prime}$$

Repetînd operațiunile pînă la treapta 1 de calcul, găsim :

$$b_{jk}^{(z)} < b_{pk}\, S_j\, S_l^{\prime} \ldots$$

Dacă în fiecare ecuație $S_j = \sum |\, b_{jk}\,| < 1$, $b_{jk}^{(z)}$ va tinde la zero pentru $z \to \infty$. Atunci :

$$\lim_{z \to \infty} e_j^{(z)} = \lim \sum_k b_{jk}^{(z)}\, e_k^{(1)} = 0$$

Deci criterul de convergență este satisfăcut dacă în fiecare ecuație suma valorilor absolute ale coeficienților b_{jk} este mai mică decît 1.

Criteriul de convergență al lui Wittmeyer este suficient, dar nu și necesar. Faptul că nu este necesar se observă și din modul cum se deduce, pe bază de inegalități. De asemenea, se observă că în expresia finală a lui $b_{jk}^{(z)}$ apare un produs de termeni S_j. Dacă în toate ecuațiile $S_j < 1$, $b_{jk}^{(z)}$ tinde la zero pentru $z \to \infty$; însă această condiție este numai suficientă, fără a fi necesară, deoarece produsul termenilor S_j poate tinde la zero chiar dacă în unele ecuații $S_j > 1$, dacă în schimb în celelalte ecuații S_j sînt foarte mici, astfel că acoperă prin convergența pe care o dau iterației divergența introdusă de ecuațiile cu $S_j > 1$.

Caracterul de condiție suficientă, dar nu și necesară, a criteriului lui Wittmeyer apare și din faptul că în loc de o condiție unică pentru matricea

Scanned with OKEN Scanner

sistemului, apare cîte o condiție pentru fiecare ecuație. Dacă într-o ecuație criteriul nu este satisfăcut, înseamnă că pe schemă coeficienții de transmitere spre nodul respectiv sînt prea mari și deci prin transmiterea spre acel nod erorile ar crește. Totuși, dacă în schimb în celelalte ecuații $\Sigma \mid b_{jk} \mid$ sînt mult mai mici decît 1, prin transmiterea înapoi în restul sistemului erorile descresc mult, compensînd și creșterea înregistrată prin transmiterea spre nodul cu $\Sigma \mid b_{jk} \mid > 1$, astfel că la sfîrșitul treptei de calcul erorile pot ajunge totuși mai mici decît după treapta de calcul precedentă.

De pildă, sistemul de ecuații folosit de noi la începutul acestui capitol, în exemplele nr. 1—4, a cărui rezolvare prin iterație a condus la rezultate cu aproximații de ordinul a 1% după un număr de trepte de calcul variabil, în funcție de ordinea de calcul folosită, între 4 și 9, nu satisface criteriul de convergență al lui Wittmeyer. Sumele valorilor absolute ale coeficienților de transmitere în cele 4 ecuații erau (v. exemplul nr. 1) :

$$(1) \quad 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}8 < 1$$
$$(2) \quad 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}8 < 1$$
$$(3) \quad 0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}2 = 1{,}2 > 1$$
$$(4) \quad 0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1{,}0$$

Într-un singur caz limita convergenței după criteriul lui Wittmeyer concordă riguros cu cea obținută cu ajutorul rădăcinilor ecuației $f(\lambda) = 0$ și anume în cazul cînd în toate ecuațiile :

$$\sum \mid b_{jk} \mid = 1 \tag{2.26}$$

Atunci inegalitățile pe baza cărora este dedus criteriul devin egalități și condiția nu mai este acoperitoare. În adevăr, un sistem de ecuații, în care în fiecare ecuație coeficienții satisfac relația (2.26), se găsește la limita dintre convergență și divergență, corecțiile în metoda iterației rămînînd aceleași în toate treptele de calcul.

În cazul cînd condiția (2.24) nu este îndeplinită, este totuși suficient ca o altă normă a matricei să fie mai mică decît 1 :

$$\sum \mid b_{jk} \mid^2 < 1$$

pentru ca iterația să fie convergentă (v. *Fadeev*, bibl. 24).

c) *Folosirea rației progresiei geometrice*

Pornind de la proprietatea demonstrată mai înainte că seria termenilor iterației este o progresie geometrică, condiția de convergență se reduce la condiția ca rația progresiei să fie în valoare absolută mai mică decît 1.

$$\mid r_j \mid = \mid 1 - \frac{D}{d_j} \mid < 1$$

Pentru $r_j = +1$ rezultă $\frac{D}{d_j} = 0 \quad \therefore \quad D = 0$

Pentru $r_j = -1$ rezultă $\frac{D}{d_j} = 2$

Deci condiția de convergență va fi :

$$\boxed{0 < \frac{D}{d_j} < 2} \tag{2.27}$$

La stabilirea relației (2.22) s-a considerat că la fiecare corectare a ecuației j se corectează complet restul ecuațiilor. Deci relația (2.22) determină numai rația progresiei geometrice formate din corecțiile succesive ale necunoscutei x_j, iar condiția (2.27) se referă la această progresie. Pentru ca iterația să fie convergentă, trebuie însă ca și în sistemul de $n-1$ ecuații care se corectează la fiecare corectare a ecuației j să fie satisfăcută aceeași condiție și la fel, din aproape în aproape, în sistemele de $n-2$, $n-3 \ldots 1$ ecuații.

Dacă notăm cu $D^{(n-1)} = d_j$, $D^{(n-2)} = d_k^{(n-1)}$ etc. determinanții principali și minorii principali ai sistemelor de $n-1$, $n-2 \ldots 1$ ecuații, condiția (2.27) devine :

$$\boxed{0 < \frac{D^{(m)}}{d_k^{(m)}} = \frac{d_j^{(m+1)}}{d_k^{(m)}} < 2} \quad (m = n-1,\ n-2 \ldots 1) \tag{2.28}$$

Convergența maximă posibilă ar corespunde cazului $r_j = 0$, cînd valoarea inițială aleasă pentru necunoscuta x_j este chiar egală cu valoarea exactă și iterația se limitează la prima treaptă de calcul. Atunci vom avea :

$$\frac{D^{(m)}}{d_k^{(m)}} = 1 - r^{(m)} = 1$$

Aceasta presupune un sistem de forma (2.23), în care $D = 1$ și toți minorii principali $d_k^{(m)} = 1$.

Limita superioară a convergenței ($r = +1$) corespunde la $D = 0$ (cazul nedeterminării). Acest caz se situează la limita de convergență și după criteriul pe baza rădăcinilor ecuației $f(\lambda) = 0$. Într-adevăr, dezvoltarea determinantului D reprezintă expresia $f(\lambda)$ în care s-a pus $\lambda = +1$ [$D = f(1)$], deci dacă $D = 0$, înseamnă că una din rădăcinile ecuației $f(\lambda) = 0$ este egală cu 1.

Din cele de mai sus rezultă că din considerarea progresiei geometrice a termenilor iterației se pot trage următoarele concluzii asupra convergenței :

1) Verificarea convergenței iterației în cazul general al unui sistem oarecare de ecuații, cu ajutorul relației (2.28) apare cel puțin tot atît de laborioasă ca și cea pe baza rădăcinilor ecuației $f(\lambda) = 0$, deci nu ar prezenta un interes deosebit. *Dacă însă se poate demonstra pentru un sistem anumit de ecuații că rația progresiei geometrice este pentru toți termenii liberi pozitivă, atunci raportul* $\frac{D^{(m)}}{d^{(m)}} = 1 - r \leqslant 1$ *și condiția de convergență se reduce la* $\frac{D^{(m)}}{d_k^{(m)}} > 0$, *care este îndeplinită dacă* $D^{(m)}$ și $d_k^{(m)}$ sînt de același semn [de exemplu $D^{(m)}, d_k^{(m)} > 0$].

2) Sub forma $D^{(m)}, d_k^{(m)} > 0$ (determinantul principal și toți minorii principali pozitivi), verificarea condiției de convergență încă ar presupune

calcule destul de laborioase. *Dacă însă se poate demonstra pentru o anumită categorie de sisteme de ecuații că totdeauna* $D^{(m)}$, $d_k^{(m)} > 0$, *implicit rezultă și convergența iterației asigurată.*

3) Pentru a pune în evidență natura seriei termenilor din iterație, s-a adoptat (fig. 29 și 31) o anumită ordine de corectare a ecuațiilor, care nu poate fi cea mai avantajoasă pentru rapiditatea convergenței. Prin faptul că se izolează cîte o ecuație, care se corectează o singură dată pentru o corectare completă a restului ecuațiilor în fiecare treaptă de calcul, convergența progresiei la fiecare nod condiționează convergența iterației în întregul sistem, fiind suficient să avem la un singur nod $| r_j | > 1$, pentru ca erorile să nu mai conveargă. Din această cauză, în loc să se ajungă la o condiție unică pusă matricei sistemului, rezultă cîte o condiție pentru fiecare determinant minor.

În realitate, organizînd calculul pe o schemă de transmiteri, se poate urmări totdeauna o ordine de corectare a ecuațiilor mai avantajoasă. Corectînd nodurile ca în fig. 26, în ordinea de la nodul unde cantitatea de corectat este cea mai mare, se obține rapiditatea maximă a convergenței. În acest caz însă, la fiecare treaptă de calcul nodurile se corectează în altă ordine, astfel că nu mai poate fi vorba de o lege de recurență între termenii iterației și în consecință nici de un criteriu teoretic de convergență. În orice caz, dacă relația (2.28) este satisfăcută, cu atît mai mult va fi asigurată convergența într-o ordine mai avantajoasă de corectare a nodurilor.

III. Rapiditatea convergenței

Pentru aplicarea practică a metodei iterației ne interesează și rapiditatea convergenței iterației, respectiv numărul de trepte de calcul necesar pentru a ajunge la aproximația dorită. Cînd acesta rezultă prea mare, metoda își pierde avantajele.

Dacă se corectează ecuațiile simultan (metoda Gauss) sau succesiv, dar în aceeași ordine în toate treptele de calcul (metoda Seidel), se poate da o expresie algebrică pentru rapiditatea convergenței, cu ajutorul calculului matricial (v. *C. C. Popovici*, bibl. 55).

O primă indicație asupra rapidității convergenței o dau tot coeficienții de transmitere. Cu cît suma valorilor absolute ale coeficienților de transmitere către un nod $\sum_k | b_{jk} |$ este mai mică decît 1, convergența va fi mai rapidă. Cînd criteriul lui Wittmeyer este satisfăcut în toate ecuațiile, putem totdeauna conta pe o rapiditate suficientă a convergenței.

Uneori, în cazul sistemelor static nedeterminate formate din bare, se întîmplă ca unul sau mai mulți dintre coeficienții de transmitere să fie supraunitari. De obicei însă, dacă $| b_{jk} | > 1$, în schimb $| b_{kj} |$ este foarte mic, produsul $| b_{jk}\ b_{kj} |$ rămînînd mai mic decît 1, încît convergența rezultă totuși de obicei suficient de rapidă. De aceea, ca indicație se poate folosi și relația de verificare:

$$\sum_k | b_{jk}\ b_{kj} | < 1 \qquad (2.29)$$

(la fiecare nod, suma valorilor absolute ale produselor între coeficienții de transmitere spre nod și cei corespunzători de transmitere de la nod să fie mai mică decît 1).

Relația (2.29) nu are o justificare teoretică riguroasă.

Scanned with OKEN Scanner

Verificarea rapidității convergenței se poate face și cu ajutorul progresiei geometrice. Cu cît rația va fi mai apropiată de 0, convergența va fi mai rapidă, iar pe măsură ce r se apropie de ± 1, devine mai înceată. La limită, pentru $r = +1$, corespunde $D = 0$ și deci cazul nedeterminării, iar pentru $r = -1$, erorile se mențin constante în cursul iterației la toate treptele de calcul. În exemplul de mai jos este arătat mersul calculului pentru un sistem de 2 ecuații cu 2 necunoscute, în care $r = -1$.

$$x_1 = b_{12}\, x_2 + b_{10}$$

$$x_2 = b_{21}\, x_1 \qquad \text{unde} \quad b_{12} = -\frac{1}{b_{21}} = -k$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{vmatrix} = 1 - b_{12}b_{21}; \qquad d_1 = 1$$

$$\text{Rația } r = 1 - \frac{D}{d_1} = 1 - (1 - b_{12}\, b_{21}) = b_{12}\, b_{21}$$

$$D = 1 + k\,\frac{1}{k} = 2; \quad d_1 = 1; \quad \frac{D}{d} = 2; \quad r = -1$$

Sistemul de ecuații capătă forma :

$$x_1 = k\, x_2 + b_{10}$$

$$x_2 = -\frac{1}{k}\, x_1$$

Mersul calculului :

$$x_1^{(1)} = b_{10}; \qquad x_2^{(1)} = -\frac{1}{k}\, b_{10}$$

$$x_1^{(2)} = -\frac{k}{k}\, b_{10} + b_{10} = 0; \quad x_2^{(2)} = 0$$

$$x_1^{(3)} = b_{10}; \qquad x_2^{(3)} = -\frac{1}{k}\, b_{10}$$

$$x_1^{(4)} = -\frac{k}{k}\, b_{10} + b_{10} = 0; \quad x_2^{(4)} = 0$$

etc.

(După cîte un ciclu de 2 trepte de calcul se ajunge la valorile de la care s-a pornit. Calculul nu conduce la nici un rezultat.)

Pentru un sistem de 2 ecuații cu 2 necunoscute, variația rapidității convergenței în funcție de variația raportului $\frac{D}{d_j}$ poate fi urmărită și în reprezentarea grafică. Sistemul de ecuații :

$$(1) \qquad x_1 - b_{12}\, x_2 = b_{10}$$

$$(2) \quad -b_{21}\, x_1 + x_2 = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

cu termen liber diferit de zero numai în ecuația (1), este reprezentat în fig. 32 prin dreptele (*1*) și (*2*). Pentru a urmări variația rației progresiei geometrice, păstrăm dreapta (*2*) neschimbată și rotim dreapta (*1*) în jurul punctului de intersecție $M(x_1, x_2)$. Aceasta revine la a păstra neschimbată ecuația (2) și a varia în ecuația (1) pe b_{12} și b_{10}, astfel ca x_1 și x_2 să nu se modifice.

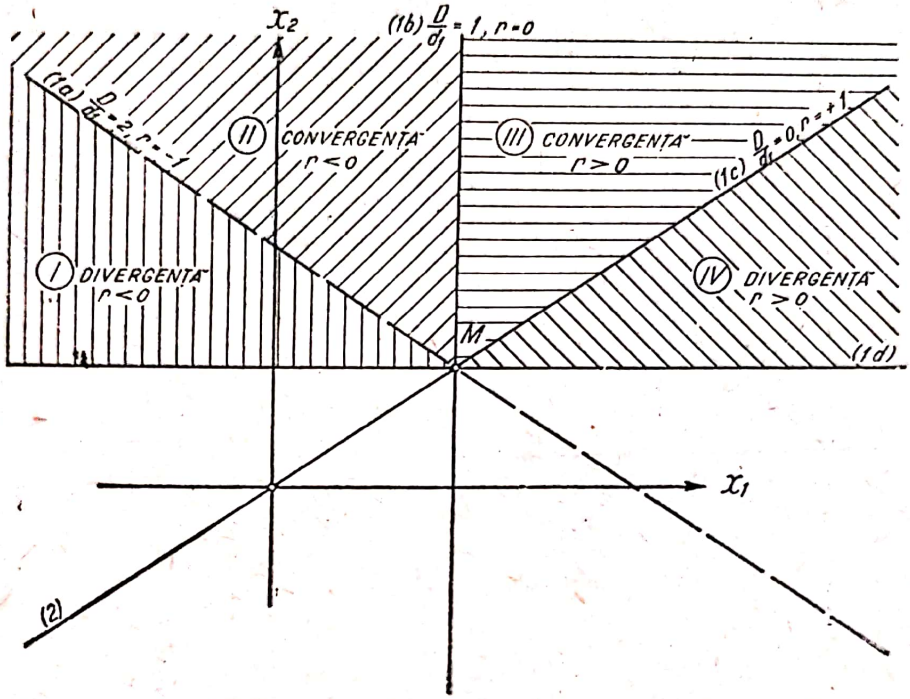


Fig. 32

Coeficienții unghiulari ai celor două drepte :

$$m_1 = -b_{12}\,; \quad m_2 = -\frac{1}{b_{21}}$$

$$D = 1 - b_{12}\,b_{21} = 1 - \frac{m_1}{m_2}\,; \quad d_1 = 1$$

Pozițiile caracteristice ale dreptei (*1*) :

$\frac{D}{d_1} = 2 \ldots m_1 = -\frac{1}{m_2} \ldots$ poziția *1 a*

$\frac{D}{d_1} = 1 \ldots m_1 = \infty \ldots$ poziția *1 b* $(x_1 = b_{10})$

$\frac{D}{d_1} = 0 \ldots m_1 = m_1 \ldots$ poziția *1 c* (cele două drepte se confundă = nedeterminare).

Vom avea :

— între *1 d* și *1 a* (domeniul *I*), $\frac{D}{d_1} > 2$, deci $r < -1$ și seria este divergentă ;

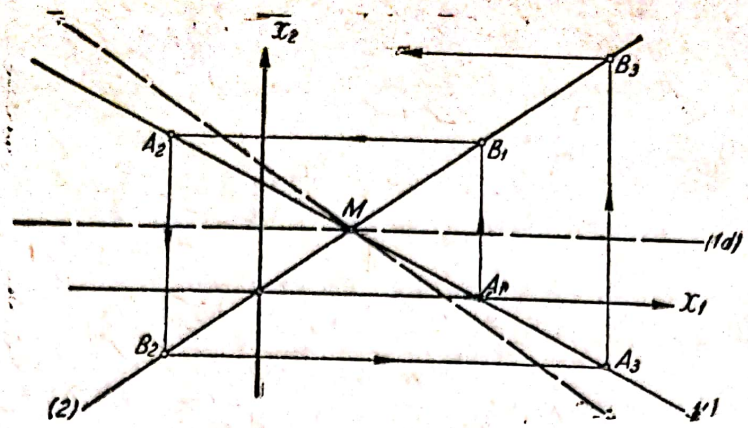


Fig. 33

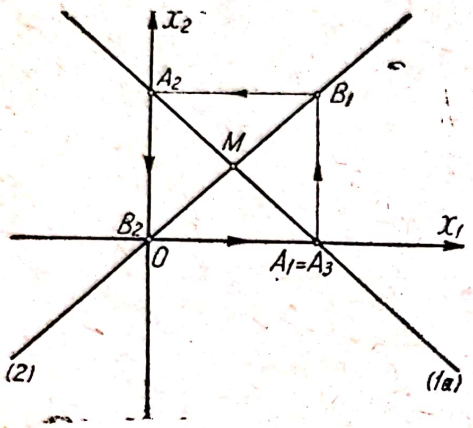


Fig. 34

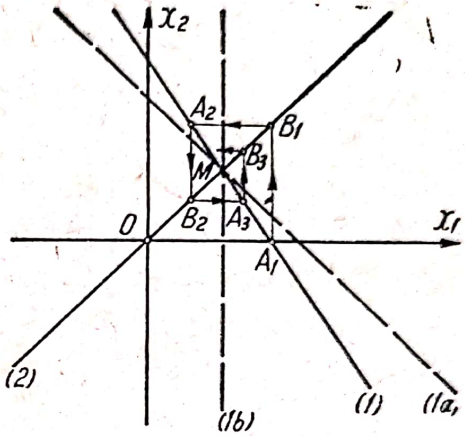


Fig. 35

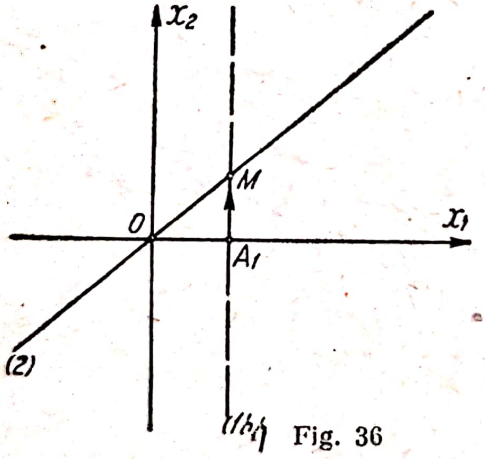


Fig. 36

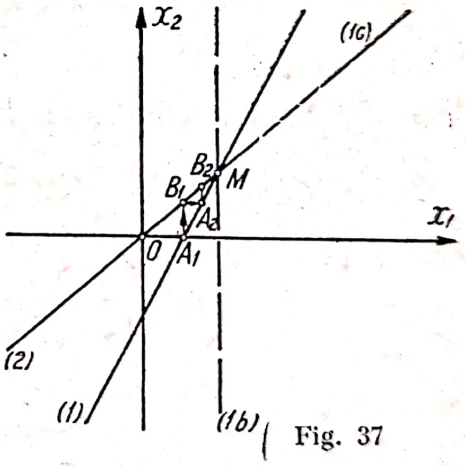


Fig. 37

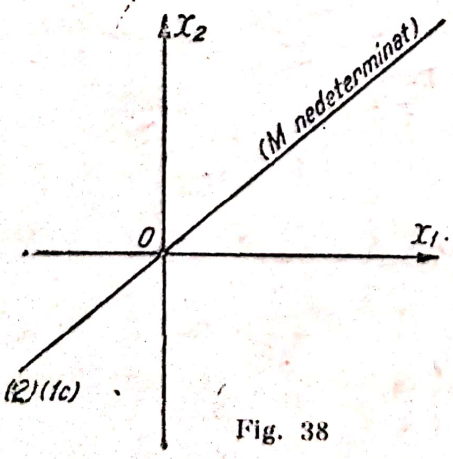


Fig. 38

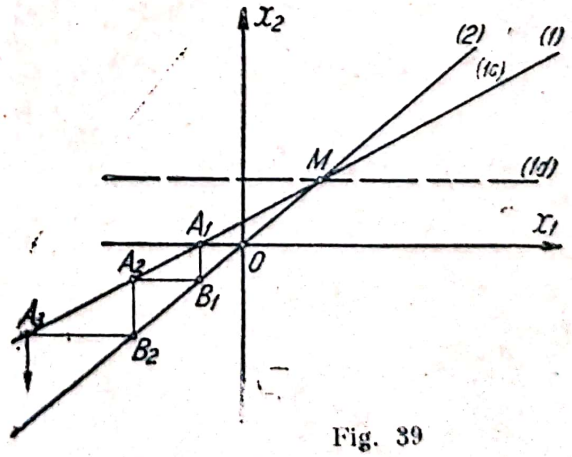


Fig. 39

— între *1 a* şi *1 b* (domeniul *II*), $1 < \frac{D}{d_1} < 2$, deci $-1 < r < 0$ şi seria este convergentă;

— între *1 b* şi *1 c* (domeniul *III*), $0 < \frac{D}{d_1} < 1$, deci $0 < r < +1$ şi seria este convergentă;

— între *1 c* şi *1 d* (domeniul *IV*), $\frac{D}{d_1} < 0$, deci $r > +1$ şi seria este din nou divergentă.

În fig. 33 — 39 este reprezentat mersul calculului prin iteraţie, cînd dreapta (*1*) ocupă poziţiile: *1 d — 1 a* (fig. 33), *1 a* (fig. 34), *1 a — 1 b* (fig. 35), *1 b* (fig. 36), *1 b — 1 c* (fig. 37), *1 c* (fig. 38) şi *1 c — 1 d* (fig. 39).

În fig. 33 şi 39 divergenţa se observă grafic, prin depărtarea treptată a punctelor A, B de punctul căutat M. În fig. 35 şi 37 punctele A, B se apropie de M (convergenţă). În fig. 34 $\left(\frac{D}{d_1} = 2\right)$ calculul nu înaintează, revenindu-se din 2 în 2 trepte de calcul la aceleaşi valori ($A_1 \to B_1 \to A_2 \to$ $\to B_2 \to A_1$ etc.). În fig. 36 (convergenţă maximă), se ajunge la punctul căutat M din prima treaptă de calcul. Fig. 38 corespunde nedeterminării ($D = 0$).

Cu cît dreapta (*1*) se depărtează de poziţiile corespunzătoare limitei de convergenţă *1 a*, *1 c* şi se apropie de poziţia *1 b*, rapiditatea convergenţei este mai mare.

Ameliorarea rapidităţii convergenţei prin eliminarea din iteraţie a unor ecuaţii

În cazul unui sistem de ecuaţii în care criteriul lui Wittmeyer este îndeplinit numai într-un număr p din cele n ecuaţii, rapiditatea convergenţei iteraţiei poate fi ameliorată prin eliminarea din iteraţie a restului de $(n - p)$ ecuaţii, în care criteriul de convergenţă nu este satisfăcut. De exemplu în sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad 20\,x_1 + x_2 + x_3 + 4\,x_4 = 15\\
&(2)\quad 2\,x_1 + 15x_2 - x_3 - 2\,x_4 = 33\\
&(3)\quad 2\,x_1 + 3x_2 + 10x_3 + x_4 = 55\\
&(4)\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5
\end{aligned}$$

în primele 3 ecuaţii sumele valorilor absolute ale coeficienţilor a_{jk} sînt mai mici decît coeficienţii de pe diagonală a_{jj}:

$$1 + 1 + 4 = 6 < 20$$
$$2 + 1 + 2 = 5 < 15$$
$$2 + 3 + 1 = 6 < 10$$

iar în ecuaţia (4):

$$1 + 1 + 1 = 3 > 1$$

Dacă sistemul se rezolvă prin iteraţie, convergenţa este încetinită de ecuaţia (4), transmiterile spre nodul (*4*) făcîndu-se cu coeficienţi mari.

Scanned with OKEN Scanner

Eliminăm ecuația (4), substituind în primele 3 ecuații pe x_4 :

$$x_4 = 5 - x_1 - x_2 - x_3$$

Se obține sistemul :

$$\begin{aligned} 16\,x_1 - 3\,x_2 - 3\,x_3 &= -5 \\ 4\,x_1 + 17\,x_2 + x_3 &= 43 \\ x_1 + 2\,x_2 + 9\,x_3 &= 50 \end{aligned}$$

în care criteriul lui Wittmeyer este satisfăcut în toate ecuațiile.

Nu totdeauna această metodă dă rezultate. În Statică, este utilizată la calculul cadrelor cu noduri deplasabile, unde operațiunile de transformare a sistemului de ecuații și coeficienții necunoscutelor din sistemul transformat au semnificații fizice care permit scrierea directă a sistemului de ecuații transformat.

Un alt procedeu de eliminare din iterație a ecuațiilor care nu satisfac criteriul de convergență este cel al *coeficienților nedeterminați*, utilizat curent în calculul cadrelor cu noduri deplasabile. Acest procedeu va fi expus în cap. VII.

IV. Cazul sistemelor de ecuații (1.6), (1.7), (1.8)

Sistemul de ecuații reprezentînd condițiile de continuitate și de echilibru ale unui sistem static nedeterminat format din bare se diferențiază prin următoarele proprietăți caracteristice :

a) Ecuațiile care compun sistemul sînt obținute scriind derivatele parțiale ale expresiei lucrului mecanic produs de forțele interioare, respectiv a energiei potențiale acumulate de sistem prin deformare elastică. În consecință, rezultă că matricea sistemului de ecuații va fi definită pozitiv.

b) După legea reciprocității, avem totdeauna $a_{jk} = a_{kj}$, deci matricea coeficienților a_{jk} este simetrică în raport cu diagonala principală. (Se observă că matricea coeficienților b_{jk} nu mai este simetrică în raport cu diagonala principală și deci coeficienții de transmitere $t_{j\to k}$ și $t_{k\to j}$ nu sînt egali între ei, deoarece s-au împărțit în fiecare ecuație coeficienții a_{jk} cu coeficientul de pe diagonala principală a_{jj}, care diferă de la o ecuație la alta. Însă proprietățile care decurg din simetria matricei coeficienților a_{jk} se păstrează evident.)

După o teoremă cunoscută (v. bibl. 76), un sistem de ecuații liniare, a cărui matrice este simetrică în raport cu diagonala principală și definită pozitiv satisface totdeauna criteriul de convergență a iterației după metoda Seidel. Pentru cazul general, această teoremă se demonstrează arătîndu-se că funcția de gradul II în $x_1, \ldots x_n$:

$$F(x_1, \ldots x_n) = \frac{1}{2} \sum_{j,k}^{1,\ldots n} a_{jk}\, x_j\, x_k - \sum_{1}^{n} a_{j0}\, x_j$$

ale cărei derivate în raport cu $x_1, \ldots x_n$, egalate cu zero, reprezintă sistemul de ecuații liniare dat, capătă pentru :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0\,; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0\,; \quad \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

un *minimum*, iar fiecare operațiune din rezolvarea prin iterație (fiecare corecție) are drept efect o scădere a valorii lui F, astfel că totdeauna iterația conduce la F = minim, adică la valorile finale exacte ale necunoscutelor.

În cazul ecuațiilor din Statică, această demonstrație devine mai evidentă dacă se ține seama și de semnificațiile fizice ale termenilor din ecuații. În adevăr : poziția finală de echilibru elastic a unui sistem de bare corespunde valorii minime a lucrului mecanic de deformație ; ori, pornind de la sistemul de bază din metoda eforturilor, cu continuitățile la noduri desfăcute, orice restabilire a continuității la un nod (respectiv orice corectare a unui nod pe schema de transmiteri) se traduce printr-o micșorare a lucrului mecanic de deformație total acumulat de sistem, deci o apropiere de minimul corespunzător poziției finale de echilibru elastic. La limită, valoarea lucrului mecanic tinde către cea minimă, deci iterația converge.

Pentru sistemul de ecuații din metoda deplasărilor, demonstrația convergenței este asemănătoare.

Cu ajutorul rației progresiei geometrice a termenilor iterației se ajunge la același rezultat. Pe baza legii reciprocității : $b_{jk} = -\frac{a_{jk}}{b_{jj}}$ și $b_{kj} = -\frac{a_{kj}}{a_{kk}}$ sînt de același semn, deoarece $a_{jk} = a_{kj}$, iar coeficienții a_{jj}, a_{kk} de pe diagonala principală sînt prin definiție pozitivi. Cum în operațiunile din iterație, o cantitate transmisă de la j la k se transmite totdeauna înapoi de la k la j, termenii care intră în expresia rației progresiei geometrice vor fi totdeauna produse $b_{kj}\ b_{jk}$, deci termeni pozitivi, astfel că rația va rezulta și ea pozitivă.

Știind că $r_j > 0$, valorile rapoartelor $\frac{D^{(m)}}{d_j^{(m)}}$ nu mai pot varia decît între $-\infty$ și $+1$, deci este suficient să arătăm că $D^{(m)}, d_j^{(m)} > 0$ pentru ca relația (2.28) să fie satisfăcută. *I. M. Rabinovici* a demonstrat acest lucru (v. bibl. 58), arătînd că pentru sistemele static nedeterminate formate din bare, determinantul principal și toți minorii principali sînt pozitivi (v. și *A. F. Smirnov*, bibl. 66).

De altfel, dacă $D > 0$, este ușor de văzut că și toți minorii principali sînt pozitivi, întrucît fiecare din acești minori reprezintă la rîndul lui determinantul principal al unui sistem format din bare, obținut din sistemul inițial, prin blocarea unei deplasări, respectiv prin suprimarea unei ecuații.

De multe ori ecuațiile (1.6) satisfac și criteriul lui Wittmeyer. În general sistemele cu legături de tipul I (o singură necunoscută la nod) satisfac criteriul lui Wittmeyer și de aceea convergența iterației rezultă mai rapidă. Sistemele cu legături de tipul II nu satisfac aproape niciodată acest criteriu și prezintă o convergență a iterației mai înceată.

Un caz special, care se întîlnește uneori (v.cap. V, cap. VI) este cazul cînd coeficienții de influență $\nu_{jk} = -\nu_{jj}$. (O solicitare acționînd asupra capătului j al barei jk produce în j aceeași deplasare ca și o solicitare egală și de semn contrar acționînd asupra capătului k al barei.)

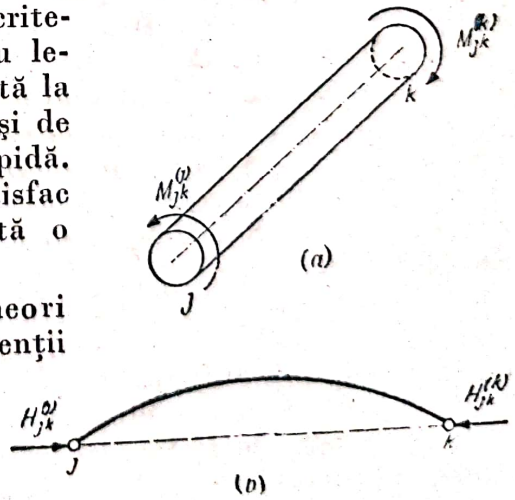


Fig. 40

Pentru acest caz, s-a arătat în cap. I că relațiile între solicitări și deplasări sînt (1.2′) și (1.3).

Un exemplu caracteristic este cel al unei bare lucrînd la răsucire (fig. 40 a). Un moment $M_{jk}^{(j)}$ produce aceeași rotire a capătului j în raport cu capătul k, pe care o produce un moment $M_{jk}^{(k)}$ de semn contrar. Un alt exemplu ar fi arcul dublu articulat, cu reazemele deplasabile pe orizontală (fig. 40 b), la care o împingere $H_{jk}^{(j)}$ aplicată în j produce aceeași deplasare relativă a punctelor j și k, pe care o produce o împingere $H_{jk}^{(k)}$ de semn contrar, aplicată în k.

Dacă $\nu_{jk} = -\nu_{jj}$, în ecuația (1.6):

$$\bar{X}_j = \delta_j \sum \nu_{jj} + \sum \delta_k \nu_{jk}$$

Coeficientul de transmitere de la k la j va fi:

$$t_{k \to j} = -\frac{\nu_{jk}}{\Sigma \nu_{jj}} = +\frac{\nu_{jj}}{\Sigma \nu_{jj}}$$

deci suma coeficienților de transmitere spre j:

$$\sum t_{k \to j} = \frac{\Sigma \nu_{jj}}{\Sigma \nu_{jj}} = 1$$

Dacă în toate ecuațiile sistemului $\nu_{jk} = -\nu_{jj}$, sîntem, după criteriul lui Wittmeyer, la limita convergenței. Același lucru rezultă și din determinantul principal al sistemului, în care suma fiecărei coloane este zero, deci $D = 0$, respectiv $r = +1$ (limita convergenței).

Determinantul fiind nul, sîntem în cazul unei nedeterminări, deci există o infinitate de soluții pentru deplasările δ_j. În consecință, sistemul admite o infinitate de poziții de echilibru, adică este un sistem labil. Într-adevăr, dacă ne-am imagina un sistem format numai din bare lucrînd la răsucire (ca în fig. 40 a), acesta s-ar putea roti indefinit sub acțiunea momentelor de răsucire. Un șir de arce ca în fig. 40 b se poate de asemenea deplasa indefinit pe orizontală. Aceasta spre deosebire de un cadru cu noduri fixe, la care $\nu_{jk} \neq -\nu_{jj}$ și care într-adevăr, dacă se lasă libere rotirile tuturor nodurilor, nu devine un sistem labil.

Într-un sistem cu $\nu_{jk} = -\nu_{jj}$, blocînd sau condiționînd o deplasare, se obține din nou stabilitatea. În sistemul de ecuații corespunzător, o necunoscută devine egală cu zero sau rezultă dintr-o ecuație suplimentară și deci nu vom mai avea în toate ecuațiile $t_{k \to j} = 1$. Determinantul devine $D > 0$ și convergența iterației este din nou asigurată.

Cazul $\nu_{jk} = -\nu_{jj}$ ilustrează foarte bine legătura care există între gradul de libertate a deplasărilor unui sistem format din bare și convergența iterației. *Situația limită de trecere de la stabilitate la labilitate corespunde limitei convergenței iterației.* Invers, situația $D^{(m)} = 1$, conform (2.23), care ar reprezenta limita inferioară a libertății deplasărilor, toate deplasările fiind blocate, corespunde în iterație la $r_j = 0$, deci la maximum de convergență, efectele solicitărilor fiind complet localizate.

Cu cît sînt mai multe deplasări blocate, cu atît valoarea determinantului se apropie de 1. De aici rezultă că minorii principali d_1 sînt totdeauna mai mari în valoare (mai apropiați de 1) decît determinantul principal D, întrucît reprezintă determinanții unor sisteme cu $n - 1$ deplasări, obținute

din sistemul dat, cu n deplasări, blocînd o deplasare (suprimînd o ecuație). Avem atunci :

$$\frac{D}{d_1} < 1 \text{ şi } r = 1 - \frac{D}{d_1} > 0$$

(se regăseşte proprietatea enunţată mai înainte, că raţia progresiei formate de termenii iteraţiei este pozitivă).

Dacă pentru sistemele formate din bare, cazul special considerat mai sus constituie numai un caz limită, care nu apare în practică, dar care serveşte pentru a ilustra un aspect al semnificaţiei fizice a operaţiunilor din rezolvarea prin aproximaţii succesive, — în schimb pentru sistemele de tipul reţelelor electrice sau de conducte de apă, este cazul curent. La o reţea electrică, valorile curenţilor în conductori nu sînt funcţii de valorile absolute ale tensiunilor la noduri, ci numai de căderile de tensiune, deci condiţiile de continuitate şi de echilibru la noduri sînt respectate, indiferent de valorile necunoscutelor (tensiunilor), dacă se păstrează diferenţele între ele. Sistemul de ecuaţii (1.6) are atunci o infinitate de soluţii. Avem în toate ecuaţiile $v_{jk} = -v_{jj}$, $\Sigma t_{k \to j} = 1$, iar $D = 0$ şi $r = +1$. Făcînd însă o operaţiune analogă blocării unei deplasări într-un sistem format din bare, şi anume fixînd valoarea tensiunii într-un nod, sistemul devine determinat şi iteraţia converge.

Cînd se iau ca necunoscute solicitările, ecuaţia de capăt de bară este (1.3) şi coeficientul de transmitere are valoarea

$$t_{k \to j} = -1$$

În metoda eforturilor, convergenţa este în general mai greu de urmărit. Cazul special al sistemului (1.8) prezintă caracteristici asemănătoare cu sistemul (1.6) din metoda deplasărilor.

D. INFLUENŢA ERORILOR DE CALCUL ŞI CORECTAREA LOR ÎN METODA ITERAŢIEI

În calculul prin metoda iteraţiei, în special dacă el este sistematizat pe o schemă de transmiteri, este în general mai greu să se strecoare erori decît în calculul prin alte metode. Totuşi, posibilitatea erorilor trebuie să fie luată în consideraţie.

Aceste erori pot fi clasificate în două categorii :

a) Erori la scrierea ecuaţiilor (sau, dacă ecuaţiile nu se mai scriu şi rezolvarea se face direct pe schema de transmiteri, erori la calculul termenilor liberi şi al coeficienţilor necunoscutelor).

b) Erori ce survin din operaţiunile de iteraţie, prin greşeli de înmulţiri, adunări etc.

Erorile din categoria (a) se păstrează la rezultatele calculului, existenţa lor neputînd fi detectată, deoarece soluţiile ecuaţiilor, rezultate din calcul, verifică ecuaţiile scrise greşit.

Dacă se operează cu valorile întregi ale necunoscutelor, erorile din categoria (b) dispar însă de la sine prin însăşi continuarea iteraţiei, avînd ca repercusiune numai micşorarea convergenţei. Într-adevăr, introducerea la un moment dat în calcul a unei valori greşite pentru una din necunoscute reprezintă de fapt o întoarcere la prima treaptă de calcul, unde s-a pornit de asemenea de la o valoare arbitrară.

Singura operaţie în care se pot strecura erori care nu se mai corectează de la sine este însumarea de la sfîrşitul calculului a valorilor obţinute la

noduri. Pentru aceasta este totuşi util ca totdeauna la sfîrşit să se verifice ecuaţiile cu valorile rezultate din calcul. În cazul sistemelor de care ne ocupăm, această verificare este foarte simplă, reducîndu-se la verificarea echilibrului în jurul fiecărui nod.

Dacă ecuaţiile nu se verifică, în primul rînd trebuie să reverificăm însumările valorilor la noduri. Dacă aceste însumări rezultă totuşi corecte, eroarea trebuie căutată numai la scrierea ecuaţiilor (calculul valorilor iniţiale şi al coeficienţilor de transmitere).

Dacă se operează cu corecţiile (cazul obişnuit), pot apărea şi erori din iteraţia propriu-zisă (din transmiteri făcute greşit), care nu se elimină automat prin continuarea iteraţiei. De aceea, dacă la sfîrşitul calculului ecuaţiile nu se verifică cu valorile necunoscutelor rezultate din calcul, trebuie controlate şi transmiterile.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

SISTEME STATIC NEDETERMINATE FORMATE DIN BARE

GENERALITĂŢI

Pentru un tip oarecare de sistem static nedeterminat format din bare, metoda de rezolvare prin aproximaţii succesive pe bază de schemă de transmiteri rezultă din metoda generală expusă în cap. I şi II, prin introducerea în ecuaţiile (1.5), (1.6), (1.7), (1.8) a elementelor specifice sistemului considerat.

Fiind dată schema sistemului şi schema de încărcare, ordinea operaţiunilor pentru stabilirea metodei corespunzătoare de calcul prin aproximaţii succesive este următoarea :

1. **Precizarea aproximaţiilor admise la baza calculului** (respectiv a termenilor din expresia lucrului mecanic al eforturilor interioare, de care se ţine seama sau care se neglijează).

Rezultă numărul de tipuri de deplasări posibile ale nodurilor şi de aici numărul de necunoscute la fiecare nod, care intervin în ecuaţii.

Necunoscutele sînt mărimile şi direcţiile deplasărilor (rotirilor şi translaţiilor) nodurilor. În cazul general, vom avea la fiecare nod cîte 6 necunoscute : mărimea rotirii, direcţia vectorului rotirii (2 necunoscute), mărimea translaţiei şi direcţia translaţiei (2 necunoscute). În cazul special al sistemelor plane, solicitate de sarcini acţionînd în planul lor, direcţia vectorilor rotirilor este cunoscută (normală pe planul sistemului), iar dintre cei doi parametri care determină direcţia translaţiilor, unul este cunoscut, translaţiile producîndu-se în planul sistemului. Rămîn deci la fiecare nod cîte 3 necunoscute : mărimea şi direcţia translaţiei şi mărimea rotirii.

De la caz la caz, în funcţie de schema sistemului, de schema de încărcare şi de aproximaţiile care se admit, neglijînd unii termeni din expresia lucrului mecanic de deformaţie, numărul necunoscutelor la noduri mai poate fi redus, rămînînd în unele cazuri (la sistemele cu legături de tipul I) cîte o singură necunoscută la nod.

Pe baza tipurilor de deplasări ale nodurilor, de care se ţine seama în calcul, sistemele static nedeterminate formate din bare, întîlnite mai des în cazurile practice, se pot grupa după cum urmează :

Scanned with OKEN Scanner

Sisteme cu legături de tipul I

A. Sisteme plane sau spaţiale avînd ca necunoscute *mărimile rotirilor nodurilor* (cap. IV—V)

- a) Se poate ţine seama numai de lucrul mecanic al momentelor încovoietoare. Tip caracteristic : *cadrele plane cu noduri fixe* (cap. IV şi V A)
- b) Se poate ţine seama numai de lucrul mecanic al momentelor încovoietoare şi al momentelor de răsucire. Tip caracteristic : *cadrele spaţiale ortogonale cu noduri fixe* (cap. V B)

B. Sisteme plane avînd ca necunoscute *mărimile translaţiilor nodurilor* (cap. VI)

- a) Sarcinile acţionează în planul sistemului. Direcţiile translaţiilor sînt date sau se pot determina din relaţii geometrice. Se ţine seama numai de lucrul mecanic al momentelor încovoietoare (eventual şi de cel al forţelor axiale). Tip caracteristic : *arcele articulate pe pile flexibile* (cap. VI A)
- b) Sarcinile acţionează normal pe planul sistemului. Direcţiile translaţiilor : după direcţia sarcinilor. Se ţine seama numai de lucrul mecanic al momentelor încovoietoare. Tip caracteristic : *reţelele plane de grinzi*, la care se neglijează rigiditatea la răsucire a nodurilor (lucrul mecanic al momentelor de răsucire) (cap. VI B)

Sisteme cu legături de tipul II

A. Sisteme plane avînd ca necunoscute *mărimile şi direcţiile translaţiilor* (2 necunoscute la nod). (cap. VI)

- Barele fiind articulate la noduri, iar sarcinile aplicate la noduri, barele nu se încarcă decît cu forţe axiale. Tip caracteristic : *sistemele articulate plane* (cap. VI A)

B. Sisteme plane sau spaţiale avînd ca necunoscute *mărimile rotirilor şi mărimile translaţiilor* (direcţiile translaţiilor sînt cunoscute sau se pot determina din relaţii geometrice). Total 2 necunoscute la nod (cap. VII—VIII)

- a) Se poate ţine seama numai de lucrul mecanic al momentelor încovoietoare. Tip caracteristic : *cadrele plane cu noduri deplasabile* (cap. VII şi VIII A,B)
- b) Este necesar să se ţină seama şi de lucrul mecanic al forţelor axiale. Tipuri caracteristice : *cadrele plane cu bare curbe sau cu tiranţi* (cap. VII) şi *sistemele cu zăbrele*, la care se ţine seamă de rigiditatea la rotire a nodurilor
- c) Se poate ţine seama numai de lucrul mecanic al momentelor încovoietoare şi al momentelor de răsucire. Tip caracteristic : *cadrele spaţiale ortogonale cu noduri deplasabile* (cap. VIII C)

C. Sisteme avînd ca necunoscute *mărimile rotirilor, direcţiile vectorilor rotirilor şi mărimile translaţiilor*. Total 3 necunoscute la nod (cap. VIII)

- Sisteme plane încărcate cu sarcini normale pe planul lor. Direcţiile translaţiilor : după direcţia sarcinilor. Se cunoaşte de asemenea unul din parametrii direcţiei vectorilor rotirilor : vectorii rotirilor sînt cuprinşi în planul sistemului. Tip caracteristic : *reţelele plane de grinzi*, la care se ţine seama de rigiditatea la răsucire a nodurilor (cap. VIII D)

D. Sisteme spaţiale în general (6 necunoscute la nod). Nu se tratează în lucrarea de faţă.

Scanned with OKEN Scanner

În capitolele următoare (IV—VIII) sînt tratate cîteva din tipurile caracteristice de sisteme, în ordinea clasificării de mai sus.

2. **Stabilirea convenţiilor de semne şi calculul coeficienţilor de influenţă** (care exprimă relaţia între solicitări şi deplasări).

3. **Scrierea sistemului de ecuaţii liniare :**

— în metoda deplasărilor : de tipul (1.6) (dacă se aleg ca necunoscute deplasările nodurilor), sau de tipul (1.5—1.7) (dacă se aleg ca necunoscute solicitările cu care se încarcă la noduri capetele barelor) ;

— în metoda eforturilor : de tipul (1.8).

4. **Punerea acestor ecuaţii sub forma pentru a fi rezolvate prin iteraţie** (prin explicitarea necunoscutelor principale).

Se stabilesc astfel expresiile coeficienţilor de transmitere (2.13, 2.16, 2.22) şi ale valorilor iniţiale ale necunoscutelor în funcţie de termenii liberi (2.12, 2.15, 2.21). În cazul cînd se operează cu solicitările la capetele barelor, este necesar în plus să se calculeze coeficienţii de repartiţie la noduri (2.18).

Elementele care intervin în schema de transmiteri pot fi determinate, aşa cum s-a arătat, şi fără a mai scrie ecuaţiile (1.5, 1.6, 1.7, 1.8), pe baza semnificaţiilor lor fizice. În lucrarea de faţă s-a adoptat însă, pentru unitatea şi claritatea expunerii, procedeul determinării tuturor elementelor (coeficienţi de transmitere, valori iniţiale etc.) din ecuaţii, semnificaţia fizică fiind apoi arătată pentru fiecare în parte, prin reluarea demonstraţiilor pe bază pur statică.

5. **Alcătuirea schemei de transmiteri.** La alcătuirea schemei de transmiteri apare diferenţa esenţială din punctul de vedere al rezolvării prin iteraţie, între sistemele cu legături de tipul I şi cele cu legături de tipul II.

În cazul sistemelor cu legături de tipul I, operînd cu deplasările nodurilor, vom avea cîte o singură ecuaţie de fiecare nod, în care ca necunoscută principală se poate lua chiar deplasarea nodului pentru care se scrie ecuaţia. În acest mod *se poate folosi ca schemă de transmiteri chiar schema sistemului.* În majoritatea cazurilor, în ecuaţia unui nod intră ca necunoscute, în afară de deplasarea nodului pentru care se scrie ecuaţia, numai deplasările nodurilor direct legate prin bare de acel nod, *deci se vor face transmiteri pe schema sistemului, numai de-a lungul barelor.* Aceasta uşurează considerabil organizarea pe schemă a calculelor şi permite o urmărire sugestivă a propagării efectelor în sistem, chiar pe operaţiunile de calcul din rezolvarea prin aproximaţii succesive.

La sistemele cu legături de tipul II, numărul de ecuaţii este mai mare decît numărul nodurilor sistemului, deci *pe schema de transmiteri vor apărea noduri suplimentare* (v. bibl. 2). Unele metode practice de calcul prin aproximaţii succesive elimină acest inconvenient prin împărţirea calculului în două etape : rezolvarea unui număr de ecuaţii egal cu cel al nodurilor, utilizînd ca schemă de transmiteri schema sistemului şi apoi rezolvarea restului de ecuaţii, pe cale directă. De influenţa reciprocă dintre cele două grupuri de ecuaţii se ţine seama prin introducerea unor coeficienţi nedeterminaţi, metodă bine cunoscută în calculul cadrelor cu noduri deplasabile. Cînd însă numărul ecuaţiilor excedentare este mai mare, rezolvarea lor pe cale directă devine greoaie, astfel că aplicarea metodei aproximaţiilor succesive numai la primul grup de ecuaţii nu rezolvă problema. Atunci devine totuşi necesar să se recurgă la o schemă de transmiteri

Scanned with OKEN Scanner

cu noduri suplimentare, cu ajutorul căreia se rezolvă întregul sistem de ecuații pe cale iterativă. Un caz caracteristic de folosire a acestei metode este arătat în cap. VII pentru cadrele cu noduri deplasabile (*metoda nodurilor fictive*).

6. **Verificarea rapidității convergenței iterației** (cu ajutorul criteriului lui *Wittmeyer* sau altor indicații practice, de felul celor arătate în cap. II).

7. **Precizarea detaliilor specifice de calcul și mersului calculului.**

În această ordine sînt prezentate în cap. IV—VIII aplicațiile metodei iterației la sistemele static nedeterminate formate din bare. La fiecare aplicație, se dau în paralel metodele de rezolvare prin aproximații succesive cînd se iau ca necunoscute deplasările nodurilor și solicitările la capetele barelor.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

SISTEME CU LEGĂTURI DE TIPUL I, LA CARE DEPLASĂRILE NECUNOSCUTE SÎNT ROTIRILE NODURILOR. CADRE PLANE CU NODURI FIXE

În cazul cadrelor plane cu noduri fixe, intervin următoarele elemente caracteristice:

1. Sarcinile exterioare acționează în planul cadrului.

2. Eforturile care apar în bare sub acțiunea sarcinilor sînt: momente încovoietoare, forțe tăietoare și forțe axiale; dintre acestea, momentele încovoietoare produc cea mai mare parte din lucrul mecanic de deformație total, lucrul mecanic produs de forțele tăietoare și de forțele axiale putînd fi neglijat în calcul. În consecință, lungimile barelor se pot considera invariabile.

3. Reazemele sînt astfel alcătuite și dispuse ca sub acțiunea sarcinilor nodurile cadrului să nu poată căpăta translații, dacă lungimile barelor sînt invariabile (sistemul este geometricește indeformabil).

În aceste condiții, în calcul apar ca solicitări exterioare ale nodurilor momente exterioare ($\overline{M}$), ca solicitări ale capetelor de bare momente (M), iar ca deplasări ale nodurilor rotiri (θ). În sistemul de ecuații (1.6) necunoscutele sînt rotirile θ ale nodurilor, iar în ecuațiile (1.5) și (1.7) momentele la capetele barelor.

Condiția de continuitate la un nod: toate capetele barelor care se întîlnesc la nod să se rotească cu același unghi.

Condiția de echilibru la un nod: suma momentelor în jurul nodului să fie egală cu zero.

A. RELAȚIILE ÎNTRE SOLICITĂRI ȘI DEPLASĂRI (ÎNTRE MOMENTE ȘI ROTIRI) LA O BARĂ DREAPTĂ, SUPUSĂ LA ÎNCOVOIERE

I. Rotirile în funcție de momente

Pentru o bară dreaptă AB (fig. 41), simplu rezemată la capete și încărcată cu o sarcină oarecare, relația între momentele încovoietoare și unghiurile de rotire pe reazeme ale fibrei medii deformate este:

$$\theta_A = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{Mx'}{E\,I_x}\,dx\,; \quad \theta_B = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{Mx}{E\,I_x}\,dx \tag{4.1}$$

unde: M este momentul încovoietor într-o secțiune la distanța x de la reazemul A;
I_x — momentul de inerție al secțiunii transversale a barei în secțiunea x;
E — modulul de elasticitate al materialului din care este alcătuită bara.

De regulă, în lungul unei bare $E = const.$ În ceea ce privește momentul de inerție, pentru simplitatea expunerii vom considera la început cazul unei bare de secțiune constantă.

Vom avea atunci :

$$\theta_A = \frac{1}{lEI} \int_0^l Mx'\,dx\,; \quad \theta_B = \frac{1}{lEI} \int_0^l M\,x\,dx \tag{4.2}$$

$\int_0^l M\,x\,dx$ și $\int_0^l M\,x'\,dx$ sînt momentele statice în raport cu reazemele A și B ale suprafeței diagramei de momente M.

Pentru scrierea condițiilor de continuitate la nodurile unui cadru, ne interesează relația între momentele la capetele barelor și rotirile nodurilor.

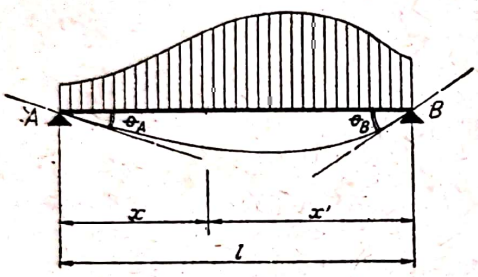


Fig. 41

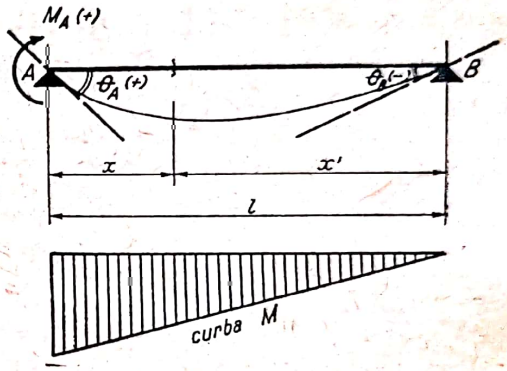


Fig. 42

Vom particulariza deci relațiile (4.2), luînd ca încărcări pe bară momente aplicate la capetele barei.

Dacă încărcarea exterioară este un moment M_A aplicat la capătul A al barei (fig. 42), momentul încovoietor în secțiunea x :

$$M = \frac{x'}{l}\,M_A$$

și relațiile (4.2) devin :

$$\theta_A = + \frac{M_A}{l^2 EI} \int_0^l x'^2\,dx = + M_A \frac{l}{3\,EI}$$

$$\theta_B = - \frac{M_A}{l^2 EI} \int_0^l xx'\,dx = - M_A \frac{l}{6\,EI}$$

(convenția de semne : momentele sînt pozitive cînd rotesc capătul de bară pe care se aplică, în sensul acelor de ceasornic, iar rotirile sînt pozitive în sensul acelor de ceasornic. În fig. 42, M_A este pozitiv, θ_A pozitiv, iar θ_B negativ).

Analog, la un moment M_B aplicat la capătul B al barei :

$$\theta_A = - M_B \frac{l}{6\,EI}\,; \quad \theta_B = + M_B \frac{l}{3\,EI}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci pentru o bară încărcată la capete cu două momente M_A, M_B, unghiurile de rotire pe reazeme ale fibrei medii deformate vor avea valorile :

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_A &= \frac{l}{6EI}(2M_A - M_B) \\ \theta_B &= \frac{l}{6EI}(2M_B - M_A) \end{aligned}} \qquad (4.3)$$

Dacă pe bară sînt şi sarcini exterioare :

$$\theta_A = \frac{l}{6EI}(2M_A - M_B) + \frac{1}{l\,EI}\int_0^l \mathfrak{M}\, x'dx$$

unde $\mathfrak{M}$ este momentul încovoietor în secţiunea x dat de sarcinile de pe bară, considerînd bara simplu rezemată la capete.

Notînd :

$$m_A = \frac{6}{l^2}\int_0^l \mathfrak{M}\, x'dx\,; \quad m_B = \frac{6}{l^2}\int_0^l \mathfrak{M}\, x\,dx$$

avem :

$$\left.\begin{aligned} \theta_A &= \frac{l}{6EI}(2M_A - M_B + m_A) \\ \theta_B &= \frac{l}{6EI}(2M_B - M_A + m_B) \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

m_A, m_B sînt *caracteristicile* (*termenii*) *de încărcare*. Termenii cuprinzînd pe m_A, m_B sînt determinaţi în funcţie de încărcările exterioare de pe bară. În tabela 1 sînt date valorile caracteristicilor de încărcare pentru încărcări uzuale.

Pentru m_A şi m_B s-a considerat aceeaşi convenţie de semne ca şi pentru θ_A, θ_B : caracteristica de încărcare este pozitivă cînd, sub acţiunea sarcinilor de pe bară capătul respectiv de bară se roteşte în sensul acelor de ceasornic. De obicei caracteristicile de încărcare sînt date în tabele fără o convenţie de semne, semnul adăugîndu-se ulterior în formule. Am preferat totuşi sistemul de mai sus, în care în m_A şi m_B să intre direct şi semnele lor, atît pentru a păstra o unitate în convenţiile de semne, cît şi pentru a evita unele confuzii care ar putea apărea, în special în cazul barelor încărcate cu momente concentrate, unde (v. tab. 1) semnul lui m_A şi m_B variază după poziţia punctului de aplicaţie al momentului. Deci în relaţiile (4.4) se introduc caracteristicile de încărcare cu $+$, semnele fiind cuprinse chiar în valorile lor. Pentru sarcini verticale, totdeauna m_A este pozitiv şi m_B negativ.

Ecuaţiile (4.4) reprezintă pentru cadrele cu noduri fixe particularizarea ecuaţiilor generale (1.1), care dau valorile deplasărilor în funcţie de solicitări.

Coeficienţii de influenţă :

$\eta_{AA} = +\frac{l}{3EI}$ — rotirea ce se produce în capătul A al barei AB, cînd în A se aplică un moment $M_A = 1$, iar în capătul opus al barei $M_B = 0$ (bara este articulată în B) ;

$\eta_{AB} = -\frac{l}{6EI}$ — rotirea ce se produce în capătul A al barei AB, cînd în capătul opus B se aplică un moment $M_B = 1$, iar în A, $M_A = 0$ (bara este articulată în A). Aceleaşi valori şi semnificaţii au η_{BB} şi η_{BA}.

Scanned with OKEN Scanner

Termenii liberi :

$\varphi_{AB}^{(A)} = \frac{l}{6EI}\, m_A$ — rotirea capătului A al barei AB datorită sarcinilor de pe bară, cînd $M_A = M_B = 0$ (bara este articulată la ambele capete) ;

$\varphi_{AB}^{(B)} = \frac{l}{6EI}\, m_B$ — idem, în capătul B.

II. Momentele în funcție de rotiri

Rezolvînd ecuațiile (4.4) în raport, cu M_A, M_B, se obține :

$$\boxed{\begin{aligned} M_A &= \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B) - \frac{2m_A + m_B}{3} \\ M_B &= \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_A) - \frac{2m_B + m_A}{3} \end{aligned}} \qquad (4.5)$$

Ecuațiile (4.5) reprezintă particularizarea pentru cazul cadrelor cu noduri fixe a ecuațiilor generale (1.2), care dau valorile solicitărilor în funcție de deplasări.

Coeficienții de influență :

$\nu_{AA} = \frac{4EI}{l}$ — momentul care trebuie aplicat în capătul din A al barei AB, pentru a produce în A o rotire $\theta_A = 1$, cînd în capătul B, $\theta_B = 0$ (bara este încastrată perfect în B) ;

$\nu_{AB} = \frac{2EI}{l}$ — momentul care apare în capătul din B al barei AB, cînd în capătul opus A se produce o rotire $\theta_A = 1$, iar în B, $\theta_B = 0$ (bara este încastrată perfect în B).

Termenii liberi :

$$(4.6)\quad \begin{cases} \bar{M}_A = -\frac{2m_A + m_B}{3} & \text{— momentul produs în } A \text{ de sarcinile de pe bară, cînd } \theta_A = \theta_B = 0 \text{ (momentul de încastrare perfectă al barei în } A) ; \\ \bar{M}_B = -\frac{2m_B + m_A}{3} & \text{— momentul de încastrare perfectă în } B. \end{cases}$$

Verificarea relațiilor (1.4) dintre ν, η, $\bar{M}$, m :

$$\nu_{AA} = \frac{\eta_{BB}}{\eta_{AA}\eta_{BB} - \eta_{AB}^2} = \frac{\frac{l}{3EI}}{\left(\frac{l}{3EI}\right)^2 - \left(-\frac{l}{6EI}\right)^2} = \frac{4EI}{l}$$

$$\nu_{AB} = -\frac{\eta_{AB}}{\eta_{AA}\eta_{BB} - \eta_{AB}^2} = -\frac{-\frac{l}{6EI}}{\left(\frac{l}{3EI}\right)^2 - \left(-\frac{l}{6EI}\right)^2} = \frac{2EI}{l}$$

$$\bar{M}_A = -\nu_{AA}\varphi_{AB}^{(A)} - \nu_{AB}\varphi_{AB}^{(B)} = -\frac{4EI}{l}\cdot\frac{l\,m_A}{6EI} - \frac{2EI}{l}\cdot\frac{l\,m_B}{6EI} = -\frac{2m_A + m_B}{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul cînd bara este încastrată în A şi articulată în B, expresia lui ν_{AA} se obţine punînd în (4.3) $M_B = 0$:

$$M_A = \frac{3\,EI}{l}\,\theta_A \quad \text{şi} \quad \nu_{AA} = \frac{3\,EI}{l}$$

iar $\overline{M}_A$ devine, punînd în (4.4) $M_B = 0$, $\theta_A = 0$:

$$M_A = \overline{M}_A = -\frac{m_A}{2} \tag{4.7}$$

Coeficientul ν_{AA} caracterizează deformabilitatea la încovoiere a barei AB în A, reprezentînd momentul ce trebuie aplicat în A pentru a produce în A o rotire unitară. El poartă numele de *rigiditatea barei AB la capătul A* şi este funcţie de caracteristicile geometrice (I, l) şi de material (E) ale barei, care intervin în calcul, şi de condiţiile de rezemare la capătul opus B.

Pentru bara AB încastrată perfect în B, rigiditatea în A este $\nu_{AA} = \frac{4\,EI}{l}$; pentru bara articulată în B rigiditatea în A este $\nu_{AA} = \frac{3\,EI}{l}$. Dacă în B se consideră o încastrare parţială, rezultă:

$$\nu_{AA} = \alpha\,\frac{EI}{l}$$

unde α se poate exprima în funcţie de gradul de încastrare considerat în B şi variază între valorile limită 3 şi 4 corespunzătoare articulaţiei şi încastrării perfecte.

Conform STAS 3328-52, rigiditatea se notează cu K. La bare cu secţiune constantă, rigiditatea la ambele capete este aceeaşi:

$$\boxed{K_{AB}^{(A)} = K_{AB}^{(B)} = \frac{4\,EI}{l}}$$

Întrucît în calculul cadrelor rigidităţile barelor apar totdeauna sub formă de rapoarte, unităţile în care se calculează valorile lor sînt indiferente, cu condiţia să fie aceleaşi pentru întregul cadru. De aceea, cum de regulă E este acelaşi pentru toate barele unui cadru, se pot introduce în calcul în locul valorilor K, valori proporţionale, reduse în raportul $4E$:

$$\boxed{\rho_{AB}^{(A)} = \frac{K_{AB}^{(A)}}{4E} = \frac{I}{l}}$$ (*rigidităţi practice* sau *coeficienţi de rigiditate*)

La cadrele ce se întîlnesc obişnuit în structurile construcţiilor, ordinul de mărime al lui I şi l este astfel, că dacă în expresia lui ρ se introduc I în dm^4 şi l în dm, valorile lui ρ rezultă apropiate de unitate, deci cele mai comode pentru calcul.

În cazul barei articulate în B:

$$\boxed{K_{AB}^{(A)} = \frac{3\,EI}{l}} \quad \text{şi} \quad \boxed{\rho_{AB}^{(A)} = \frac{3}{4}\cdot\frac{I}{l}}$$

Cu ajutorul relaţiilor (4.4) sau (4.5) se poate scrie sistemul de ecuaţii reprezentînd condiţiile de continuitate şi de echilibru ale unui cadru. Ca necunoscute se pot lua fie rotirile nodurilor, fie momentele la capetele barelor.

Scanned with OKEN Scanner

B. SCRIEREA SISTEMULUI DE ECUAŢII ŞI REZOLVAREA LUI PRIN ITERAŢIE CÎND SE IAU CA NECUNOSCUTE ROTIRILE NODURILOR

I. Scrierea ecuaţiilor (de tipul 1.6)

Considerăm (fig. 43) un nod j din interiorul unui cadru şi nodurile k vecine (legate direct prin bare de nodul j).

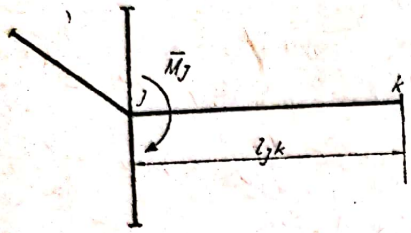


Fig. 43

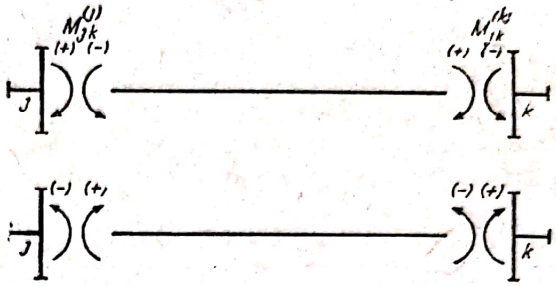


Fig. 44

În secţiunile de la capetele unei bare jk acţionează momentele $M_{jk}^{(j)}$ şi $M_{jk}^{(k)}$ (fig. 44). Momentul pe bară, reprezentînd efectul nodului asupra barei, şi momentul pe nod, reprezentînd efectul barei asupra nodului, ro tesc totdeauna în sensuri diferite. Păstrînd convenţia de semne stabilită pentru cazul general (fig. 11), *se vor considera ca pozitive momentele care rotesc în sensul acelor de ceasornic, atît pentru momentele pe bară, cît şi pentru cele pe nod.* Momentul pe bară va fi deci totdeauna de semn contrar cu cel pe nod (fig. 44) [1]).

În cele ce urmează, prin $M_{jk}^{(j)}$ $M_{jk}^{(k)}$, $\bar{M}_{jk}^{(j)}$, $\bar{M}_{jk}^{(k)}$ vom înţelege momentele *pe nod*, la capetele barei jk. De aceea, trecînd de la relaţiile între momente şi rotiri scrise pentru o bară izolată, la scrierea ecuaţiilor pentru cadrul în ansamblu, respectiv de la momentele pe bară la momentele pe nod, se vor schimba semnele momentelor în (4.4), (4.5). Relaţiile devin :

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_j &= \frac{l_{jk}}{6EI_{jk}}\left[-2\,M_{jk}^{(j)} + M_{jk}^{(k)} + m_j\right] \\ \theta_k &= \frac{l_{jk}}{6EI_{jk}}\left[-2\,M_{jk}^{(k)} + M_{jk}^{(j)} + m_k\right] \end{aligned}} \qquad (4.8)$$

$$\begin{cases} M_{jk}^{(j)} = -\dfrac{2EI_{jk}}{l_{jk}}(2\,\theta_j + \theta_k) + \dfrac{2m_j + m_k}{3} \\ M_{jk}^{(k)} = -\dfrac{2EI_{jk}}{l_{jk}}(2\,\theta_k + \theta_j) + \dfrac{2m_k + m_j}{3} \end{cases}$$

[1]) În literatură se întîlneşte mai des altă convenţie de semne pentru momente : momentul pe bară şi cel pe nod au acelaşi semn şi sînt considerate pozitive cînd momentul pe nod (sau, în unele tratate, momentul pe bară) roteşte în sensul acelor de ceasornic. S-a adoptat totuşi convenţia din fig. 44, care prezintă, atît pentru expunere, cît şi pentru calculul practic, o serie de avantaje, semnele rezultînd totdeauna cele mai comode de urmărit.

Scanned with OKEN Scanner

sau, punînd :

$$K_{jk}^{(j)} = \frac{4EI_{jk}}{l_{jk}}; \quad \overline{M}_{jk}^{(j)} = \frac{2m_j + m_k}{3}; \quad \overline{M}_{jk}^{(k)} = \frac{2m_k + m_j}{3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_{jk}^{(j)} &= -K_{jk}^{(j)}\left(\theta_j + \frac{1}{2}\theta_k\right) + \overline{M}_{jk}^{(j)} \\ M_{jk}^{(k)} &= -K_{jk}^{(k)}\left(\theta_k + \frac{1}{2}\theta_j\right) + \overline{M}_{jk}^{(k)} \end{aligned}} \qquad (4.9)$$

La o grindă obişnuită, încărcată cu sarcini verticale, momentele de încastrare perfectă rezultă : pozitive la capătul din stînga (j) şi negative la capătul din dreapta (k). De exemplu, pentru o încărcare simetrică :

$$m_j = +m; \quad m_j = -m$$

$$\overline{M}_{jk}^{(j)} = \frac{2m_j + m_k}{3} = \frac{2m - m}{3} = +\frac{m}{3}$$

$$\overline{M}_{jk}^{(k)} = \frac{2m_k + m_j}{3} = \frac{-2m + m}{3} = -\frac{m}{3}$$

Cu aceste elemente, putem scrie condiţia de echilibru a momentelor în jurul nodului de cadru j (fig. 43). În sistemul de bază, cu rotirile nodurilor blocate, momentele la capetele barelor încărcate sînt momentele de încastrare perfectă $\overline{M}_{jk}^{(j)}$. Momentul neechilibrat în nodul j, care constituie solicitarea exterioară a nodului, este :

$$\overline{M}_j = \sum_j \overline{M}_{jk}^{(j)}$$

(suma algebrică a momentelor de încastrare perfectă în jurul nodului).

Deblocînd nodurile, în poziţia finală de echilibru elastic a cadrului, momentele la capetele barelor vor fi :

$$M_{jk}^{(j)} = -K_{jk}^{(j)}\left(\theta_j + \frac{1}{2}\theta_k\right) + \overline{M}_{jk}^{(j)}$$

Condiţia de echilibru la nodul j (1.5) :

$$\sum_j M_{jk}^{(j)} = 0$$

Înlocuind pe $M_{jk}^{(j)}$ cu valoarea lui :

$$-\sum K_{jk}^{(j)}\left(\theta_j + \frac{1}{2}\theta_k\right) + \sum \overline{M}_{jk}^{(j)} = 0$$

sau :

$$\sum \overline{M}_{jk}^{(j)} = \boxed{\overline{M}_j = \theta_j \sum K_{jk}^{(j)} + \frac{1}{2}\sum K_{jk}^{(k)}\theta_k} \qquad (4.10)$$

Dacă în j există şi un moment exterior aplicat, el se adaugă la $\overline{M}_j$.

Scriind pentru fiecare nod cîte o ecuaţie de tipul (4.10), obţinem un sistem de ecuaţii în care necunoscutele sînt rotirile θ, termenii liberi sînt

momentele neechilibrate, care în sistemul de bază constituie solicitările exterioare ale nodurilor, coeficienții necunoscutelor — niște coeficienți de influență (ν). Ecuația (4.10) corespunde ecuației generale (1.6).

II. Rezolvarea prin iterație (metoda „transmiterii rotirilor")

Pentru rezolvarea prin iterație a sistemului, este avantajos să se considere ca necunoscută principală în fiecare ecuație rotirea θ_j a nodului al cărui echilibru îl exprimă ecuația respectivă. Astfel, convergența este asigurată, deoarece coeficientul necunoscutei principale (la bare cu secțiune constantă) rezultă egal cu de 2 ori suma coeficienților celorlalte necunoscute, deci criteriul lui Wittmeyer este satisfăcut cu prisosință în fiecare ecuație.

Explicităm necunoscuta principală θ_j:

$$\theta_j = \frac{\overline{M}_j}{\Sigma K_{jk}^{(j)}} - \sum \theta_k \frac{1}{2} \cdot \frac{K_{jk}^{(j)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)}} \cdot \qquad (4.11)$$

(coresp. la 2.11)

Conform celor arătate în cap. III, vom avea atunci:

— valorile inițiale ale necunoscutelor (punînd $\theta_k = 0$):

$$\boxed{\theta_j^{(1)} = \frac{\overline{M}_j}{\Sigma K_{jk}^{(j)}}} \qquad (4.12)$$

(coresp. la 2.12)

— coeficientul de transmitere de la nodul k la nodul j:

$$\boxed{t_{k \to j} = -\frac{1}{2} \frac{K_{jk}^{(j)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)}}} \qquad (4.13)$$

(coresp. la 2.13)

Se poate observa că în ecuația nodului (j) intră, în afară de θ_j, numai rotirile θ_k ale nodurilor direct legate prin bare de nodul j. Această particularitate a cadrelor cu noduri fixe constituie un mare avantaj pentru rezolvarea prin iterație a sistemului de ecuații (4.10), deoarece rezultă că *nu se fac transmiteri decît între nodurile direct legate între ele prin bare, deci schema de transmiteri este chiar schema cadrului.* Nu toate sistemele de bare tratate în lucrarea de față prezintă acest avantaj, care în orice caz nu apare decît la sisteme cu legături de tipul I, deci cu cîte o singură necunoscută la nod.

III. Semnificația fizică a iterației

Inițial, toate necunoscutele θ se consideră egale cu zero, respectiv toate barele perfect încastrate în noduri. În sistemul de bază, cu nodurile blocate, se determină termenii liberi ai ecuațiilor, care reprezintă momentele neechilibrate $\overline{M}_j$ la noduri.

Relația (4.12) exprimă tendința de rotire $\theta_j^{(1)}$ a nodului j blocat, încărcat cu momentul neechilibrat $\overline{M}_j$.

În prima treaptă de calcul a iterației, calculăm din fiecare ecuație de nod valoarea inițială a necunoscutei principale θ_j, în funcție de termenul liber, păstrînd celelalte necunoscute din ecuație (θ_k) egale cu zero. Aceasta revine la a debloca fiecare nod j în parte, păstrînd nodurile vecine blocate. Rezultă ca valori inițiale ale rotirilor θ_j chiar *tendințele de rotire* $\theta_j^{(1)}$ conform formulei (4.12).

Scanned with OKEN Scanner

Iterația se continuă înlocuind valorile θ_j calculate din ecuațiile j, în ecuațiile nodurilor vecine k, prin transmitere de la j la k cu coeficienții de transmitere conform formulei (4.13). *Transmiterea se face* de la nodurile unde se calculează valorile θ_j la nodurile vecine, deci *de la noduri deblocate la noduri blocate*. Se acumulează astfel la nodurile blocate cantități transmise, care reprezintă noi tendițe de rotire.

În treapta de calcul următoare se corectează din nou fiecare ecuație, introducînd valorile necunoscutelor transmise de la nodurile vecine, respectiv se deblochează din nou fiecare nod în parte, tendințele de rotire transmise de la nodurile vecine transformîndu-se în rotiri efective. În acest fel, calculul continuă pînă cînd corecțiile (cantitățile transmise) devin suficient de mici. Operațiunile de iterație constitue operațiuni de propagare din aproape în aproape a rotirilor în interiorul cadrului. Mecanismul propagării rotirilor de la nod la nod apare și din semnificația fizică a coeficientului de transmitere : dacă în (4.11) se pune $\overline{M}_j = 0$ și $\theta_k = 1$, se obține :

$$\theta_j = -\frac{1}{2} \cdot \frac{K_{jk}^{(j)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)}} = t_{k \to j}$$

Deci coeficientul de transmitere a rotirii de la k la j se poate defini ca tendința de rotire care apare în nodul blocat j, cînd nodul deblocat k primește o rotire $\theta_k = 1$.

Metoda de calcul prin aproximații succesive la care s-a ajuns este cunoscută. În forma ei inițială, fără utilizarea calculului pe schema de transmiteri, a fost dată în 1923 de *K. A. Čališev* (bibl. 9). Ulterior a fost reluată și sistematizată în forma expusă mai sus de *Maney Goldberg* (bibl. 45). și *K. Kammüller* (bibl. 40). La noi, a fost pentru prima dată prezentată în 1949 de ing. *E. Beiu Paladi* (bibl. 5), cu o serie de aplicații la determinarea liniilor de influență (v. și bibl. 2, 67, 72).

IV. Mersul calculului

Calculul se conduce în modul următor :

Pe schema cadrului, în jurul fiecărui nod, se înscriu valorile coeficienților de transmitere, în dreptul barelor respective (fig. 45). Coeficienții de transmitere sînt totdeauna negativi.

Se înscriu în dreptul fiecărui nod valorile inițiale $\theta_j^{(1)}$ conform formulei (4.12). Apoi se începe iterația. Ca ordine de calcul, se poate folosi fie corectarea simultană a nodurilor, fie corectarea succesivă. Aceasta din urmă este recomandabilă, fiind mai avantajoasă din toate punctele de vedere. Ordinea de corectare a nodurilor cea mai favorabilă pentru convergență, așa cum s-a arătat în cap. II, este de la nodurile unde suma valorilor transmise și necorectate este cea mai mare, spre cele unde este mai mică. În cazul de față, al nodurilor de cadru, înseamnă că deblocarea se va face totdeauna în ordinea de la nodul cu cea mai mare tendință de rotire blocată.

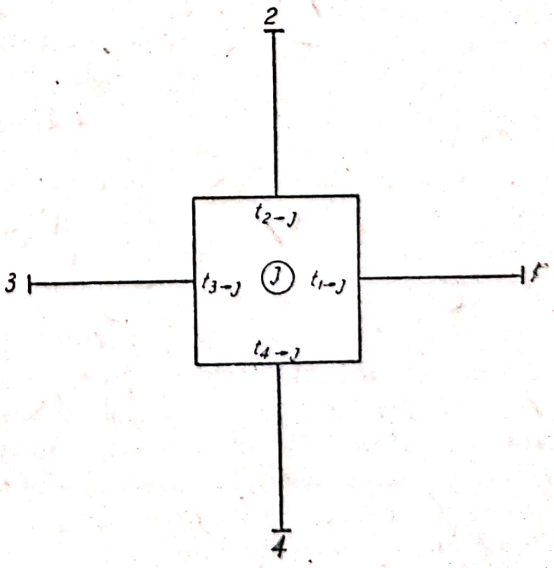


Fig. 45

La sfîrşitul calculului, prin însumarea coloanelor de valori la noduri, obţinem valorile definitive ale rotirilor nodurilor. Pe baza acestora, se calculează apoi momentele la capetele barelor, cu ajutorul relaţiilor (4.9). Ca verificare, suma momentelor în jurul nodurilor trebuie să rezulte egală cu zero.

Dacă se constată la această verificare mici erori de închidere, se poate reîncepe calculul cu erorile ΔM, considerate ca momente exterioare aplicate la noduri.

Unghiurile de rotire θ sînt în general foarte mici. De aceea, pentru comoditatea calculului, este recomandabil să se lucreze cu valorile $E\theta$. Vom avea atunci, pentru valorile iniţiale, în locul formulei (4.12) :

$$\theta_j'^{(1)} = E\theta_j^{(1)} = \frac{\overline{M}_j}{4\,\Sigma\,\rho_{jk}^{(j)}} \tag{4.14}$$

iar la sfîrşitul calculului, trecerea de la rotiri la momente se va face cu ajutorul formulelor :

$$\begin{aligned} M_{jk}^{(j)} &= -4\,\rho_{jk}^{(j)}\left(\theta_j' + \frac{1}{2}\,\theta_k'\right) + \overline{M}_{jk}^{(j)} \\ M_{jk}^{(k)} &= -4\,\rho_{jk}^{(k)}\left(\theta_k' + \frac{1}{2}\,\theta_j'\right) + \overline{M}_{jk}^{(k)} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Operaţiunea finală de trecere de la rotiri la momente se poate face chiar pe schema de transmiteri. După însumarea coloanelor de valori θ, se face pe fiecare bară o transmitere între capete a valorilor definitive θ, cu coeficientul de transmitere $+\frac{1}{2}$. Obţinem astfel la fiecare capăt de bară suma $(\theta_j' + \frac{1}{2}\,\theta_k')$. Aceasta se înmulţeşte apoi cu cantitatea $4\,\rho$, care se găseşte înscrisă pe bară, şi se obţin valorile momentelor la capetele barei.

Mersul calculului se poate urmări pe exemplul nr. 6.

Exemplul 6. Cadru cu noduri fixe, calculat prin metoda transmiterii rotirilor.

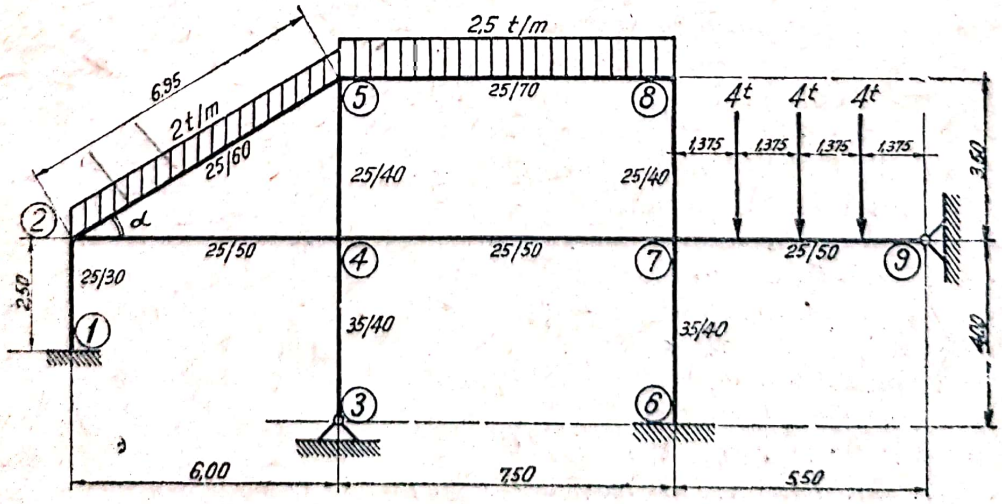


Fig. 46

Schema şi încărcările cadrului sînt arătate în fig. 46.

Pe bara 2—5 încărcarea este distribuită pe m. l. de bară înclinată; proiecția încărcării pe normala la axa barei:

$$\cos \alpha = 0{,}863$$

$$2 \times 0{,}863 = 1{,}726 \text{ t/m} \ldots$$

Rigiditățile barelor (b, h = dm; I = dm^4; l = dm)

Bara	b	h	I	l	$\rho = \frac{I}{l}$
1—2	2,5	3	5,62	25	0,225
3—4	3,5	4	18,67	40	$\frac{4}{3}$ 0,468 = 0,352
4—5	2,5	4	13,33	35	0,380
6—7	3,5	4	18,67	40	0,468
7—8	2,5	4	13,33	35	0,380
2—4	2,5	5	26,04	60	0,435
2—5	2,5	6	45,00	69,5	0,650
4—7	2,5	5	26,04	75	0,348
5—8	2,5	7	71,46	75	0,950
7—9	2,5	5	26,04	55	$\frac{3}{4}$ 0,473 = 0,355

Momentele de încastrare perfectă (calculate cu ajutorul tabelei 1):

$$\bar{M}^{(2)}_{2-5} = \bar{M}^{(5)}_{2-5} = \frac{1}{12} 1{,}726 \times 6{,}95^2 = 6{,}92 \text{ tm}$$

$$\bar{M}^{(5)}_{5-8} = \bar{M}^{(8)}_{5-8} = \frac{1}{12} 2{,}50 \times 7{,}50^2 = 11{,}70 \text{ tm}$$

$$\bar{M}^{(7)}_{7-9} = 0{,}1563 \times 4 \times 5{,}50 \times 3 = 10{,}40 \text{ tm}$$

(din tabelă, pentru $n = 3$, $\mu_5 = 0{,}1563$).

Semnele momentelor de încastrare perfectă:
Ținînd seama de convenția de semn conform fig. 44, avem:

$$\bar{M}^{(2)}_{2-5} = + 6{,}92 \text{ tm}; \quad \bar{M}^{(5)}_{2-5} = - 6{,}92 \text{ tm}$$

$$\bar{M}^{(5)}_{5-8} = + 11{,}70 \text{ tm}; \quad \bar{M}^{(8)}_{5-8} = - 11{,}70 \text{ tm}$$

$$\bar{M}^{(7)}_{7-9} = + 10{,}40 \text{ tm}$$

Scanned with OKEN Scanner

Momente neechilibrate la noduri:

$\overline{M}_2 = +6{,}92$ tm; $\overline{M}_5 = -6{,}92 + 11{,}70 = +4{,}78$ tm; $\overline{M}_8 = -11{,}70$ tm;

$\overline{M}_7 = +10{,}40$ tm

Sumele rigidităților la noduri:

$$\Sigma\rho_2 = 0{,}225 + 0{,}435 + 0{,}650 = 1{,}310$$

$$\Sigma\rho_4 = 0{,}352 + 0{,}380 + 0{,}435 + 0{,}650 = 1{,}515$$

$$\Sigma\rho_5 = 0{,}380 + 0{,}650 + 0{,}950 = 1{,}980$$

$$\Sigma\rho_7 = 0{,}468 + 0{,}348 + 0{,}380 + 0{,}355 = 1{,}551$$

$$\Sigma\rho_8 = 0{,}950 + 0{,}380 = 1{,}330$$

Coeficienții de transmitere:

— spre nodul *2*:
$$t_{4\to 2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}435}{1{,}310} = -0{,}166$$
$$t_{5\to 2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}650}{1{,}310} = -0{,}248$$

— spre nodul *4*;
$$t_{2\to 4} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}435}{1{,}515} = -0{,}143$$
$$t_{5\to 4} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}380}{1{,}515} = -0{,}126$$
$$t_{7\to 4} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}348}{1{,}515} = -0{,}114$$

În același mod sînt calculați și ceilalți coeficienți de transmitere, care sînt înscriși în schema fig. 47.

Valorile inițiale ale rotirilor:

$$\theta_2'^{(1)} = +\frac{6{,}92}{4\times 1{,}310} = +1{,}320; \quad \theta_7'^{(1)} = +\frac{10{,}40}{4\times 1{,}551} = +1{,}675$$

$$\theta_5'^{(1)} = +\frac{4{,}78}{4\times 1{,}980} = +0{,}602; \quad \theta_8'^{(1)} = -\frac{11{,}70}{4\times 1{,}330} = -2{,}200$$

Pentru a avea un ordin de mărime mai comod în calculul numeric, s-au considerat în locul valorilor θ' valorile $10\,\theta'$.

Calculul este reprezentat în schema fig. 47. În coloana din dreapta schemei este arătată ordinea de deblocare a nodurilor, cu mărimile corespunzătoare ale tendințelor de rotire deblocate.

Nodul de la care se începe iterația este *8*, unde $\theta'^{(1)} = -22{,}00$ este cea mai mare. După deblocarea nodului *8* se trage o linie sub $\theta_8'^{(1)} = -22{,}00$ și se fac transmiterile la nodurile vecine *5* și *7*. Vom avea atunci:

— spre nodul *5*: $-22{,}00\ (-0{,}240) = +5{,}28$

— spre nodul *7*: $-22{,}00\ (-0{,}123) = +2{,}71$

Cea mai mare tendință de rotire se găsește acum la nodul *7* ($+16{,}75 + 2{,}71 = +19{,}46$). Deblocăm nodul *7*, tragem o linie sub rotirile deblocate și facem transmiterile la nodurile vecine *4* și *8*.

— spre nodul *4*: $+19{,}46\ (-0{,}114) = -2{,}22$

— spre nodul *8*: $+19{,}46\ (-0{,}143) = -2{,}78$

— spre nodurile *9* (articulație) și *6* (încastrare perfectă) nu se fac transmiteri.

Scanned with OKEN Scanner

Calculul continuă astfel în ordinea indicată în coloana din dreapta schemei.

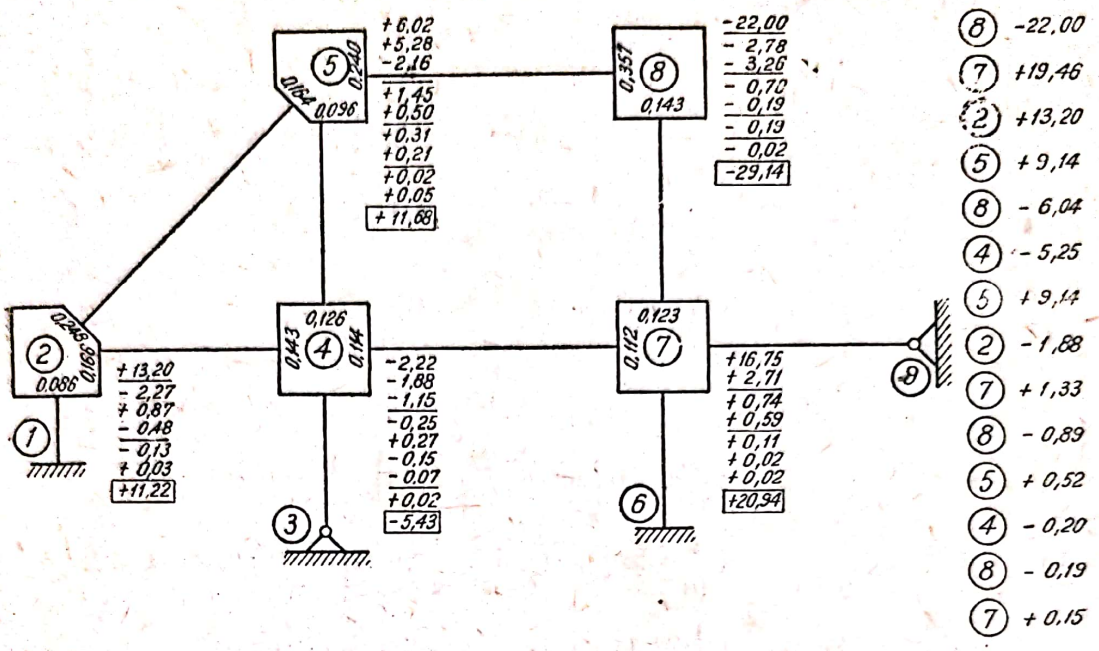


Fig. 47

Momentele la capetele barelor :

(Deoarece s-au luat în calcul rotirile multiplicate cu 10, la determinarea momentelor împărțim cu 10 valorile rezultate din schemă)

$$M_{1-2}^{(1)} = -4\,\frac{1}{10}\,0{,}225\left(0+\frac{1}{2}\,11{,}22\right) = -0{,}5\ \text{tm}$$

$$M_{1-2}^{(2)} = -4\,\frac{1}{10}\,0{,}225\left(11{,}22+\frac{1}{2}\,0\right) = -1{,}0\ \text{tm}$$

(momentul la un capăt de bară încastrat perfect rezultă egal cu $\frac{1}{2}$ din momentul de la celălalt capăt al barei, dacă bara nu este încărcată.)

$$M_{2-4}^{(2)} = -4\,\frac{1}{10}\,0{,}435\left(11{,}22-\frac{1}{2}\,5{,}43\right) = -1{,}5\ \text{tm}$$

$$M_{2-4}^{(4)} = -4\,\frac{1}{10}\,0{,}435\left(-5{,}43+\frac{1}{2}\,11{,}22\right) = 0{,}03\ \text{tm} \sim 0$$

$$M_{2-5}^{(2)} = -4\,\frac{1}{10}\,0{,}650\left(11{,}22+\frac{1}{2}\,11{,}68\right)+6{,}92 = +2{,}5\ \text{tm}$$

$$M_{2-5}^{(5)} = -4\,\frac{1}{10}\,0{,}650\left(11{,}68+\frac{1}{2}\,11{,}22\right)-6{,}92 = -11{,}5\ \text{tm}$$

$$M_{5-8}^{(5)} = -4\,\frac{1}{10}\,0{,}950\left(11{,}68-\frac{1}{2}\,29{,}14\right)+11{,}70 = +12{,}8\ \text{tm}$$

$$M_{5-8}^{(8)} = -4\,\frac{1}{10}\,0{,}950\left(-29{,}14+\frac{1}{2}\,11{,}68\right)-11{,}70 = -2{,}9\ \text{tm}$$

$$M_{4\ 5}^{(4)} = -4\,\frac{1}{10}\,0{,}380\left(-5{,}43+\frac{1}{2}\,11{,}68\right) = -0{,}1\ \text{tm}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$M_{4-5}^{(5)} = -4\frac{1}{10}\,0{,}380\left(11{,}68 - \frac{1}{2}\,5{,}43\right) = -1{,}3 \text{ tm}$$

$$M_{3-4}^{(4)} = -4\frac{1}{10}\,0{,}352\,(-5{,}43) = +0{,}8 \text{ tm}$$

$$M_{4-7}^{(4)} = -4\frac{1}{10}\,0{,}348\left(-5{,}43 + \frac{1}{2}\,20{,}94\right) = -0{,}7 \text{ tm}$$

$$M_{4-7}^{(7)} = -4\frac{1}{10}\,0{,}348\left(20{,}94 - \frac{1}{2}\,5{,}43\right) = -2{,}5 \text{ tm}$$

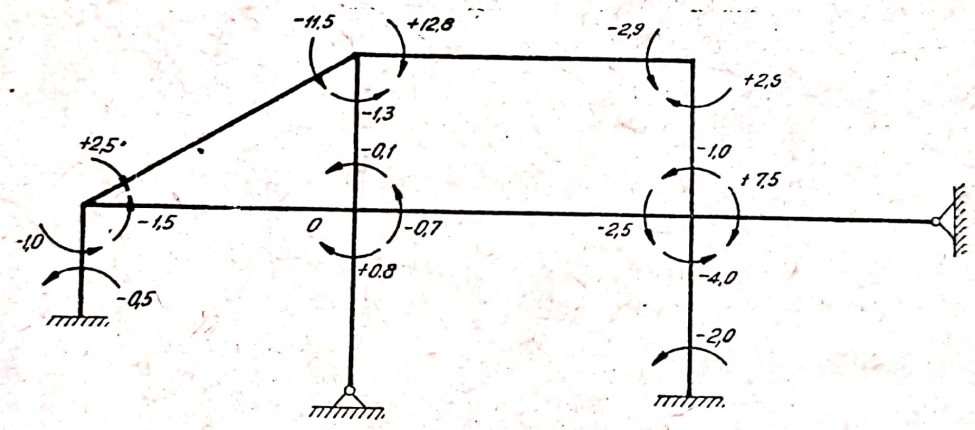
$$M_{6-7}^{(7)} = -4\frac{1}{10}\,0{,}468\,(20{,}94) = -4{,}0 \text{ tm}$$

$$M_{6-7}^{(6)} = -\frac{1}{2}\,3{,}92 = -2{,}0 \text{ tm}$$

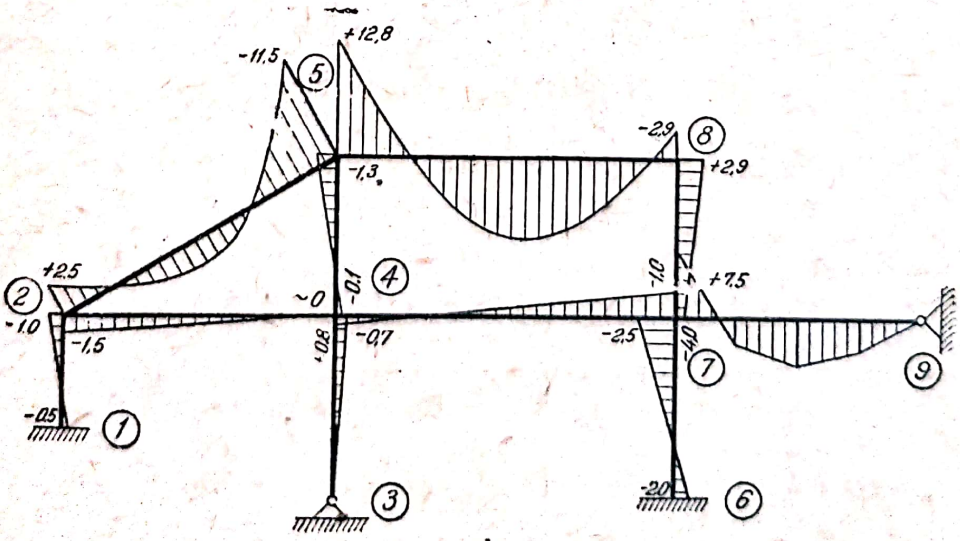
$$M_{7-8}^{(7)} = -4\frac{1}{10}\,0{,}380\left(20{,}94 - \frac{1}{2}\,29{,}14\right) = -1{,}0 \text{ tm}$$

$$M_{7-8}^{(8)} = -4\frac{1}{10}\,0{,}380\left(-29{,}14 + \frac{1}{2}\,20{,}94\right) = +2{,}9 \text{ tm}$$

$$M_{7-9}^{(7)} = -4\frac{1}{10}\,0{,}355\,(20{,}94) + 10{,}40 = +7{,}5 \text{ tm}$$



(2)



(b)

Fig. 48

Verificarea echilibrului momentelor în jurul nodurilor : exemplu nodul $5 = -11{,}42 + 12{,}79 - 1{,}37 = 0$, etc.

Diagrama momentelor este arătată în fig. 48 *b*.

C. SCRIEREA SISTEMULUI DE ECUAȚII ȘI REZOLVAREA LUI PRIN ITERAȚIE CÎND SE IAU CA NECUNOSCUTE MOMENTELE LA CAPETELE BARELOR

I. Scrierea ecuațiilor (de tipul 1.5, 1.7)

Se procedează în modul arătat la stabilirea ecuației (1.7) din cazul general.

Din :

$$\overline{M}_{jk}^{(j)} = \frac{2m_j + m_k}{3}; \quad \overline{M}_{jk}^{(k)} = \frac{2m_k + m_j}{3}$$

se deduc expresiile lui m_j și m_k în funcție de $\overline{M}_{jk}^{(j)}$, $\overline{M}_{jk}^{(k)}$. Rezultă :

$$\begin{cases} m_j = 2\,\overline{M}_{jk}^{(j)} + \overline{M}_{jk}^{(k)} \\ m_k = 2\,\overline{M}_{jk}^{(k)} + \overline{M}_{jk}^{(j)} \end{cases}$$

și se înlocuiesc în relațiile (4.8).

$$\theta_j = \frac{l_{jk}}{6EI_{jk}}[-2\,M_{jk}^{(j)} + M_{jk}^{(k)} + m_j] = \frac{l_{jk}}{6EI_{jk}}[-2\,M_{jk}^{(j)} + \\ + M_{jk}^{(k)} + 2\,\overline{M}_{jk}^{(j)} - \overline{M}_{jk}^{(k)}]$$

$$\theta_j = \frac{l_{jk}}{6EI_{jk}}[-2\,(M_{jk}^{(j)} - \overline{M}_{jk}^{(j)}) + (M_{jk}^{(k)} - \overline{M}_{jk}^{(k)})] \qquad (4.16)$$

Se obține pentru fiecare capăt de bară cîte o ecuație (4.16), corespunzătoare la (1.7) și în care necunoscutele sînt momentele la capetele barelor $M_{jk}^{(j)}$, $M_{jk}^{(k)}$. In afară de acestea, rămîn nedeterminați și parametrii θ_j, deci va fi nevoie în plus de cîte o ecuație la fiecare nod. Ecuațiile suplimentare de nod sînt condițiile de echilibru ale momentelor în jurul nodurilor :

$$\Sigma M_{jk}^{(j)} = 0 \qquad (4.17)$$

(de tipul 1.5)

Sistemul de ecuații (4.16), (4.17), urmează să fie rezolvat prin iterație.

II. Rezolvarea prin iterație (metoda „repartizării momentelor")

În ecuațiile capetelor de bare (4.16) este avantajos să se considere ca necunoscută principală momentul de la capătul de bară pentru care s-a scris ecuația. Astfel, convergența este asigurată, întrucît singura necunoscută care mai intră în ecuație, în afară de necunoscuta principală, este momentul de la celălalt capăt al barei, iar coeficientul acestei necunoscute este jumătate din cel al necunoscutei principale, deci criteriul lui Wittmeyer este satisfăcut în fiecare ecuație.

În ecuația (4.16) se explicitează necunoscuta principală $M_{jk}^{(j)}$:

$$M_{jk}^{(j)} = \overline{M}_{jk}^{(j)} - \frac{3EI_{jk}}{l_{jk}}\,\theta_j + \frac{1}{2}(M_{jk}^{(k)} - \overline{M}_{jk}^{(k)}) \qquad (4.18)$$

Scanned with OKEN Scanner

Coeficientul de transmitere de la capătul k la capătul j al barei jk va fi :

$$t_{k \to j} = +\frac{1}{2} \tag{4.19}$$

Mersul iterației este următorul : inițial, toate nodurile sînt blocate deci toate barele perfect încastrate la capete. Solicitările exterioare ale sistemului de bază, aplicate la noduri, sînt momentele neechilibrate, formate din suma algebrică în jurul nodurilor a momentelor de încastrare perfectă ale barelor încărcate, plus eventualele momente exterioare aplicate direct asupra nodurilor cadrului. În această situație, în ecuațiile (4.16) termenii liberi, care cuprind pe θ, sînt necunoscuți, deci iterația trebuie începută cu rezolvarea ecuațiilor de nod (4.17).

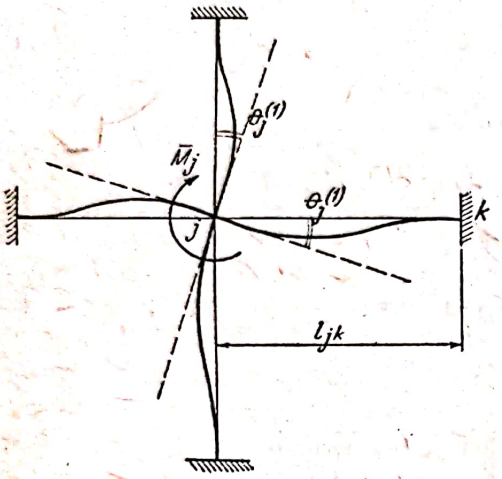


Fig. 49

Rezolvarea unei ecuații de nod constă în deblocarea nodului și scrierea condiției de echilibru.

Deblocînd nodul j (fig. 49), el capătă sub acțiunea momentului exterior $\bar{M}_j$ o rotire $\theta_j^{(1)}$. În acest timp nodurile vecine k rămîn blocate. Deci, conform relației (4.12) :

$$\theta_j^{(1)} = \frac{\bar{M}_j}{\Sigma K_{jk}^{(j)}}$$

Capetele din j ale barelor jk se încarcă cu momentele :

$$M_{jk}^{(j)} = -K_{jk}^{(j)}\,\theta_j^{(1)} = -\bar{M}_j \frac{K_{jk}^{(j)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)}} = -\bar{M}_j\, r_{jk}^{(j)}$$

unde

$$r_{jk}^{(j)} = \frac{K_{jk}^{(j)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)}} = \frac{\rho_{jk}^{(j)}}{\Sigma \rho_{jk}^{(j)}} \tag{4.20}$$

(coresp. la 2.18)

Deci, sub efectul unui moment exterior $\bar{M}_j$ aplicat în nodul j, capetele din j ale barelor jk (în ipoteza că aceste bare sînt perfect încastrate la capetele opuse) se încarcă cu momente proporționale cu rigiditățile lor. Se poate spune că momentul exterior se repartizează între capetele de bare proporțional cu rigiditățile. De aceea coeficienții r sînt numiți *coeficienți de repartiție* sau *rigidități relative*.

Momentele la capetele barelor, obținute prin repartizarea momentelor $\bar{M}_j$, constituie prima corecție adusă valorilor inițiale (momentelor de încastrare perfectă). Cu aceste momente trebuie acum verificate ecuațiile

Scanned with OKEN Scanner

(4.16). Pentru aceasta ele se transmit cu coeficientul $+\frac{1}{2}$ (4.19) între capetele barelor.

După transmitere, ecuațiile (4.16) sînt verificate, însă nodurile nu mai sînt în echilibru, existînd în jurul nodurilor noi momente transmise, a căror sumă nu este zero, deci ecuațiile (4.17) nu mai sînt verificate.

Să notăm suma momentelor transmise spre nodul j cu $\overline{M}_j^{(2)}$. Pentru a rezolva din nou ecuația (4.17) la nodul j, deblocăm acest nod, păstrînd blocate nodurile k.

Vom avea :

$$\theta_j^{(2)} = \frac{\overline{M}_j^{(2)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)}}$$

Deci vom repeta cu $\overline{M}_j^{(2)}$ operațiunea de repartiție făcută inițial cu $\overline{M}_j$. Astfel echilibrul în noduri este restabilit și la capetele barelor apar noi momente repartizate, care trebuie introduse (transmise) în ecuațiile (4.16).

Astfel calculul continuă prin efectuarea alternativă de transmiteri și repartizări, pînă cînd cantitățile de transmis devin neglijabile.

Operațiunile de transmitere reprezintă rezolvarea prin iterație a ecuațiilor (4.16), *iar operațiunile de repartiție rlezovarea la fiecare treaptă a iterației, a ecuațiilor* (4.17). Efectuînd alternativ transmiterile de momente și repartizările la noduri, se rezolvă prin iterație întregul sistem de ecuații (4.16) și (4.17), obținîndu-se ca rezultat momente la capetele barelor, care verifică ambele grupuri de ecuații.

În ecuațiile (4.16), în afară de necunoscuta principală, apare numai necunoscuta de la celălalt capăt al aceleiași bare, deci și în această metodă de calcul transmiterile se fac tot numai între nodurile direct legate prin bare, astfel că se păstrează avantajul de a putea folosi ca schemă de transmiteri chiar schema cadrului.

III. Semnificația fizică a iterației

Semnificațiile statice ale operațiunilor ce se fac în metoda arătată mai sus sînt cu totul analoge celor din metoda transmiterii rotirilor, deși aici nu sînt atît de evidente, deoarece sistemul de ecuații se complică prin prezența ecuațiilor (4.17), care nu se rezolvă prin iterație, ci se rezolvă direct după fiecare treaptă de rezolvare prin iterație a ecuațiilor (4.16).

Ecuațiile capetelor de bare sînt de forma :

$$\theta_j = \frac{l_{jk}}{6EI_{jk}} \left[-2\left(M_{jk}^{(j)} - \overline{M}_{jk}^{(j)}\right) + M_{jk}^{(k)} - \overline{M}_{jk}^{(k)}\right] = \eta_{jj}\left(M_{jk}^{(j)} - \overline{M}_{jk}^{(j)}\right) + \\ + \eta_{jk}\left(M_{jk}^{(k)} - \overline{M}_{jk}^{(k)}\right) \qquad (4.21)$$

Coeficientul de transmitere :

$$t_{k \to j} = -\frac{\eta_{jk}}{\eta_{jj}} = +\frac{\frac{l_{jk}}{6EI_{jk}}}{\frac{l_{jk}}{3EI_{jk}}} = +\frac{1}{2}$$

Pentru o bară jk (fig. 50), se poate defini coeficientul de transmitere de la capătul k la capătul j prin momentul care apare în capătul j, cînd acesta se consideră încastrat perfect, iar bara este încărcată la celălalt capăt k cu un moment exterior $M_k = 1$.

În adevăr, scriind ecuația (4.21) a capătului j și punînd $\theta_j = 0$ (încastrare perfectă), $M_k = 1$, $\overline{M}_{jk}^{(j)} = 0$, $\overline{M}_{jk}^{(k)} = 0$, avem :

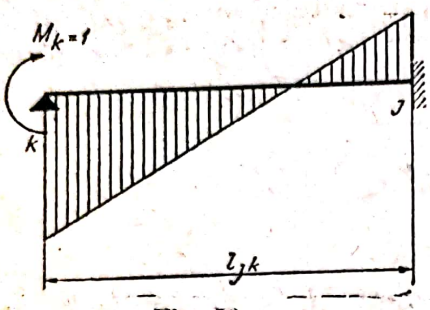


Fig. 50

$$0 = \frac{l_{jk}}{6EI_{jk}}[-2M_{jk}^{(j)} + 1] = \eta_{jj} M_{jk}^{(j)} + \eta_{jk} \times 1$$

de unde :

$$M_{jk}^{(j)} = -\frac{\eta_{jk}}{\eta_{jj}} = +\frac{1}{2} = t_{k \to j}$$

Deblocînd în timpul iterației nodul k și păstrînd nodul j blocat, prin repartiția la capătul k al barei jk apare un moment repartizat $M_{jk}^{(k)}$, iar la capătul j un moment $M_{jk}^{(k)} t_{k \to j}$ (momentul repartizat $M_{jk}^{(k)}$ se transmite la capătul j).

Rezolvarea prin aproximații succesive a sistemului (4.16), (4.17) conduce la metoda de calcul expusă mai sus, care, ca și metoda transmiterii rotirilor, este bine cunoscută și denumită „metoda repartizării momentelor". Este interesant de reamintit că în lucrările în care a fost prezentată inițial această metodă (ex. articolul lui *H. Cross*, v. bibl. 10) ea este dedusă pe bază pur statică și cu o demonstrație mai mult intuitivă. Justificarea teoretică a operațiunilor de pe schema de transmiteri, ca fiind operațiuni din rezolvarea prin iterație a sistemului de ecuații din metoda deplasărilor, a fost enunțată mult mai tîrziu (1938—1940), într-o serie de lucrări ale altor autori, ce au apărut în această perioadă, între care articolul citat al lui *R. Halasz* și — la noi — lucrarea prof. *Cristea Mateescu* (v. bibl. 46).

IV. Mersul calculului

Pe schema cadrului, în jurul fiecărui nod, se înscriu valorile coeficienților de repartiție r. Ca verificare, totdeauna suma coeficienților de repartiție în jurul unui nod trebuie să fie egală cu 1. Coeficienții de transmisie sînt peste tot egali cu $+\frac{1}{2}$, deci nu mai este necesar să fie înscriși pe schemă.

Se înscriu apoi la capetele barelor momentele de încastrare perfectă, cu semnele lor. Convenția de semne este tot cea folosită în metoda transmiterii rotirilor (v. fig. 46) și anume se consideră pozitive momentele care tind să rotească nodul în sensul acelor de ceasornic.

În fig. 51 sînt arătate două noduri vecine ale unui cadru. Presupunînd încărcate barele *4—1*, *1—2*, *2—7*, momentele de încastrare perfectă, cu semnele lor, sînt :

$$\overline{M}_{1-4}^{(1)}, \overline{M}_{1-2}^{(2)} \text{ (negative) și } \overline{M}_{1-2}^{(1)}, \overline{M}_{2-7}^{(2)} \text{ (pozitive).}$$

Ca ordine de calcul în iterație se poate folosi fie procedeul rezolvării „simultane", fie cel al rezolvării „succesive". În ipoteza că adoptăm procedeul „simultan", se fac întîi repartițiile la toate nodurile, cu momentele

exterioare. În nodul (*1*) momentul exterior va fi $\overline{M}_1 = \overline{M}^{(1)}_{1-4} + \overline{M}^{(1)}_{1-2}$. Repartizînd pe $\overline{M}_1$, la capătul din *1* al barei *1—2* apare momentul:

$$M^{(1)}_{1-2} = - \overline{M}_1 r^{(1)}_{1-2}$$

În nodul (*2*) $\overline{M}_2 = \overline{M}^{(2)}_{1-2} + \overline{M}^{(2)}_{2-7}$. Prin repartizarea lui $\overline{M}_2$, capătul din *2* al barei *1—2* se încarcă cu momentul:

$$M^{(2)}_{1-2} = - \overline{M}_2 r^{(2)}_{1-2}$$

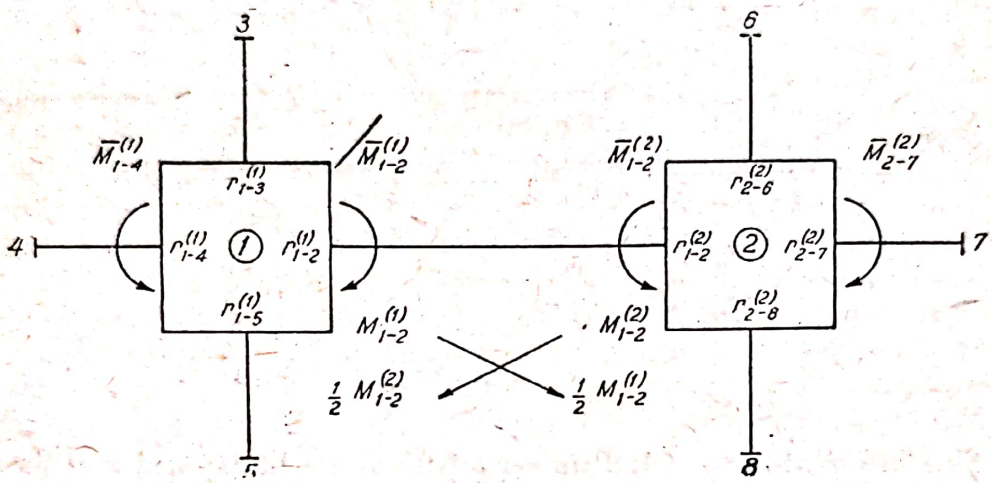


Fig. 51

După ce se efectuează echilibrările (repartiţiile) la toate nodurile, se transmit toate momentele repartizate. Pe bara *1—2* se transmite de la *1* la *2*: $\frac{1}{2} M^{(1)}_{1-2}$, iar de la *2* la *1*: $\frac{1}{2} M^{(2)}_{1-2}$. Transmiterile se marchează de obicei pe schemă prin săgeţi, pentru a se putea mai uşor urmări calculul la o eventuală verificare.

În treapta a doua de calcul, se însumează la noduri cantităţile transmise şi se repartizează din nou. În felul acesta, se continuă iteraţia pînă la obţinerea preciziunii dorite. Cálculul se poate opri fie la transmiteri, fie la repartiţii. Dacă se merge suficient de departe cu iteraţia, operaţiunea pe care se opreşte calculul este indiferentă, deoarece cantităţile de transmis sau de repartizat devin foarte mici. Totuşi, în general este recomandabil ca ultima operaţiune să fie o repartiţie, pentru ca la sfîrşitul calculului momentele obţinute să se echilibreze în jurul nodurilor.

După terminarea iteraţiei, se însumează coloanele de valori la capetele barelor, adăugînd la barele încărcate şi momentul de încastrare perfectă. Se verifică apoi echilibrul la noduri. *Această verificare serveşte însă numai pentru detectarea erorilor de la operaţiunile de repartiţii*, ea reprezentînd numai verificarea ecuaţiilor (4.17). Dacă am vrea să facem un control complet al rezultatelor, ar trebui ca în afară de aceasta să înlocuim valorile momentelor rezultate din calcul şi în ecuaţiile (4.16), pentru a controla dacă rotirile barelor la noduri rezultă egale, respectiv dacă nu s-au strecurat erori şi în operaţiunile de transmitere. De obicei însă, o astfel de verificare nu se mai face, fiind laborioasă.

În ipoteza că se conduce calculul după procedeul rezolvării „succesive" — care este totdeauna mai avantajos pentru rapiditatea convergenței — se lucrează în felul următor :

Se începe echilibrarea nodurilor de la cel la care momentul exterior este cel mai mare. De exemplu, reluînd (fig. 52) porțiunea de cadru din fig. 51, să presupunem că cel mai mare moment exterior este $\overline{M}_1 = \overline{M}^{(1)}_{1-4} + \overline{M}^{(1)}_{1-2}$.

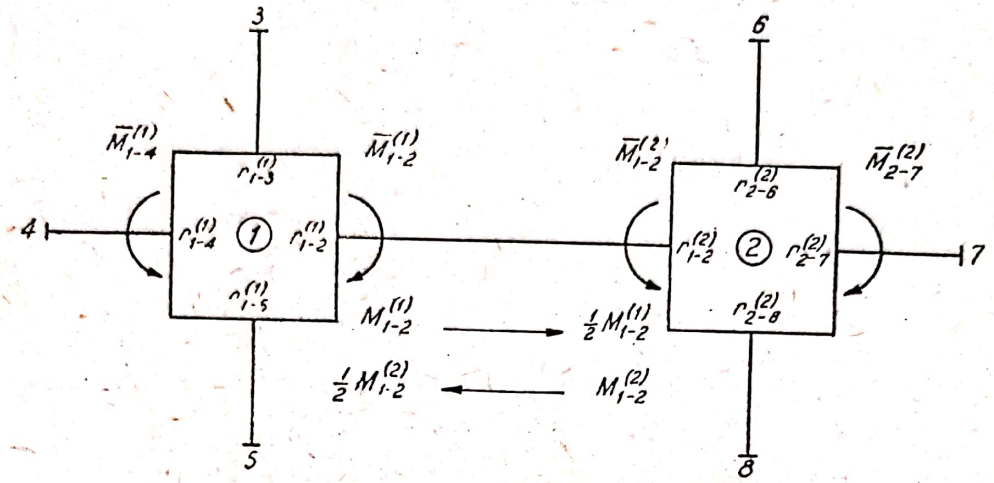


Fig. 52

Se echilibrează nodul 1. Prin repartiție apare la capătul *1* al barei *1—2* momentul $M^{(1)}_{1-2}$. Se fac transmiterile de la nodul *1* la nodurile vecine. La nodul *2* se transmite $\frac{1}{2} M^{(1)}_{1-2}$. Dacă nodul următor de echilibrat este *2*, momentul de repartizat în *2* va fi :

$$\overline{M}_2 = \overline{M}^{(2)}_{1-2} + \overline{M}^{(2)}_{2-7} + \frac{1}{2} M^{(1)}_{1-2}$$

(se ține seama și de ce s-a transmis de la *1*).

Se repartizează $\overline{M}_2$. La capătul *2* al barei *1—2* apare momentul repartizat $M^{(2)}_{1-2} = -\overline{M}_2 r^{(2)}_{1-2}$. Se fac transmiterile de la nodul *2* la nodurile vecine etc.

Practic, la verificarea calculului unui cadru prin metoda repartizării momentelor, se poate observa ușor ce ordine de calcul s-a folosit, după săgețile care indică transmiterile. Dacă săgețile sînt încrucișate (fig. 51), procedeul de iterație folosit este cel „simultan" ; dacă sînt suprapuse (fig. 52), s-a folosit procedeul „succesiv".

În procedeul „succesiv", iterația se termină la fiecare nod tot pe o repartiție, continuînd însă să se transmită numai spre nodurile care încă nu au fost „închise".

În exemplul 7 este refăcut calculul cadrului din exemplul 6 prin metoda repartizării momentelor.

Exemplul 7. Cadru cu noduri fixe, calculat prin metoda repartizării momentelor.

Schema, încărcările, rigiditățile barelor și momentele de încastrare perfectă sînt aceleași ca în exemplul 6.

Coeficienții de repartiție :

Nodul 2 :

$$r_{1-2}^{(2)} = \frac{0{,}225}{1{,}310} = 0{,}172$$

$$r_{2-4}^{(2)} = \frac{0{,}435}{1{,}310} = 0{,}333$$

$$r_{2-5}^{(2)} = \frac{0{,}650}{1{,}310} = 0{,}495$$

Nodul 4 :

$$r_{3-4}^{(4)} = \frac{0{,}352}{1{,}515} = 0{,}233$$

$$r_{2-4}^{(4)} = \frac{0{,}435}{1{,}515} = 0{,}287$$

$$r_{4-5}^{(4)} = \frac{0{,}380}{1{,}515} = 0{,}252$$

$$r_{4-7}^{(4)} = \frac{0{,}348}{1{,}515} = 0{,}228$$

Nodul 5 :

$$r_{4-5}^{(5)} = \frac{0{,}380}{1{,}980} = 0{,}192$$

$$r_{2-5}^{(5)} = \frac{0{,}650}{1{,}980} = 0{,}328$$

$$r_{5-8}^{(5)} = \frac{0{,}950}{1{,}980} = 0{,}480$$

Nodul 7 :

$$r_{6-7}^{(7)} = \frac{0{,}468}{1{,}551} = 0{,}303$$

$$r_{4-7}^{(7)} = \frac{0{,}348}{1{,}551} = 0{,}225$$

$$r_{7-8}^{(7)} = \frac{0{,}380}{1{,}551} = 0{,}246$$

$$r_{7-9}^{(7)} = \frac{0{,}355}{1{,}551} = 0{,}226$$

Nodul 8 :

$$r_{7-8}^{(8)} = \frac{0{,}380}{1{,}330} = 0{,}286$$

$$r_{5-8}^{(8)} = \frac{0{,}950}{1{,}330} = 0{,}714$$

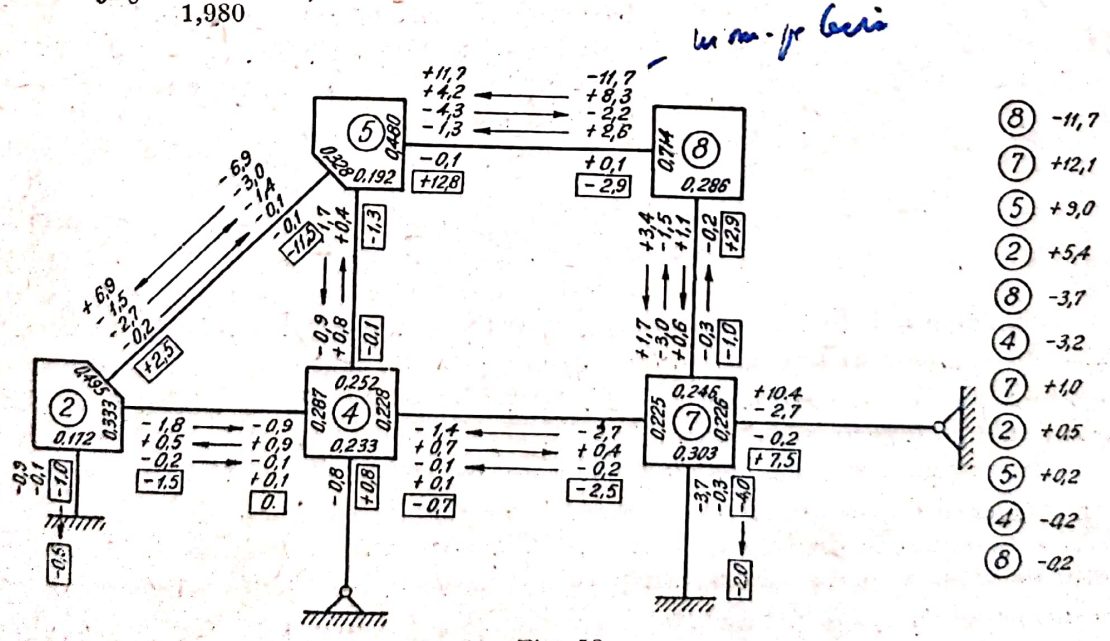


Fig. 53

Schema de calcul este dată în fig. 53.

Inițial, cel mai mare moment exterior se găsește la nodul *8*: $\overline{M}_8 = -11{,}7$ tm. Acesta se repartizează între barele *5—8* și *7—8*.

— la bara *5—8*: $-11{,}7\,(-0{,}714) = +8{,}3$

— la bara *7—8*: $-11{,}7\,(-0{,}286) = +3{,}4$

Se transmite: la nodul *5*: $+8{,}3\,\frac{1}{2} = +4{,}2$, la nodul *7*: $+3{,}4\,\frac{1}{2} = +1{,}7$. Acum cel mai mare moment exterior se găsește la nodul *7*: $\overline{M}_7 = +10{,}4 + 1{,}7 = +12{,}1$, care se repartizează și se transmite. Urmează nodul *5*, unde $\overline{M}_5 = -6{,}9 + 11{,}7 + 4{,}2 = +9{,}0$ etc.

Ordinul de mărime al momentelor de încastrare perfectă fiind 6,9; 11,7; 10,4 ~ 10 tm, s-a ales ca eroare admisibilă 1% din 10 tm = 0,1 tm. Deci cantități sub 0,1 tm nu se mai transmit.

Terminarea iterației: de la a doua echilibrare a nodului *7* cantitățile transmise sînt: — 0,2; — 0,2; — 0,3; — 0,3 tm. Deci se poate începe închiderea nodurilor. Se închide nodul *7*, făcînd transmiterile la celelalte noduri. Apoi urmează nodul *2*. Cînd se închide nodul *5*, nu se mai transmite înapoi la *2*, care fusese închis etc.

V. Metoda repartizării momentelor în forma simplificată (metoda Dašek)

Față de metoda repartizării momentelor, în forma în care a fost expusă mai sus, se obține o simplificare organizînd calculul după sistemul propus de prof. *V. Dašek* (v. bibl. 16, 17 și 18).

Dacă într-o treaptă oarecare a iterației, $\overline{M}_j$ este momentul neechilibrat în nodul j (fig. 54), prin deblocarea nodului j capătul din j al barei jk se încarcă cu momentul repartizat $M_{jk}^{(j)} = -\overline{M}_j r_{jk}^{(j)}$, iar la capătul din k al barei se transmite momentul $M_{jk}^{(k)} = M_{jk}^{(j)} t_{j\to k} = -\overline{M}_j r_{jk}^{(j)} t_{j\to k}$, deci în nodul blocat k apare un moment neechilibrat $\overline{M}_k = -\overline{M}_j r_{jk}^{(j)} t_{j\to k}$.

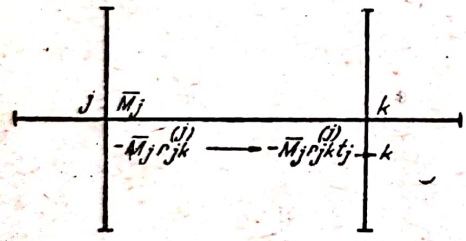


Fig. 54

Luînd ca necunoscute, în locul momentelor la capetele barelor, momentele neechilibrate la noduri $\overline{M}_j$, $\overline{M}_k$, se obține o schemă cu cîte o singură necunoscută la fiecare nod și cu coeficientul de transmitere:

$$t'_{j\to k} = -t_{j\to k}\, r_{jk}^{(j)} \qquad (4.22)$$

Coeficientul de transmitere $t'_{j\to k}$ poate fi definit din punct de vedere static ca momentul neechilibrat ce apare în k sub efectul unui moment exterior $\overline{M}_j = 1$, acționînd în j, cînd se deblochează numai nodul j, celelalte noduri ale cadrului rămînînd blocate.

În cursul iterației, operațiunile de repartiție la noduri dispar astfel ca operațiuni distincte, fiecare transmitere cu $t'_{j\to k}$ înglobînd o repartiție în j și o transmitere de la j la k din metoda obișnuită. Însumînd la sfîrșitul iterației coloanele de valori din jurul unui nod j, se obține *momentul total neechilibrat* $\overline{M}_j$ (suma momentelor neechilibrate din toate treptele iterației). Acesta se repartizează apoi la capetele de bare din nod, cu coeficienții obiș-

Scanned with OKEN Scanner

nuiți $r_{jk}^{(j)}$, obținîndu-se la fiecare capăt de bară *momentul total repartizat* (suma momentelor repartizate din toate treptele iterației). Adunînd la un capăt de bară momentul total repartizat la coloana de momente transmise, rezultă valoarea finală a momentului la capătul de bară respectiv.

Esența metodei Dašek constă deci în a înlocui repartizarea în fiecare treaptă de calcul a momentelor neechilibrate, cu o repartizare unică finală a sumei momentelor neechilibrate din toate treptele de calcul. Ca rezultat practic, se obține o reducere la jumătate a numărului de înmulțiri necesare în metoda obișnuită.

Mersul calculului : În jurul nodurilor se înscriu, în locul coeficienților de repartiție $r_{jk}^{(j)}$, coeficienții $t_{j\to k}$. Se înscriu la capetele barelor momentele de încastrare perfectă, iar apoi se deblochează nodurile succesiv, după metoda obișnuită, transmițînd momentul neechilibrat direct la nodurile vecine. După terminarea transmiterilor, se adună valorile din coloanele din jurul unui nod, suma se repartizează capetelor de bare, iar cantitățile repartizate se adună la cele din coloanele de momente respective, căpătîndu-se valorile finale ale momentelor la capetele barelor.

În exemplul 8 s-a recalculat cadrul din exemplele 6 și 7 prin metoda Dašek.

Exemplul 8. Cadru cu noduri fixe, calculat prin metoda Dašek.

Schema, încărcările, rigiditățile barelor și momentele de încastrare perfectă sînt cele din exemplul 6. Cum toate barele au secțiunea constantă, avem totdeauna $t_{j\to k} = \frac{1}{2}$ și deci $t'_{j\to k} = -\frac{1}{2} r_{jk}^{(j)}$. Valorile $r_{jk}^{(j)}$ sînt cele calculate în exemplul 7.

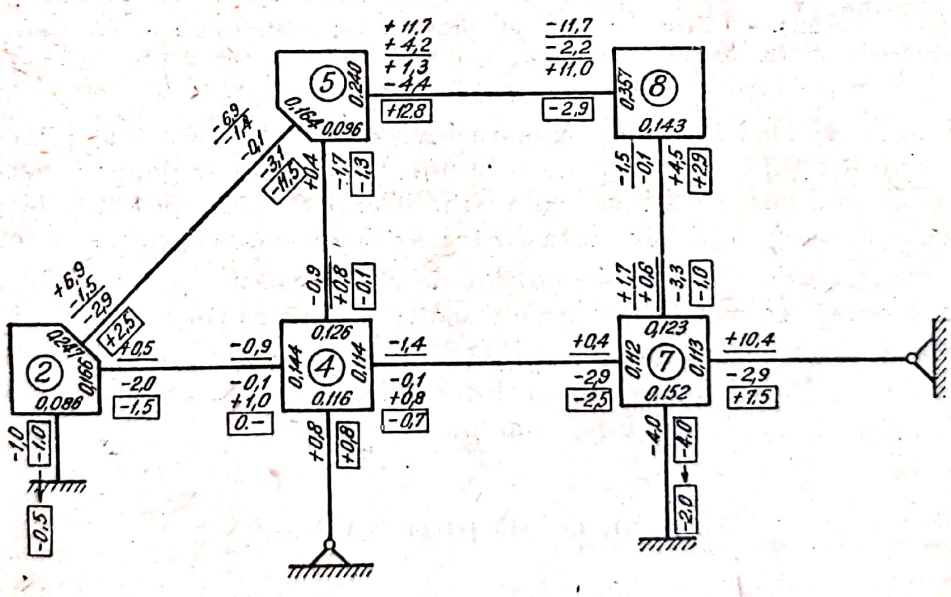


Fig. 55

Schema de transmiteri este arătată în fig. 55. Ordinea de echilibrare a nodurilor nu diferă de cea din fig. 53. Primul nod care se deblochează este nodul *8*, unde momentul neechilibrat este cel mai mare : — 11,7 tm.

Se transmite :

— la *5* : $+ 11{,}7 \times 0{,}357 = + 4{,}2$ tm

— la *7* : $+ 11{,}7 \times 0{,}143 = + 1{,}7$ tm

Se corectează apoi nodul 7, unde $\overline{M}_7 = +10{,}4 + 1{,}7 = +12{,}1$ tm.

Se transmite:

$$\text{— la } 8: \quad -12{,}1 \times 0{,}123 = -1{,}5 \text{ tm}$$

$$\text{— la } 4: \quad -12{,}1 \times 0{,}112 = -1{,}4 \text{ tm}$$

Urmează corectarea nodului 5, unde $\overline{M}_5 = +11{,}7 - 6{,}9 + 4{,}2 = +9{,}0$ tm. Se transmite:

$$\text{— la } 2: \quad -9{,}0 \times 0{,}164 = -1{,}5 \text{ tm}$$

$$\text{— la } 4: \quad -9{,}0 \times 0{,}096 = -0{,}9 \text{ tm}$$

$$\text{— la } 8: \quad -9{,}0 \times 0{,}240 = -2{,}2 \text{ tm}$$

etc.

După terminarea transmiterilor (cantități de la 0,2 tm în jos nu se mai transmit), se fac repartițiile finale. La nodul 8, momentul total neechilibrat: $-11{,}7 - 2{,}2 - 1{,}5 - 0{,}1 = -14{,}5$ tm. Se repartizează:

$$\text{— la bara } 5\text{—}8: \quad +14{,}5 \times 0{,}714 = +11{,}0 \text{ tm}$$

$$\text{— la bara } 8\text{—}7: \quad +14{,}5 \times 0{,}286 = +4{,}5 \text{ tm}$$

Momentele finale:

$$M^{(8)}_{5-8} = -11{,}7 - 2{,}2 + 11{,}0 = -2{,}9 \text{ tm}$$

$$M^{(8)}_{8-7} = -1{,}5 - 0{,}1 + 4{,}5 = +2{,}9 \text{ tm}$$

Analog se procedează și la celelalte noduri.

Comparînd fig. 53 cu fig. 55, se observă că în schema fig. 55 nu au apărut cifre noi față de cele din schema fig. 53, ci au dispărut numai momentele repartizate, rămînînd înscrise cele trasmise De ex. pe coloana $M^{(8)}_{5-8}$ au rămas: momentul în încastrare perfectă — 11,7 tm și momentul transmis — 2,2 tm, iar în locul momentelor repartizate + 8,3 tm, + 2,6 și + 0,1 tm din cele 3 trepte de calcul, a apărut suma lor, momentul total repartizat + 11,0 tm de la sfîrșitul calculului.

Metoda lui Dašek, deși publicată încă din 1940, nu a fost pînă în prezent prea mult cunoscută și aplicată la noi. După cum se poate constata din exemplul de mai sus, ea aduce reale simplificări față de metoda obișnuită a repartizării momentelor. Un dezavantaj ar fi numai necesitatea cunoașterii pentru repartiția finală a coeficienților de repartiție $r^{(j)}_{jk}$, care altfel nu mai apar pe schemă. În cazul barelor cu secțiune constantă, acest dezavantaj dispare însă, deoarece totdeauna $r^{(j)}_{jk} = -2\,t_{j\to k}$, astfel că repartiția finală se poate face înmulțind momentul total neechilibrat cu 2 și apoi repartizîndu-l cu coeficienții $t_{j\to k}$, înscriși pe schemă.

D. BARE CU SECȚIUNE VARIABILĂ

I. Relațiile între momente și rotiri

Pentru barele cu secțiune variabilă, vom relua relațiile fundamentale (4.1), ținînd seama și de variația momentului de inerție I_x în lungul barei. În acest caz, I_x nu se mai poate scoate de sub integrale, deci relațiile nu se pot pune sub forma (4.2).

Obișnuit, pentru comoditatea calculului, se caută să se pună toate formulele privind o bară cu secțiunea variabilă, sub aceeași formă ca și cele corespunzătoare pentru o bară de secțiune constantă, elementele caracteris-

tice variației secțiunii apărînd sub forma unui coeficient de corecție. Astfel, considerînd un moment de inerție constant I_0 de referință, putem scrie relațiile (4.1) :

$$\left.\begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{l}\int_0^l \frac{Mx'}{EI_x}\,dx = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{Mx'}{EI_x}\cdot\frac{I_0}{I_0}dx = \frac{1}{lEI_0}\int_0^l Mx'\frac{I_0}{I_x}\,dx \\ \theta_B &= \frac{1}{lEI_0}\int_0^l Mx\,\frac{I_0}{I_x}\,dx \end{aligned}\right| \qquad (4.23)$$

care corespund la (4.2).

Ca moment de inerție de referință I_0 se ia de obicei cel mai mic moment de inerție din lungul barei, pentru ca raportul $\frac{I_0}{I_x}$ să fie totdeauna subunitar și astfel să fie mai simplă tabularea diferiților coeficienți ce rezultă în funcție de acest raport.

Rotirile produse la capetele A și B ale unei bare (fig. 42) de un moment aplicat în A :

$$\theta_A = +\frac{M_A}{l^2EI_0}\int_0^l x'^2\,\frac{I_0}{I_x}\,dx\,; \qquad \theta_B = -\frac{M_A}{l^2EI_0}\int_0^l xx'\,\frac{I_0}{I_x}\,dx \qquad \left(M = \frac{x'}{l}M_A\right)$$

Rotirile produse în A și B de un moment aplicat la capătul B :

$$\theta_A = -\frac{M_B}{l^2EI_0}\int_0^l xx'\,\frac{I_0}{I_x}\,dx\,; \qquad \theta_B = +\frac{M_B}{l^2EI_0}\int_0^l x^2\,\frac{I_0}{I_x}\,dx \qquad \left(M = \frac{x}{l}M_B\right)$$

Să aducem aceste relații la forma celor corespunzătoare pentru bare cu secțiune constantă, punînd în evidență coeficienții de corecție pentru variația secțiunii.

Dacă notăm :

$$\begin{aligned} c' &= \frac{3}{l^3}\int_0^l \frac{I_0}{I_x}\,x'^2\,dx\,; & s' &= \frac{\int_0^l \frac{I_0}{I_x}\,\mathfrak{M}x'dx}{\int_0^l \mathfrak{M}x'dx} \\ c'' &= \frac{3}{l^3}\int_0^l \frac{I_0}{I_x}\,x^2\,dx\,; & & \\ c &= \frac{6}{l^3}\int_0^l \frac{I_0}{I_x}\,xx'dx\,; & s'' &= \frac{\int_0^l \frac{I_0}{I_x}\,\mathfrak{M}xdx}{\int_0^l \mathfrak{M}xdx} \end{aligned} \qquad (4.24)$$

(în unele manuale, coeficienții s', s'' sînt notați cu k', k'').

— sub acțiunea unui moment M_A aplicat în A :

$$\theta_A = + \frac{l}{3EI_0} c' ; \qquad \theta_B = - \frac{l}{6EI_0} c$$

— sub acțiunea unui moment M_B aplicat în B :

$$\theta_A = - \frac{l}{6EI_0} c ; \qquad \theta_B = + \frac{l}{3EI_0} c''$$

— sub acțiunea sarcinilor de pe bara AB :

$$\theta_A = \frac{l}{6EI_0} m_A s' ; \qquad \theta_B = \frac{l}{6EI_0} m_B s''$$

Cu aceste notații, relațiile între rotiri și momente devin :

$$\left.\begin{aligned} \theta_A &= \frac{l}{6EI_0} (2c' M_A - c M_B + m_A s') \\ \theta_B &= \frac{l}{6EI_0} (2c'' M_B - c M_A + m_B s'') \end{aligned}\right\} \qquad (4.25)$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_A &= + \frac{3}{4c'c'' - c^2} \cdot \frac{2EI_0}{l} (2c''\ \theta_A + c\ \theta_B) - \frac{2c''s'm_j + cs''m_k}{4c'c'' - c^2} \\ M_B &= + \frac{3}{4c'c'' - c^2} \cdot \frac{2EI_0}{l} (2c'\ \theta_B + c\ \theta_A) - \frac{2c's''m_k + cs'm_j}{4c'c'' - c^2} \end{aligned}} \qquad (4,26)$$

[corespunzător la (4.5)]

Coeficienții de influență :

$$\eta_{AA} = + \frac{c'l}{3EI_0} ; \qquad \eta_{AB} = \eta_{BA} = - \frac{cl}{6EI_0} ; \qquad \eta_{BB} = + \frac{c''l}{3EI_0}$$

$$\nu_{AA} = \frac{3c''}{4c'c'' - c^2} \cdot \frac{4EI_0}{l} ; \qquad \nu_{BB} = \frac{3c'}{4c'c'' - c^2} \cdot \frac{4EI_0}{l}$$

$$\nu_{AB} = \nu_{BA} = \frac{3c}{4c'c'' - c^2} \cdot \frac{2EI_0}{l}$$

Termenii liberi :

$$\varphi_{AB}^{(A)} = \frac{s'lm_A}{6EI_0} ; \qquad \varphi_{AB}^{(B)} = \frac{s''lm_B}{6EI_0}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{M}_A &= - \frac{2c''s'm_j + cs''m_k}{4c'c'' - c^2} \\ \overline{M}_B &= - \frac{2c's''m_k + cs'm_j}{4c'c'' - c^2} \end{aligned}\right\} \qquad (4.27)$$

Scanned with OKEN Scanner

Verificarea relațiilor (1.4) :

$$\nu_{AA} = \frac{\eta_{BB}}{\eta_{AA}\,\eta_{BB} - \eta^2_{AB}} = \frac{\dfrac{c''l}{3EI_0}}{\dfrac{c'l}{3EI_0}\cdot\dfrac{c''l}{3EI_0} - \left(\dfrac{cl}{6EI_0}\right)^2} = \frac{3c''}{4c'c'' - c^2}\cdot\frac{4EI_0}{l}$$

$$\nu_{AB} = -\frac{\eta_{AB}}{\eta_{AA}\,\eta_{BB} - \eta^2_{AB}} = -\frac{\dfrac{cl}{6EI_0}}{\dfrac{c'l}{3EI_0}\cdot\dfrac{c''l}{3EI_0} - \left(\dfrac{cl}{6EI_0}\right)^2} = \frac{3c}{4c'c'' - c^2}\cdot\frac{2EI_0}{l}$$

$$\overline{M}_A = -\nu_{AA}\,\varphi^{(A)}_{AB} - \nu_{AB}\,\varphi^{(B)}_{AB} = -\frac{3c}{4c'c'' - c^2}\left[\frac{4EI_0}{l}\cdot\frac{s'lm_A}{6EI_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{2EI_0}{l}\cdot\frac{s''lm_B}{6EI_0}\right] = -\frac{2c''s'm_j + c\,s''\,m_k}{4\,c'c'' - c^2}$$

Înlocuind în toate calculele relațiile (4.4), (4.5) cu (4.26), (4.27), se obțin elementele necesare pentru rezolvarea prin iterație (rigiditățile, coeficienții de transmitere, momentele de încastrare perfectă).

Totdeauna c' și s' se referă la nodul din stînga (j), c'' și s'' la nodul din dreapta (k), iar c la influențele reciproce între nodurile j și k.

II. Coeficienții de corecție c', c'', c, s', s''

Elementele cu secțiune variabilă întîlnite curent în structurile de rezistență ale clădirilor și podurilor sînt grinzile și stîlpii cu îngroșări (vute) pe reazeme (fig. 56, *a*, *b*, *d*, *e*) sau cu secțiunea variabilă pe toată lungimea lor, (fig. 56, *c*, *e*). Tipurile cele mai frecvente de vute sînt cele drepte sau parabolice.

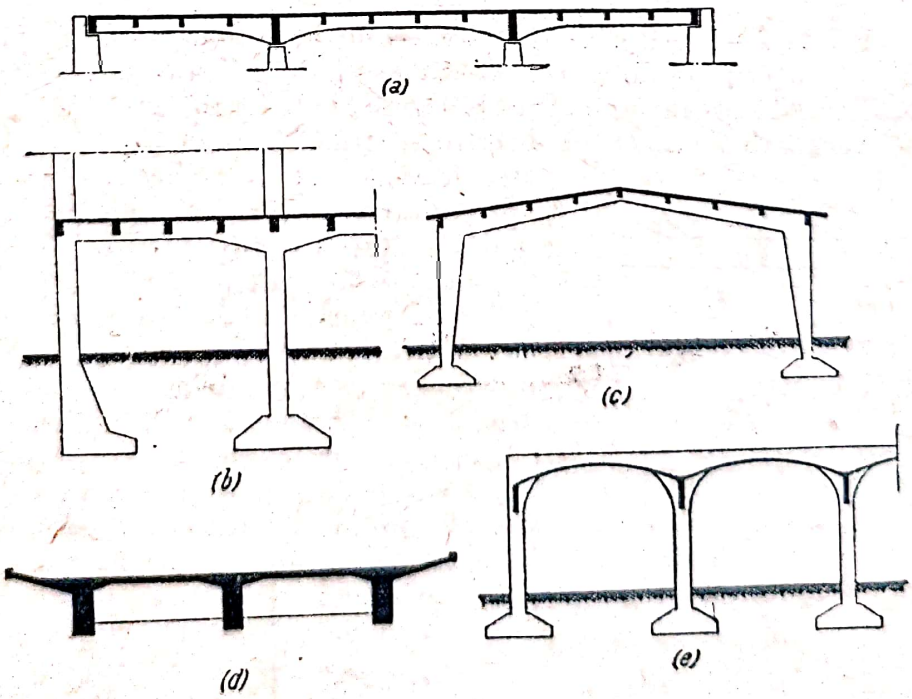


Fig. 56

Se întîlnesc însă şi cazuri speciale : vute de forme neobişnuite, rezultate din respectarea unor anumite cerinţe constructive, îngroşări în spaţiu (prin variaţia atît a înălţimii, cît şi a lăţimii secţiunii), intradosuri curbe (fig. 56, *e*) de formă diferită de parabolă etc.

Pentru bare cu vute drepte şi parabolice, la ambele capete (simetrice) sau numai la un capăt (fig. 57), se găsesc în diferite manuale integralele (4.24) efectuate analitic şi coeficienţii c', c'', c, s', s'' daţi în tabele în funcţie de :

$$\lambda = \frac{\text{lungimea vutei}}{\text{deschiderea barei}} = \frac{l_v}{l}$$

$$n = \frac{I_0}{I_r} = \frac{\text{mom. de inerţie minim}}{\text{mom. de inerţie maxim}} = \left(\frac{h_0}{h_r}\right)^3$$

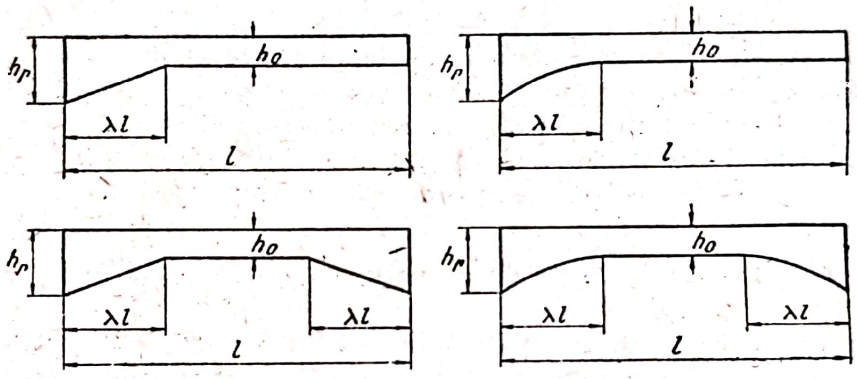


Fig. 57

În tabelele 2—11 sînt date pentru tipurile de bare din fig. 57 valorile c' c'', c, s', s'', în funcţie de λ şi n. Coeficienţii s' şi s'' sînt calculaţi pentru o sarcină uniform distribuită pe toată lungimea barei (tab. 2, 3, 5, 7) şi pentru sarcini concentrate aplicate în diferite secţiuni (tab. 8, 9, 10, 11). Pentru alte cazuri de încărcare, se pot deduce aproximativ s' şi s'' înlocuind sarcina reală cu sarcini concentrate, astfel ca să se poată folosi tabelele.

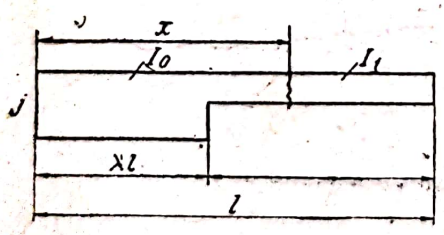


Fig. 58

În calcul, s' şi s'' apar totdeauna ca multiplicatori ai caracteristicilor de încărcare m [v. formulele (4.25)]. De aceea, în tabele s-au dat direct valorile produselor $s'm_A$, $s''m_B$.

În unele cazuri simple, calculul coeficienţilor c', c'', c, s', s'' se poate face analitic, fără dificultăţi. De exemplu, pentru o bară cu moment de inerţie variabil brusc (fig. 58), luînd ca moment de inerţie de referinţă momentul de inerţie al porţiunii îngroşate şi notînd :

$$\frac{I_1}{I_0} = n$$

avem :

$$c = \frac{6}{l^3}\int_0^l \frac{I_0}{I_x}\, xx'dx = \frac{6}{l^3}\left[\int_0^{\lambda l}\frac{I_0}{I_0}\, x(l-x)dx + \int_{\lambda l}^{l}\frac{I_0}{I_1}\, x\,(l-x)\,dx\right] =$$

$$= \frac{6}{l^3}\left[\int_0^{\lambda l} x\,(l-x)\,dx + \frac{1}{n}\int_{\lambda l}^{l} x\,(l-x)dx\right] = \frac{6}{l^3}\left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_0^{\lambda l} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_{\lambda l}^{l}\right] = \frac{6}{l^3}\left[\frac{\lambda^2 l^3}{6}(3-2\lambda) + \frac{1}{n}\cdot\frac{l^3}{6}(1-3\lambda^2+2\lambda^3)\right]$$

$$\boxed{c = \lambda^2\,(3-2\lambda) + \frac{1}{n}(1-3\lambda^2+2\lambda^3)}$$

$$c' = \frac{3}{l^3}\int_0^l \frac{I_0}{I_x}\, x'^2dx = \frac{3}{l^3}\left[\int_0^{\lambda l}\frac{I_0}{I_0}\,(l-x)^2\,dx + \int_{\lambda l}^{l}\frac{I_0}{I_1}\,(l-x)^2dx\right] =$$

$$= \frac{3}{l^3}\left[\int_0^{\lambda l}(l^2 - 2lx + x^2)dx + \frac{1}{n}\int_{\lambda l}^{l}(l^2-2lx+x^2)dx\right] =$$

$$= \frac{3}{l^3}\left[\left(l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3}\right)_0^{\lambda l} + \frac{1}{n}\left(l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3}\right)_{\lambda l}^{l}\right] =$$

$$= \frac{3}{l^3}\left[\frac{\lambda l^3}{3}(3-2\lambda+\lambda^2) + \frac{1}{n}\cdot\frac{l^3}{3}(1-3\lambda+3\lambda^2-\lambda^3)\right]$$

$$\boxed{c' = \lambda(3-3\lambda+\lambda^2) + \frac{1}{n}(1-3\lambda+3\lambda^2-\lambda^3)}$$

$$c'' = \frac{3}{l^3}\int_0^l \frac{I_0}{I_x}\, x^2dx = \frac{3}{l^3}\left[\int_0^{\lambda l}\frac{I_0}{I_0}\, x^2dx + \int_{\lambda l}^{l}\frac{I_0}{I_1}\, x^2dx\right] =$$

$$= \frac{3}{l^3}\left[\int_0^{\lambda l} x^2dx + \frac{1}{n}\int_{\lambda l}^{l} x^2dx\right] = \frac{3}{l^3}\left[\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{\lambda l} + \frac{1}{n}\left(\frac{x^3}{3}\right)_{\lambda l}^{l}\right]$$

$$c'' = \frac{3}{l^3}\left[\frac{\lambda^3 l^3}{3} + \frac{1}{n}\left(\frac{l^3}{3} - \frac{\lambda^3 l^3}{3}\right)\right] = \boxed{\lambda^3 + \frac{1}{n}(1-\lambda^3)}$$

La tipuri similare de bare (cu secţiunea variabilă brusc) se ajunge şi în cazul grinzilor cu reazeme late, cînd se asimilează în calcul reazemele cu nişte îngroşări cu moment de inerţie infinit (v. bibl, 38,39).

Pentru cazurile din fig. 57, calculul analitic al coeficienţilor este expus detaliat în lucrarea p.of. ing. *C. Avram* (v. bibl. 3).

În cazul barelor cu vute oarecare, cînd nu putem folosi tabelele alcătuite pe bază de integrări analitice, coeficienţii caracteristici ai variaţiei sec-

ţiunii pot fi calculaţi direct, înlocuind integrările prin însumări. Sînt atunci de calculat sumele :

$$\sum_0^l \frac{I_0}{I_x} x^2 \Delta x ; \quad \sum_0^l \frac{I_0}{I_x} x'^2 \Delta x ; \quad \sum_0^l \frac{I_0}{I_x} x x' \Delta x ;$$

$$\sum_0^l \frac{I_0}{I_x} \mathfrak{M} x \Delta x ; \quad \sum_0^l \frac{I_0}{I_x} \mathfrak{M} x' \Delta x ; \quad \sum_0^l \mathfrak{M} x dx ; \quad \sum_0^l \mathfrak{M} x' dx.$$

Se împarte bara într-un număr de părţi de lungime egală Δx, de exemplu în 10 părţi (fig. 59). În secţiunile care delimitează aceste părţi se calculează distanţele x, x' la cele două capete ale barei şi momentele $\mathfrak{M}$ (momentele încovoietoare considerînd bara simplu rezemată la capete). Se alege secţiunea al cărei moment de inerţie va fi luat ca referinţă : se determină pentru fiecare secţiune înălţimea (h_x), lăţimea (b_x) şi se calculează momentul de inerţie I_x şi raportul $\frac{I_0}{I_x}$. Calculul se organizează pe o tabelă. În dreptul fiecărei

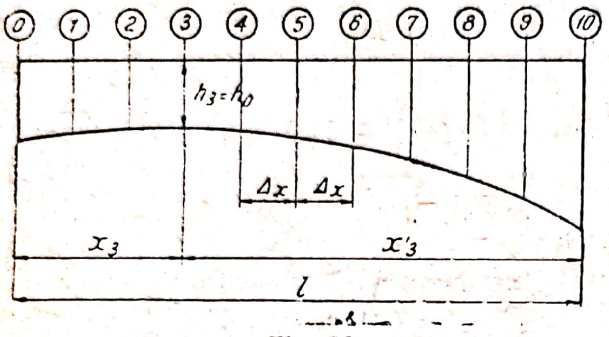


Fig. 59

Secţiunea	x	x'	h_x	b_x	I_x	$\frac{I_0}{I_x}$	$\mathfrak{M}$	$\frac{I_0}{I_x} x^2$	$\frac{I_0}{I_x} xx'$	$\frac{I_0}{I_x} x'^2$	$\mathfrak{M}x$	$\mathfrak{M}x'$	$\mathfrak{M}x \frac{I_0}{I_x}$	$\mathfrak{M}x' \frac{I_0}{I_x}$
0														
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
Σ	—	—	—	—	—	—	—	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7

Scanned with OKEN Scanner

secțiuni, se trec în tabelă cantitățile $\frac{I_0}{I_x}x^2, \frac{I_0}{I_x}xx', \frac{I_0}{I_x}x'^2, \mathfrak{M}x, \mathfrak{M}x', \mathfrak{M}x\frac{I_0}{I_x}$, $\mathfrak{M}x'\frac{I_0}{I_x}$.

Însumarea coloanelor se poate face direct sau folosind regula lui Simpson. În cazul că se folosește regula lui Simpson, se mai adaugă la fiecare coloană de însumat o coloană cu cantitățile înmulțite cu coeficienții respectivi (1, 4, 2, 4, 2...4, 2, 4, 1).

Cu ajutorul sumelor $\Sigma_1 \ldots \Sigma_7$ se pot calcula c', c'', c, s', s'':

$$c' = \frac{3\Delta x}{l^3}\Sigma_3; \quad c'' = \frac{3\Delta x}{l^3}\Sigma_1; \quad c = \frac{6\Delta x}{l^3}\Sigma_2;$$

$$s' = \frac{\Sigma_7}{\Sigma_5}; \quad s'' = \frac{\Sigma_6}{\Sigma_4}.$$

(Dacă însumarea se face cu regula lui Simpson, în formulele lui c', c'', c se introduce $\frac{1}{3}\Delta x$ în loc de Δx.)

La barele cu lățimea b_x constantă, coloana b_x nu mai este necesară în tabelă, iar:

$$\frac{I_0}{I_x} = \left(\frac{h_0}{h_x}\right)^3$$

Este mai comod ca în tabelă să se introducă în locul absciselor x abscisele relative $\xi = \frac{x}{l}$, deoarece grinda împărțindu-se în p părți egale, valorile ξ sînt cifre rotunde, $\frac{1}{p}, \frac{2}{p} \ldots \frac{p}{p}$.

Atunci coloanele tabelei sînt:

$$\xi,\ \xi',\ h_x,\ b_x,\ I_x,\ \frac{I_0}{I_x},\ \mathfrak{M},\ \frac{I_0}{I_x}\xi^2,\ \frac{I_0}{I_x}\xi\xi',\ \frac{I_0}{I_x}\xi'^2,\ \mathfrak{M}\xi,\ \mathfrak{M}\xi',\ \mathfrak{M}\frac{I_0}{I_x}\xi,\ \mathfrak{M}\frac{I_0}{I_x}\xi'$$

și avem:

$$\frac{\Delta x}{l} = \frac{1}{p}; \quad c' = \frac{3}{p}\Sigma_3; \quad c'' = \frac{3}{p}\Sigma_1; \quad c = \frac{6}{p}\Sigma_2;$$

$$s' = \frac{\Sigma_7}{\Sigma_5}; \quad s'' = \frac{\Sigma_6}{\Sigma_4}.$$

Se pot calcula și direct produsele:

$$s'm_A = \frac{6}{p}\Sigma_7; \quad s''m_B = \frac{6}{p}\Sigma_6.$$

În acest caz coloanele Σ_4, Σ_5 nu mai sînt necesare.

Determinarea coeficienților c', c'', c, s', s'' se poate face și pe cale grafică, construind la o scară suficient de mare axa deformată a barei (curba funiculară a încărcărilor $\frac{\mathfrak{M}}{EI_x}$) pentru fiecare din cazurile:

— încărcările exterioare de pe bară,
— un moment unitar aplicat la un capăt,
— un moment unitar aplicat la celălalt capăt

și măsurînd unghiurile de rotire pe reazeme ale tangentei la axa deformată.

Construcția grafică este cunoscută, astfel că nu o mai reproducem.

Scanned with OKEN Scanner

III. Rigiditățile barelor

Valoarea rigidității unei bare AB la capătul A se obține punînd în relația (4.26) :

$$M_A = \frac{3}{4c'c'' - c^2} \cdot \frac{2EI_0}{l}(2c''\,\theta_A + c\,\theta_B) + \bar{M}_A$$

$\theta_A = 1$ și $\theta_B = 0$ (încastrare perfectă) și $\bar{M}_A = 0$. Se obține momentul care, aplicat în A, produce în A o rotire unitară, capătul B fiind încastrat perfect.

$$M_A = \boxed{K_{AB}^{(A)} = \frac{3c''}{4c'c'' - c^2} \cdot \frac{4EI_0}{l}}$$

și analog la capătul B :

$$\boxed{K_{AB}^{(B)} = \frac{3c'}{4c'c'' - c^2} \cdot \frac{4EI_0}{l}} \qquad (4.28)$$

Rigiditățile practice :

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_{AB}^{(A)} &= \frac{3c''}{4c'c'' - c^2} \cdot \frac{I_0}{l} \\ \rho_{AB}^{(B)} &= \frac{3c'}{4c'c'' - c^2} \cdot \frac{I_0}{l} \end{aligned}} \qquad (4.29)$$

Dacă bara este articulată la capătul B, rigiditatea la capătul A se obține din relația (4.25) :

$$\theta_A = \frac{l}{6EI_0}(2c'\,M_A - cM_B + m_A\,s')$$

punînd $\theta_A = 1$, $m_A = 0$ și $M_B = 0$ (articulație). Rezultă :

$$M_A = \boxed{K_{AB}^{(A)} = \frac{1}{c'} \cdot \frac{3EI_0}{l}} \qquad (4.30)$$

Rigiditatea practică :

$$\boxed{\rho_{AB}^{(A)} = \frac{1}{c'} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{I_0}{l}} \qquad (4.31)$$

IV. Coeficienții de transmitere

a) *În metoda transmiterii rotirilor*

Relația (4.26), pentru o bară de cadru jk devine (schimbînd semnul deoarece se trece de la momente pe bară la momente pe nod) :

$$M_{jk}^{(j)} = -\frac{3}{4c'c'' - c^2} \cdot \frac{2EI_0}{l_{jk}}(2c''\,\theta_j + c\,\theta_k) + \bar{M}_{jk}^{(j)}$$

$$M_{jk}^{(j)} = -K_{jk}^{(j)}\left(\theta_j + \frac{c}{2c''}\theta_k\right) + \bar{M}_{jk}^{(j)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția de echilibru în jurul nodului j :

$$\sum M_{jk}^{(j)} = 0 ; \quad - \sum K_{jk}^{(j)} \left(\theta_j + \frac{c}{2c''} \theta_k \right) + \sum \overline{M}_{jk}^{(j)} = 0$$

sau :

$$\sum \overline{M}_{jk}^{(j)} = \boxed{\overline{M}_j = \theta_j \sum K_{jk}^{(j)} + \sum \frac{c}{2c''} K_{jk}^{(j)} \theta_k}$$

[corespunzătoare lá (4.10)]

Coeficientul de transmitere de la nodul k la nodul j va fi :

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{t_{k \to j} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{c''} \cdot \frac{K_{jk}^{(j)}}{\sum K_{jk}^{(j)}}} \\ &\text{și analog :} \\ &\boxed{t_{j \to k} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{c'} \cdot \frac{K_{jk}^{(k)}}{\sum K_{jk}^{(k)}}} \end{aligned}\right\} \quad (4.32)$$

b) *În metoda repartizării momentelor*

În locul ecuațiilor (4.16) avem :

$$\left\{\begin{aligned} \theta_j &= \frac{l_{jk}}{6EI_0} \left[-2c' (M_{jk}^{(j)} - \overline{M}_{jk}^{(j)}) + c \, (M_{jk}^{(k)} - \overline{M}_{jk}^{(k)}) \right] \\ \theta_k &= \frac{l_{jk}}{6EI_0} \left[-2c'' \, (M_{jk}^{(k)} - \overline{M}_{jk}^{(k)}) + c \, (M_{jk}^{(j)} - \overline{M}_{jk}^{(j)}) \right] \end{aligned}\right.$$

Explicităm necunoscutele principale :

$$\left\{\begin{aligned} M_{jk}^{(j)} &= \overline{M}_{jk}^{(j)} - \frac{1}{2c'} \cdot \frac{6EI_0}{l_{jk}} \theta_j + \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{c'} (M_{jk}^{(k)} - \overline{M}_{jk}^{(k)}) \\ M_{jk}^{(k)} &= \overline{M}_{jk}^{(k)} - \frac{1}{2c''} \cdot \frac{6EI_0}{l_{jk}} \theta_k + \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{c''} (M_{jk}^{(j)} - \overline{M}_{jk}^{(j)}) \end{aligned}\right.$$

Coeficienții de transmitere rezultă :

$$\boxed{\begin{aligned} t_{k \to j} &= +\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{c'} \\ t_{j \to k} &= +\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{c''} \end{aligned}} \quad (4.33)$$

Expresia coeficientului de repartiție rămîne aceeași ca și în cazul barelor cu secțiune constantă, introducînd pentru rigiditățile barelor expresiile (4.28) — (4.31).

Comparînd (4.32) cu (4.33), se regăsește relația (2.19) între coeficienții de transmitere din operarea cu deplasări și cu solicitări.

Scanned with OKEN Scanner

În operarea cu rotiri :

$$t_{k\to j}^{(0)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{c''}\cdot\frac{K_{jk}^{(j)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)}}$$

În operarea cu momente :

$$t_{j\to k}^{(M)} = +\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{c''}\,; \qquad r_{jk}^{(j)} = \frac{K_{jk}^{(j)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)}}$$

$$\boxed{t_{k\to j}^{(0)} = -t_{j\to k}^{(M)}\, r_{jk}^{(j)}} \tag{4.34}$$

V. Momente de încastrare perfectă

Schimbînd semnele în relațiile (4.27), corespunzător trecerii de la momente pe bară la momente pe nod :

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{M}_{jk}^{(j)} &= \frac{2\,c''s'\,m_j + cs''\,m_k}{4\,c'c'' - c^2} \\ \overline{M}_{jk}^{(k)} &= \frac{2\,c's''\,m_k + cs'\,m_j}{4\,c'c'' - c^2} \end{aligned}} \tag{4.35}$$

Putem scrie (4.35) și sub forma :

$$\overline{M}_{jk}^{(j)} = \frac{3\,c''}{4\,c'c'' - c^2}\cdot\frac{2}{3}\left(s'\,m_j + \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{c''}\,s''\,m_k\right)$$

și, înlocuind :

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{c''} = t_{j\to k}\,; \qquad \frac{3\,c''}{4\,c'c'' - c^2}\cdot\frac{I_0}{l_{jk}} = \rho_{jk}^{(j)}$$

obținem :

$$\left.\begin{aligned} \overline{M}_{jk}^{(j)} &= \frac{2\,l_{jk}}{3\,I_0}\,\rho_{jk}^{(j)}\,(s'\,m_j + t_{j\to k}\,s''\,m_k) \\ \overline{M}_{jk}^{(k)} &= \frac{2\,l_{jk}}{3\,I_0}\,\rho_{jk}^{(k)}\,(s''\,m_k + t_{k\to j}\,s'\,m_j) \end{aligned}\right\} \tag{4.36}$$

(Momentele de încastrare perfectă sînt exprimate în funcție de rigidități și de coeficienții de transmitere, astfel că pot fi calculate folosind elemente calculate anterior.)

Pentru o bară articulată la capătul k, expresia momentului de încastrare perfectă la capătul j se obține din :

$$\theta_j = \frac{l_{jk}}{6EI_0}\left[-2c'\,M_{jk}^{(j)} + cM_{jk}^{(k)} + m_j\,s'\right]$$

punînd $M_{jk}^{(k)} = 0$ (articulație) și $\theta_j = 0$ (încastrare perfectă).

$$\boxed{\overline{M}_{jk}^{(j)} = \frac{s'\,m_j}{2\,c'}} \tag{4.37}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, analog cu (4.36), în funcție de rigidități :

$$\bar{M}_{jk}^{(j)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{c'} \cdot \frac{2}{3} s' m_j = \boxed{\frac{2 l_{jk}}{3 I_0} \rho_{jk}^{(j)} s' m_j} \qquad (4.38)$$

Cum în acest caz $t_{j \to k} = 0$, relația (4.38) rezultă ca o formă particulară a relației (4.36), la care se ajunge punînd în (4.36) $t_{j \to k} = 0$.

În tabelele 12—27 sînt date, pentru tipurile de bare din fig. 57, valorile rigidităților, coeficienților de transmitere în metoda repartizării momentelor și ale momentelor de încastrare perfectă din sarcini uniform distribuite pe toată lungimea barei și din sarcini concentrate. În tabelele 28—29 sînt date, pentru cazul special al barelor cu secțiune variabilă continuu, momentele de încastrare perfectă din momente concentrate aplicate într-un punct al barei (stîlpi marginali la hale cu pod rulant). În tabelele 30—34 sînt date aceleași elemente pentru bare de tipul din fig. 58 (cu secțiunea variabilă brusc) [1].

Pentru alte cazuri de încărcare, se pot totuși folosi tabelele, așa cum s-a arătat și pentru tabelele s' și s'', înlocuind sarcinile reale prin sarcini concentrate. Coeficienții de transmitere pentru metoda rotirilor se obțin prin înmulțirea coeficienților de transmitere din metoda repartizării momentelor cu coeficienții de repartiție, conform relației (4.34).

Cu aceste elemente, mersul calculului este același ca și în cazul barelor cu secțiune constantă. În metoda transmiterii rotirilor, la sfîrșitul iterației, trecerea de la rotiri la momente se face cu ajutorul formulelor :

$$\left.\begin{aligned} M_{jk}^{(j)} &= -4 \rho_{jk}^{(j)} [\theta_j' + t_{j \to k}^{(M)} \theta_k'] + \bar{M}_{jk}^{(j)} \\ M_{jk}^{(k)} &= -4 \rho_{jk}^{(k)} [\theta_k' + t_{k \to j}^{(M)} \theta_j'] + \bar{M}_{jk}^{(k)} \end{aligned}\right\} \qquad (4.39)$$

unde $t_{j \to k}^{(M)}$, $t_{k \to j}^{(M)}$ sînt coeficienții de transmitere *din metoda repartizării momentelor*.

VI. Convergența iterației

La cadrele avînd bare cu secțiune variabilă, relația :

$$\sum_j \left| t_{k \to j} \right| = \frac{1}{2}$$

nu mai este satisfăcută. În metoda repartizării momentelor, coeficienții de transmitere diferă de valoarea $\frac{1}{2}$. Se observă că ei pot ajunge și la valori supraunitare. Pentru $\frac{c}{c'} > 2$, $t_{k \to j} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{c'} > 1$.

La bare cu vute simetrice, coeficienții de transmitere (v. tab. 16) cresc cu cît crește raportul între momentul de inerție pe reazem și cel din cîmp, deci cu cît este mai puternică vuta. De exemplu în tabela 16, pentru vute

[1] Tabelele 12—27 sînt extrase dintr-o lucrare a ing. *E. Săftoiu*, consultată în manuscris. Tabelele 30—34 sînt luate după colecția de instrucțiuni C.T.I.S. pentru proiectarea halelor metalice (v. bibl. 15). Tabele similare, mai sumare, se găsesc și în cartea lui *Palotás* (bibl. 54). De asemenea, se găsesc în literatură aceiași coeficienți dați sub formă de abace (v. de ex : *K. Rieger*, Beton — und Stahlbet. Nr. 9/1951).

Scanned with OKEN Scanner

de lungime $l_v = 0{,}5\ l$ şi pentru $\frac{I_0}{I_r} = 0{,}005$, respectiv $\frac{h_r}{h_0} = \sqrt[3]{\frac{I_r}{I_0}} = 5{,}85$, obţinem $t_{j \to k} = t_{k \to j} = 0{,}932$. La limită, pentru vute foarte puternice, $t_{j \to k}$ tinde spre unitate.

La bare cu vute nesimetrice, rigiditatea fiind mai mare în zona capătului de bară cu vută, diagrama momentelor încovoietoare se concentrează în această zonă, astfel că dacă se aplică la capătul cu vută un moment exterior, se va transmite la celălalt capăt un moment mai mic decît la o bară cu secţiune constantă. Coeficienţii de transmitere de la capetele cu vute spre cele fără vute rezultă mai mici, iar cei de la capetele fără vute spre cele cu vute, mai mari decît la o bară cu secţiunea constantă. Aceştia din urmă pot fi şi supraunitari. Deci, în sistemul de ecuaţii, criteriul de convergenţă după Wittmeyer nu mai este totdeauna satisfăcut.

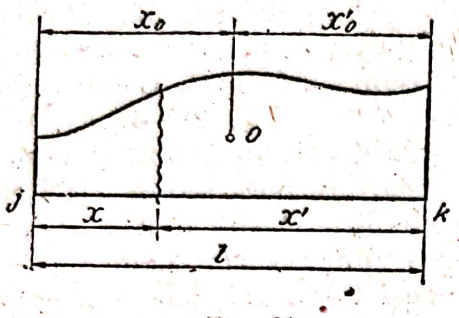


Fig. 60

Se poate demonstra însă că totdeauna produsul $t_{j \to k} \times t_{k \to j}$ rămîne subunitar (v. prof. *C. Mateescu*, op. cit., pag. 34—35).

Avem (fig. 60):

$$t_{j \to k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{c''} = \frac{1}{2} \frac{\frac{6}{l^3} \int_0^l \frac{I_0}{I_x} xx'\,dx}{\frac{3}{l^3} \int_0^l \frac{I_0}{I_x} x^2\,dx} = \frac{\int_0^l \frac{1}{I_x} xx'\,dx}{\int_0^l \frac{1}{I_x} x^2\,dx}$$

punînd: $x' = l - x$,

$$t_{j \to k} = \frac{\int_0^l \frac{1}{I_x} lx\,dx - \int_0^l \frac{1}{I_x} x^2\,dx}{\int_0^l \frac{1}{I_x} x^2\,dx}$$

Notăm cu:

A — aria diagramei $\frac{1}{I_x}$; $A = \int_0^l \frac{dx}{I_x}$;

I_0 — momentul de inerţie al ariei A în raport cu perpendiculara pe jk trecînd prin centrul de greutate O al ariei A;

I_j, I_k — momentele de inerţie ale ariei A în raport cu perpendicularele pe jk trecînd prin j şi k;

x_0, x'_0 — distanţele de la centrul de greutate O la j şi k.

$$\int_0^l \frac{1}{I_x} lx\,dx = lx_0 A; \quad \int_0^l \frac{1}{I_x} x^2\,dx = I_j.$$

$$t_{j \to k} = \frac{lx_0 A - I_j}{I_j}; \quad \text{analog } t_{k \to j} = \frac{lx'_0 A - I_k}{I_k}$$

Scanned with OKEN Scanner

Produsul $t_{j \to k} \times t_{k \to j} < 1$. În adevăr, punînd:

$$t_{j \to k} \times t_{k \to j} = \frac{(lx_0 A - I_j)(lx'_0 A - I_k)}{I_j I_k} < 1$$

avem:

$$l^2 x_0 x'_0 A^2 + I_j I_k - lx_0 A I_k - lx'_0 A I_j < I_j I_k$$

$$lx_0 x'_0 A - x_0 I_k - x'_0 I_j < 0$$

dar

$$I_j = I_0 + x_0^2 A; \quad I_k = I_0 + x'^2_0 A$$

$$lx_0 x'_0 A < x_0 I_k + x'_0 I_j = x_0 I_0 + x_0 x'^2_0 A + x'_0 I_0 + x'_0 x_0^2 A = l I_0 + x_0 x'_0 lA$$

ceea ce este evident, deoarece $lI_0 > 0$.

Scriind relația $t_{j \to k} t_{k \to j} < 1$ sub forma: $1 - t_{j \to k} t_{k \to j} > 0$, se observă că se regăsește, pentru cazul cadrelor cu noduri fixe, proprietatea sistemelor stabile, formate din bare, în general (v. cap. II), — că determinanții minori principali ai sistemului de ecuații sînt pozitivi, respectiv rațiile progresiilor geometrice ale termenilor iterației sînt subunitare.

În orice caz, prin prezența barelor cu secțiune variabilă, rapiditatea convergenței scade, putîndu-se forma zone locale (între nodurile cu vute puternice) de convergență foarte înceată.

În exemplele 9 și 10 se poate urmări calculul unui cadru avînd bare cu secțiuni variabile, prin metoda repartizării momentelor și prin metoda transmiterii rotirilor.

Exemplul 9. Cadru cu noduri fixe avînd bare cu secțiune variabilă, calculat prin metoda repartizării momentelor.

Cadrul din fig. 61 are nodurile fixe datorită simetriei schemei și încărcărilor. Barele *1—4* și *4—6* au vute drepte obișnuite; bara *1—2* are secțiunea variabilă uniform pe toată lungimea; bara *2—7* are la capătul *7* o vută în spațiu (înălțimea crește de la 0,90 la 1,50 m, iar lățimea de la 0,35 la 0,50 m).

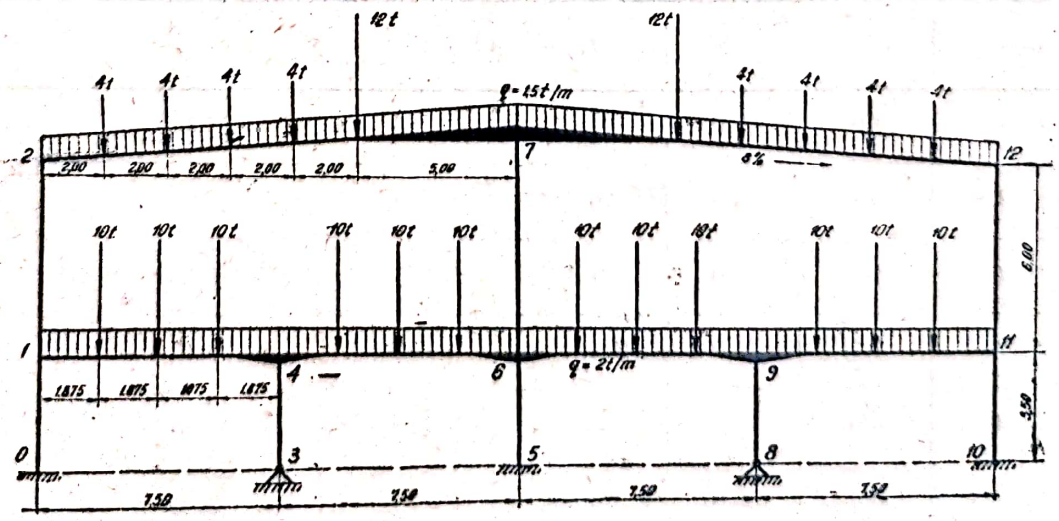


Fig. 61

Pentru dimensiunile barelor, v. fig. 62, *a*.

În virtutea simetriei, stîlpii *6—7* și *5—6* nu se rotesc, deci în nodurile *6* și *7*, $\theta = 0$, astfel că se poate lucra cu schema redusă (fig. 62, *b*), considerînd separat cele două jumătăți ale sistemului despărțite prin axa de simetrie și introducînd încastrări perfecte în *6* și *7*.

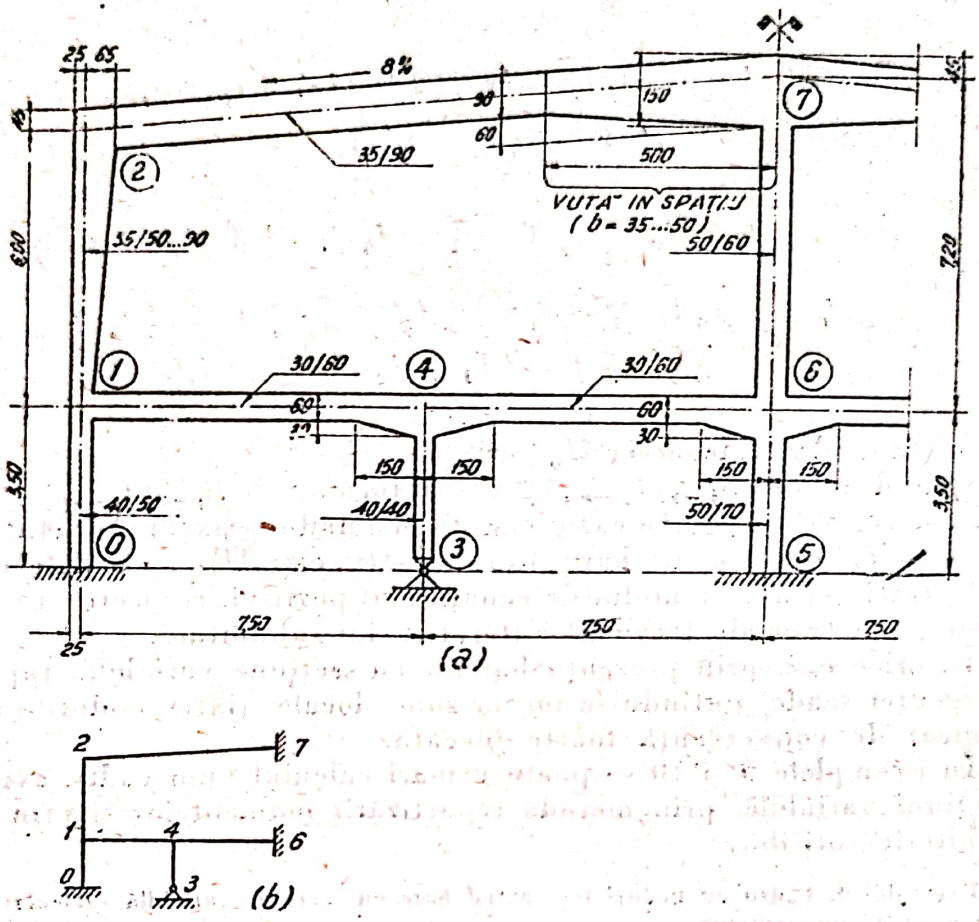


Fig. 62

Elementele geometrice ale barelor

Bara	b	h	I_0	l	$\rho = \frac{I_0}{l}$
0—1	4,0	5,0	41,67	35	1,190
1—2	3,5	5,0	36,46	60	0,609
3—4	4,0	4,0	21,33	35	$\frac{3}{4}$ 0,610 = 0,457
2—7	3,5	9,0	212,63	150	1,418
1—4	3,0	6,0	54,00	75	0,720
4—6	3,0	6,0	54,00	75	0,720

Scanned with OKEN Scanner

Corecții pentru barele cu secțiune variabilă:

Bara 1—4:

$$n = \frac{I_{min}}{I_{max}} = \left(\frac{6}{9}\right)^3 = 0{,}296\,; \quad \lambda = \frac{1{,}50}{7{,}50} = 0{,}20$$

Rigiditățile (tab. 13)

$$\begin{cases} \rho_{1-4}^{(1)} = 0{,}720 \times 1{,}08 = 0{,}778 \\ \rho_{1-4}^{(4)} = 0{,}720 \times 1{,}39 = 1{,}000 \end{cases}$$

Coef. transmitere (tab. 17)

$$\begin{cases} t_{1 \to 4} = 0{,}624 \\ t_{4 \to 1} = 0{,}482 \end{cases}$$

Bara 4 — 6:

$n = 0{,}296$; $\lambda = 0{,}20$ (la fel ca la bara *1—4*)

Rigiditățile (tab. 12): $\rho_{4-6}^{(4)} = \rho_{4-6}^{(6)} = 0{,}720 \times 1{,}53 = 1{,}100$

Coef. transmitere (tab. 16): $t_{4 \to 6} = t_{6 \to 4} = 0{,}603$

Bara 1 — 2:

$$n = \frac{I_{min}}{I_{max}} = \left(\frac{5}{9}\right)^3 = 0{,}172\,; \quad \lambda = 1$$

Rigiditățile (tab. 13)

$$\begin{cases} \rho_{1-2}^{(1)} = 0{,}609 \times 1{,}57 = 0{,}960 \\ \rho_{1-2}^{(2)} = 0{,}609 \times 3{,}81 = 2{,}320 \end{cases}$$

Coef. transmitere (tab. 17)

$$\begin{cases} t_{1 \to 2} = 0{,}775 \\ t_{2 \to 1} = 0{,}320 \end{cases}$$

Bara 2 — 7:

Fiind vorba de o bară cu vută în spațiu, determinăm coeficienții c', c'', c, s', s'' prin sume finite. Se împarte lungimea barei *2—7* în 15 părți egale ($\Delta x = 1$ m) și se calculează datele geometrice pentru centrele tronsoanelor (fig. 63).

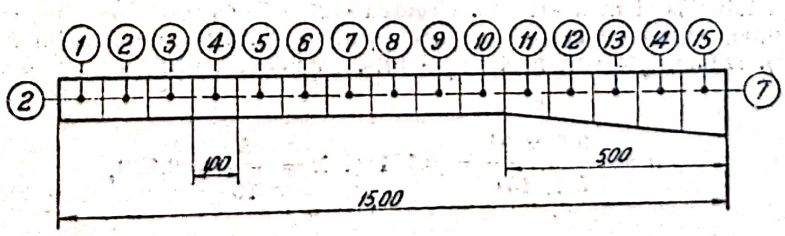


Fig. 63

Secțiunea	ξ	ξ'	h_x dm	b_x dm	I_x dm^3	$\frac{I_0}{I_x}$	$\frac{I_0}{I_x}\xi^2$	$\frac{I_0}{I_x}\xi\xi'$	$\frac{I_0}{I_x}\xi'^2$
1	0,033	0,967	9,0	3,50	212,63	1.—	0,001	0,032	0,935
2	0,100	0,900	9,0	3,50	212,63	1.—	0,010	0,090	0,810
3	0,167	0,833	9,0	3,50	212,63	1.—	0,028	0,139	0,694
4	0,233	0,767	9,0	3,50	212,63	1.—	0,054	0,178	0,588
5	0,300	0,700	9,0	3,50	212,63	1.—	0,090	0,210	0,490
6	0,367	0,633	9,0	3,50	212,63	1,—	0,135	0,232	0,400
7	0,433	0,567	9,0	3,50	212,63	1.—	0,189	0,245	0,322
8	0,500	0,500	9,0	3,50	212,63	1.—	0,250	0,250	0,250
9	0,567	0,433	9,0	3,50	212,63	1.—	0,322	0,245	0,189
10	0,633	0,367	9,0	3,50	212,63	1.—	0,400	0,232	0,135
11	0,700	0,300	9,6	3,65	269	0,791	0,387	0,166	0,071
12	0,767	0,233	10,8	3,95	415	0,513	0,302	0,091	0,028
13	0,833	0,167	12,0	4,25	612	0,348	0,241	0,048	0,010
14	0,900	0,100	13,2	4,55	872	0,244	0,198	0,022	0,002
15	0,967	0,033	14,4	4,85	1205	0,178	0,166	0,006	0,000
Σ							2,773	2,186	4,924

$$c' = \frac{3}{15}\,4{,}924 = 0{,}985\,; \qquad c'' = \frac{3}{15}\,2{,}773 = 0{,}554\,; \qquad c = \frac{3}{15}\,2{,}186 = 0{,}874.$$

Dacă în mod aproximativ se asimilează vuta în spațiu cu o vută plană, avînd același n, se pot utiliza tabelele și în acest caz. Eroarea care se face este aproximarea variației lui b și h, deci a unei curbe de gradul 4 (bh^3) printr-o variație numai a lui h, deci o curbă de gradul 3 (h^3). Diferențele sînt însă neglijabile. În adevăr, utilizînd tabelele, cu :

$$n = \frac{3{,}5 \times 9^3}{5 \times 15^3} = 0{,}151 \text{ și } \lambda = \frac{5}{15} = 0{,}333,$$

găsim : $c = 0{,}985$; $c'' = 0{,}550$; $c = 0{,}873$. Diferențele sînt de ordinul erorilor de riglă.

Scanned with OKEN Scanner

Rigiditățile [cu formulele (4.29)]:

$$\rho_{2-7}^{(2)} = \frac{3 \times 0{,}554}{4 \times 0{,}985 \times 0{,}554 - 0{,}874^2} 1{,}418 = 1{,}660$$

$$\rho_{2-7}^{(7)} = \frac{3 \times 0{,}985}{4 \times 0{,}985 \times 0{,}554 - 0{,}874^2} 1{,}418 = 2{,}950$$

Coef. transmitere [cu formulele (4.33)]:

$$t_{2 \to 7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}874}{0{,}554} = 0{,}788$$

$$t_{7 \to 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}874}{0{,}985} = 0{,}444$$

Momente de încastrare perfectă:

Bara 1 — 4 (v. fig. 64)

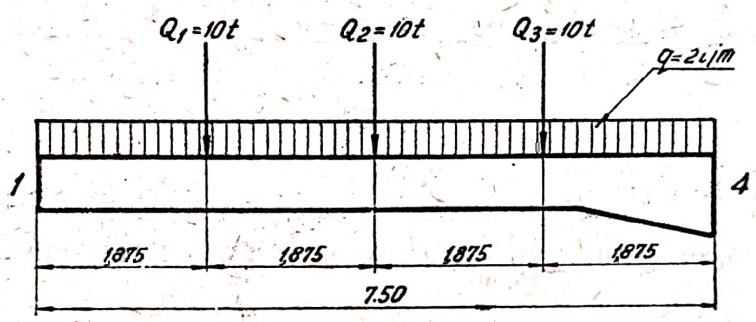


Fig. 64

Din sarcina uniform distribuită (tab. 20):

$$\overline{M}_{1-4}^{(1)} = 0{,}073 \times 2 \times 7{,}50^2 = 8{,}3 \text{ tm}$$

$$\overline{M}_{1-4}^{(4)} = 0{,}106 \times 2 \times 7{,}50^2 = 11{,}9 \text{ tm}$$

Din sarcinile concentrate (tab. 25):

$Q_1 \ldots \frac{a}{l} = 0{,}75$ (dinspre capătul cu vută); $M_1 = 0{,}130\ Ql$; $M_4 = 0{,}063\ Ql$

$Q_2 \ldots \frac{a}{l} = 0{,}50$ $M_1 = 0{,}106\ Ql$; $M_4 = 0{,}166\ Ql$

$Q_3 \ldots \frac{a}{l} = 0{,}25$; $M_1 = 0{,}033\ Ql$; $M_4 = 0{,}174\ Ql$

Deci:

$$\overline{M}_{1-4}^{(1)} = (0{,}130 + 0{,}106 + 0{,}033)\ 10 \times 7{,}50 = 20{,}9 \text{ tm}$$

$$\overline{M}_{1-4}^{(4)} = (0{,}063 + 0{,}166 + 0{,}174)\ 10 \times 7{,}50 = 30{,}3 \text{ tm}$$

Momentele de încastrare perfectă totale, cu semnele lor:

$$\overline{M}_{1-4}^{(1)} = + 8{,}3 + 20{,}9 = + 29{,}2 \text{ tm}$$

$$\overline{M}_{1-4}^{(4)} = - 11{,}9 - 30{,}3 = - 42{,}2 \text{ tm}$$

Scanned with OKEN Scanner

Bara 4 — 6 (aceleași dimensiuni și sarcini; vute simetrice)

Din sarcina uniform distribuită (tab. 19):

$$\overline{M}_{4-6}^{(4)} = \overline{M}_{4-6}^{(6)} = 0{,}094 \times 2 \times 7{,}50^2 = 10{,}6 \text{ tm}$$

Din sarcinile concentrate (tab. 23):

$$\overline{M}_{4-6}^{(4)} = \overline{M}_{4-6}^{(6)} = (0{,}167 + 0{,}145 + 0{,}043)\, 10 \times 7{,}50 = 26{,}6 \text{ tm}$$

Total, cu semnele respective:

$$\overline{M}_{4-6}^{(4)} = +\,10{,}6 + 26{,}6 = +\,37{,}2 \text{ tm}; \quad \overline{M}_{4-6}^{(6)} = -\,37{,}2 \text{ tm}$$

Bara 2 — 7

Momentele barei considerată simplu rezemată la capete, în secțiunile *1 — 15* (fig. 63 și 65):

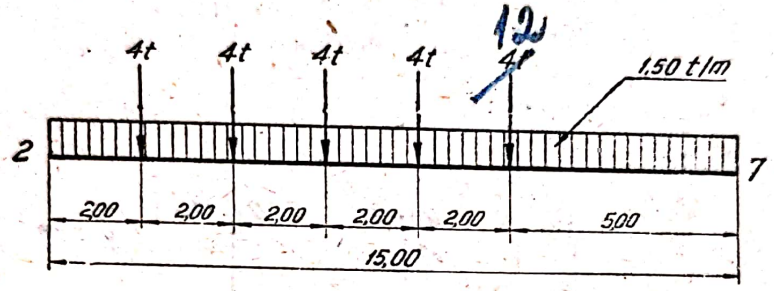


Fig. 65

Reacțiunea în (2):

$$A = \frac{1}{2}\, 15{,}00 \times 1{,}50 + \frac{1}{15{,}00}\,[12 \times 5{,}00 + 4\,(7 + 9 + 11 + 13)] = 25{,}92 \text{ t}$$

$$\mathfrak{M}_1 = 25{,}92 \times 0{,}50 - 1{,}50\,\frac{1}{2}\,0{,}50^2 = 12{,}8 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{M}_2 = 25{,}92 \times 1{,}50 - 1{,}50\,\frac{1}{2}\,1{,}50^2 = 37{,}2 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{M}_3 = 25{,}92 \times 2{,}50 - 1{,}50\,\frac{1}{2}\,2{,}50^2 - 4 \times 0{,}50 = 58{,}1 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{M}_4 = 25{,}92 \times 3{,}50 - 1{,}50\,\frac{1}{2}\,3{,}50^2 - 4 \times 1{,}50 = 75{,}5 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{M}_5 = 25{,}92 \times 4{,}50 - 1{,}50\,\frac{1}{2}\,4{,}50^2 - 4\,(2{,}50 + 0{,}50) = 89{,}5 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{M}_6 = 25{,}92 \times 5{,}50 - 1{,}50\,\frac{1}{2}\,5{,}50^2 - 4\,(3{,}50 + 1{,}50) = 99{,}8 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{M}_7 = 25{,}92 \times 6{,}50 - 1{,}50\,\frac{1}{2}\,6{,}50^2 - 4\,(4{,}50 + 2{,}50 + 0{,}50) = 106{,}7 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{M}_8 = 25{,}92 \times 7{,}50 - 1{,}50\,\frac{1}{2}\,7{,}50^2 - 4\,(5{,}50 + 3{,}50 + 1{,}50) = 110{,}1 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{M}_9 = 25{,}92 \times 8{,}50 - 1{,}50\,\frac{1}{2}\,8{,}50^2 - 4\,(6{,}50 + 4{,}50 + 2{,}50 + 0{,}50) = 110{,}2 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{M}_{10} = 25{,}92 \times 9{,}50 - 1{,}50\,\frac{1}{2}\,9{,}50^2 - 4\,(7{,}50 + 5{,}50 + 3{,}50 + 1{,}50) = 106{,}7 \text{ tm}$$

Scanned with OKEN Scanner

Reacțiunea în (7):

$$B = 1{,}50 \times 15{,}00 + 4 \times 4 + 12 - 25{,}92 = 24{,}58 \text{ t}$$

$$\mathfrak{M}_{11} = 24{,}58 \times 4{,}50 - 1{,}50 \frac{1}{2} 4{,}50^2 = 95{,}4 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{M}_{12} = 24{,}58 \times 3{,}50 - 1{,}50 \frac{1}{2} 3{,}50^2 = 74{,}0 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{M}_{13} = 24{,}58 \times 2{,}50 - 1{,}50 \frac{1}{2} 2{,}50^2 = 56{,}8 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{M}_{14} = 24{,}58 \times 1{,}50 - 1{,}50 \frac{1}{2} 1{,}50^2 = 35{,}2 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{M}_{15} = 24{,}58 \times 0{,}50 - 1{,}50 \frac{1}{2} 0{,}50^2 = 12{,}1 \text{ tm}$$

Secțiunea	ξ	ξ'	$\frac{I_0}{I_x}$	$\frac{I_0}{I_x}\xi$	$\frac{I_0}{I_x}\xi'$	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{M}\frac{I_0}{I_x}\xi$	$\mathfrak{M}\frac{I_0}{I_x}\xi'$
1	0,033	0,967	1,000	0,033	0,967	12,8	0,4	12,3
2	0,100	0,900	1,000	0,100	0,900	37,2	3,7	33,5
3	0,167	0,833	1,000	0,167	0,833	58,1	9,7	48,4
4	0,233	0,767	1,000	0,233	0,767	75,5	17,6	57,8
5	0,300	0,700	1,000	0,300	0,700	89,5	26,9	62,6
6	0,367	0,633	1,000	0,367	0,633	99,8	36,7	63,1
7	0,433	0,567	1,000	0,433	0,567	106,7	46,2	60,5
8	0,500	0,500	1,000	0,500	0,500	110,1	55,0	55,0
9	0,567	0,433	1,000	0,567	0,433	110,2	62,5	47,7
10	0,633	0,367	1,000	0,633	0,367	106,7	67,5	39,1
11	0,700	0,300	0,791	0,554	0,237	95,4	52,8	22,7
12	0,767	0,233	0,513	0,394	0,119	74,0	29,1	8,8
13	0,833	0,167	0,348	0,290	0,058	56,8	16,5	3,3
14	0,900	0,100	0,244	0,220	0,024	35,2	7,8	0,9
15	0,967	0,033	0,178	0,172	0,006	12,1	2,1	0,1
Σ							434,5	515,8

Scanned with OKEN Scanner

Calculăm direct produsele $s'm_2$, $s''m_7$:

$$s'm_2 = \frac{6}{p} \Sigma \mathfrak{M} \frac{I_0}{I_x} \xi' = \frac{6}{15} 515{,}8 = 206{,}3 \text{ tm } (+)$$

$$s''m_7 = \frac{6}{p} \Sigma \mathfrak{M} \frac{I_0}{I_x} \xi = \frac{6}{15} 434{,}5 = 173{,}8 \text{ tm } (-)$$

Momentele de încastrare perfectă [cu formulele (4.35)]:

$$M_2 = + \frac{2 \times 0{,}554 \times 206{,}3 - 0{,}874 \times 173{,}8}{4 \times 0{,}985 \times 0{,}554 - (0{,}874)^2} = + 54{,}2 \text{ tm}$$

$$M_7 = - \frac{2 \times 0{,}985 \times 173{,}8 - 0{,}874 \times 206{,}3}{4 \times 0{,}985 \times 0{,}554. \ (0{,}874)^2} = - 113{,}7 \text{ tm}$$

Coeficienții de repartiție la noduri:

Nodul 1: $\Sigma \rho^{(1)} = 0{,}960 + 0{,}778 + 1{,}190 = 2{,}928$

$$r_{0-1}^{(1)} = \frac{1{,}190}{2{,}928} = 0{,}407; \quad r_{1-2}^{(1)} = \frac{0{,}960}{2{,}928} = 0{,}328; \quad r_{1-4}^{(1)} = \frac{0{,}778}{2{,}928} = 0{,}265$$

Nodul 2: $\Sigma \rho^{(2)} = 1{,}660 + 2{,}320 = 3{,}980$

$$r_{2-7}^{(2)} = \frac{1{,}660}{3{,}980} = 0{,}417; \quad r_{1-2}^{(2)} = \frac{2{,}320}{3{,}980} = 0{,}583$$

Nodul 4: $\Sigma \rho^{(4)} = 1{,}000 + 1{,}100 + 0{,}457 = 2{,}557$

$$r_{1-4}^{(4)} = \frac{1{,}000}{2{,}557} = 0{,}392; \quad r_{3-4}^{(4)} = \frac{0{,}457}{2{,}557} = 0{,}178; \quad r_{4-6}^{(4)} = \frac{1{,}100}{2{,}557} = 0{,}430$$

Schema de calcul v. fig. 66.

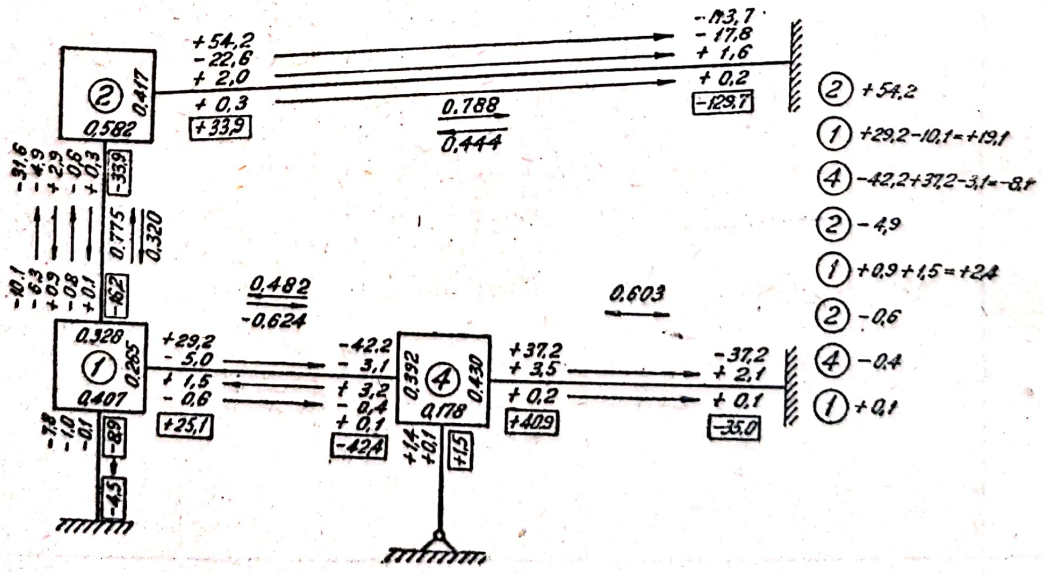


Fig. 66.

Exemplul 10. Cadru cu noduri fixe avînd bare cu secțiune variabilă, calculat prin metoda transmiterii rotirilor.

Se calculează prin metoda transmiterii rotirilor cadrul din exemplul 9. Folosind elementele geometrice ale barelor, calculate din acest exemplu, coeficienții de transmitere în metoda rotirilor vor fi, după formula (4.34):

$$\begin{aligned} t_{1\to 4} &= 0{,}482 \times 0{,}392 = 0{,}189 \\ t_{4\to 1} &= 0{,}624 \times 0{,}265 = 0{,}165 \\ t_{1\to 2} &= 0{,}320 \times 0{,}583 = 0{,}186 \\ t_{2\to 1} &= 0{,}775 \times 0{,}328 = 0{,}254 \end{aligned}$$

Valorile inițiale ale rotirilor nodurilor (multiplicate cu 10):

$$\theta_1' = 10\ E\theta_1 = +\frac{29{,}2 \times 10}{4 \times 2{,}928} = +24{,}9$$

$$\theta_2' = 10\ E\theta_2 = +\frac{54{,}2 \times 10}{4 \times 3{,}980} = +34{,}0$$

$$\theta_4' = 10\ E\theta_4 = \frac{-42{,}2 + 37{,}2}{4 \times 2{,}557}\ 10 = -4{,}9$$

Schema de calcul (v. fig. 67).

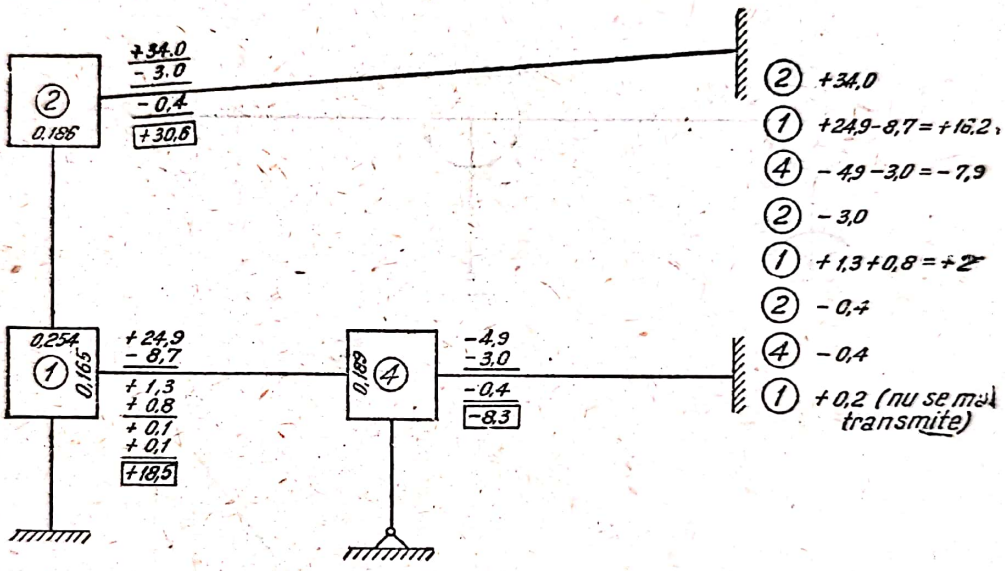


Fig. 67.

$$M_{1-2}^{(1)} = -\frac{4}{10}\,0{,}960\,(18{,}5 + 0{,}275 \times 30{,}6) = -16{,}2\ \text{tm}$$

$$M_{1-2}^{(2)} = -\frac{4}{10}\,2{,}320\,(30{,}6 + 0{,}320 \times 18{,}5) = 33{,}9\ \text{tm}$$

$$M_{2-7}^{(2)} = +54{,}2 - \frac{4}{10}\,1{,}660\,(30{,}6 + 0) = +33{,}9\ \text{tm}$$

$$M_{2-7}^{(7)} = -113{,}7 - \frac{4}{10}\,2{,}950\,(0 + 0{,}444 \times 30{,}6) = -129{,}7\ \text{tm}$$

$$M_{1-4}^{(1)} = +29{,}2 - \frac{4}{10}\,0{,}778\,(18{,}5 - 0{,}624 \times 8{,}3) = +25{,}1\ \text{tm}$$

$$M_{1-4}^{(4)} = -42{,}2 - \frac{4}{10}\,1{,}000\,(-8{,}3 + 0{,}483 \times 18{,}5) = -42{,}4\ \text{tm}$$

$$M_{4-6}^{(4)} = +37{,}2 - \frac{4}{10}\,1{,}100\,(-8{,}3 + 0) = +40{,}9\ \text{tm}$$

$$M_{4-6}^{(6)} = -37{,}2 - \frac{4}{10}\,1{,}100\,(0 - 0{,}603 \times 8{,}3) = -35{,}0\ \text{tm}$$

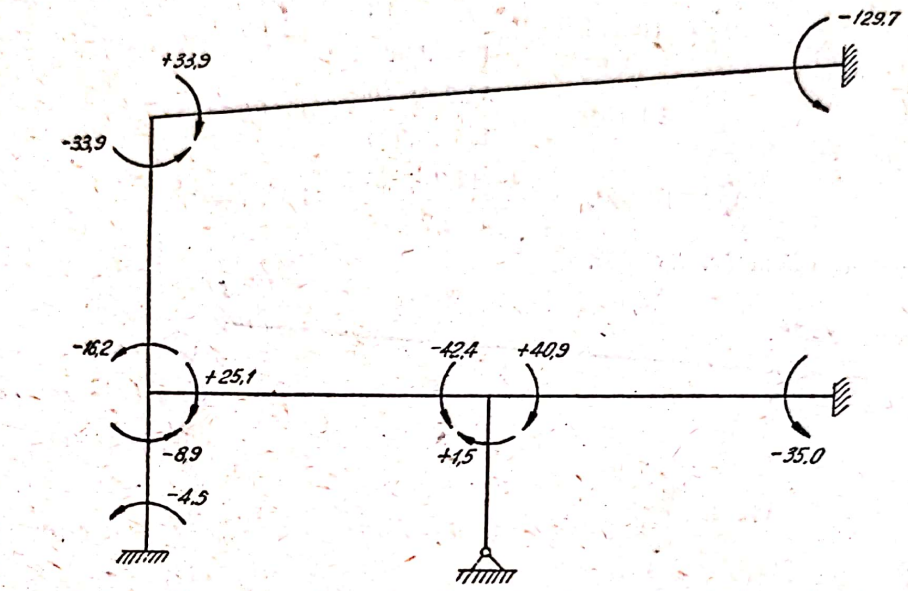
Scanned with OKEN Scanner

$$M_{0-1}^{(1)} = -\frac{4}{10}\,1{,}190\,(18{,}5 + 0) = -\,8{,}9\ \text{tm}$$

$$M_{0-1}^{(0)} = -\frac{4}{10}\,1{,}190\,(0 + 0{,}5 \times 18{,}5) \doteq -\,4{,}5\ \text{tm}$$

$$M_{3-4}^{(4)} = -\frac{4}{10}\,0{,}457\,(-8{,}3) = +\,1{,}5\ \text{tm}$$

Diagrama de momente (v. fig. 68, *a* și *b*).



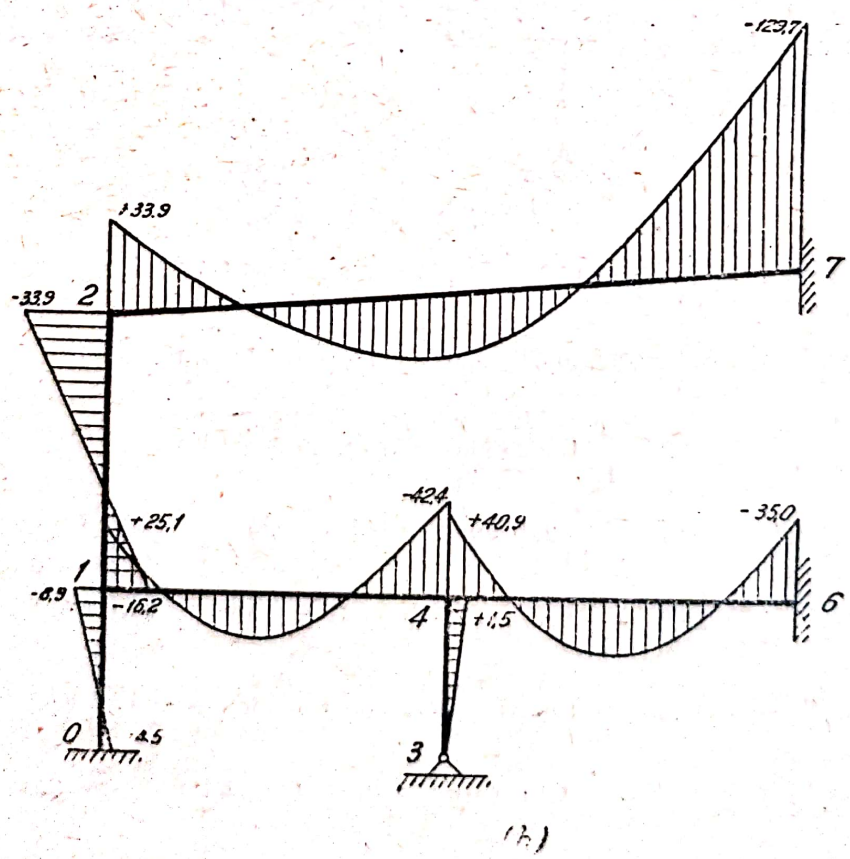


Fig. 68.

E. DETALII DE CALCUL PENTRU CÎTEVA CAZURI PARTICULARE ŞI APLICAŢII UZUALE

I. Considerarea simetriei

La cadre simetrice şi simetric încărcate, schema de transmiteri se poate reduce la jumătate din schema cadrului, dacă în cursul iteraţiei se deblochează totdeauna simultan cîte două noduri simetrice. În acest mod, între cele două jumătăţi de schemă separate prin axa de simetrie nu se mai fac transmiteri, deoarece sistemul de ecuaţii se împarte în două sisteme de ecuaţii fără necunoscute comune, coeficienţii necunoscutelor în cele două sisteme de ecuaţii fiind identici.

În cazul cînd axa de simetrie trece printr-un nod sau prin mai multe noduri (fig. 69, *a*, nodurile *H* şi *L*), în poziţia finală deformată aceste noduri,

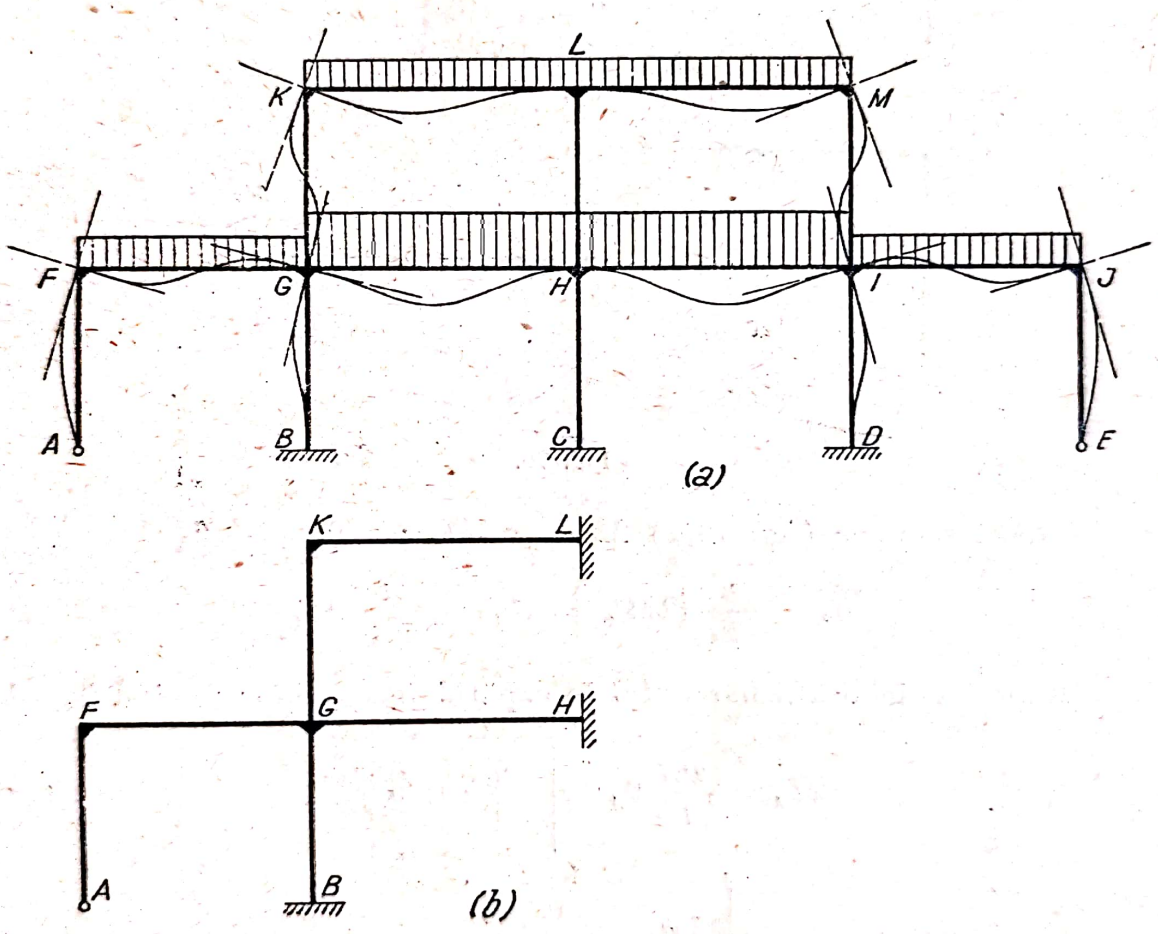


Fig. 69.

în virtutea simetriei, nu capătă nici o rotire. În cursul iteraţiei, se păstrează aceeaşi situaţie dacă se deblochează simultan cîte două noduri simetrice. Avînd rotirile egale cu zero, nodurile de pe axa de simetrie se pot considera ca încastrări perfecte; schema se reduce atunci la forma din fig. 69, *b*.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul cînd axa de simetrie trece prin mijlocul unei bare (fig. 70,*a*, bara AB), menținînd procedeul de deblocare simultană a cîte două noduri simetrice, vom debloca totdeauna simultan și nodurile AB. Relațiile (4.3) :

$$\theta_A = \frac{l}{6EI}(2M_A - M_B)$$

$$\theta_B = \frac{l}{6EI}(2M_B - M_A)$$

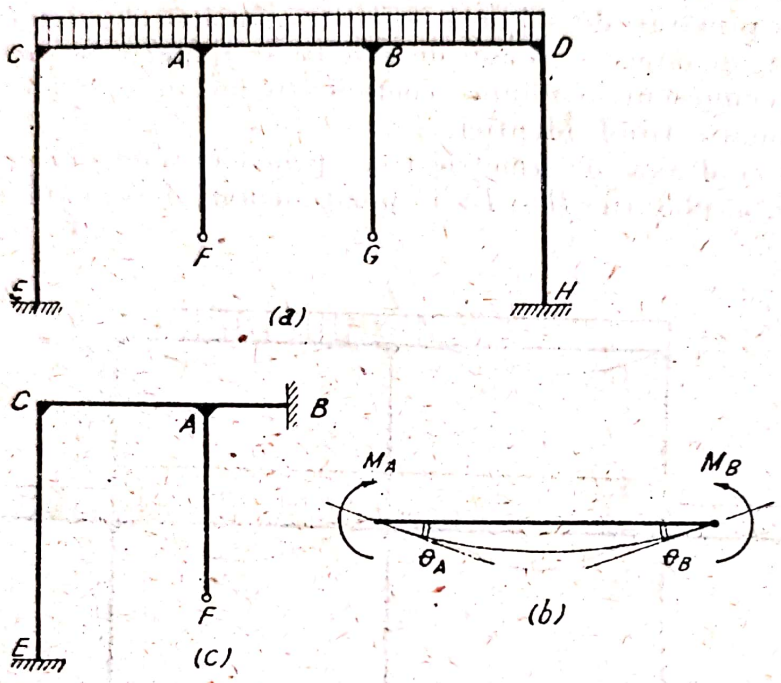


Fig. 70.

devin, dacă se pune (fig. 70, *b*) $M_B = -M_A$; $\theta_B = -\theta_A$:

$$\theta_A = \frac{l}{6EI}(2M_A + M_A) = \frac{l}{2EI}M_A$$

Expresia rigidității barei AB în capătul A se obține punînd $\theta_A = 1$:

$$M_A = \frac{2EI}{l}\theta_A = \boxed{\frac{2EI}{l} = K_{AB}^{(A)}} \qquad (4.40)$$

Rigiditatea practică : $\boxed{\rho_{AB}^{(A)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{I}{l}}$ (4.41)

Schema se reduce la forma din fig. 70, *c*, introducînd pentru bara AB o rigiditate conform formulelor (4.40), (4.41) (jumătate din rigiditatea barei reale).

Pentru bare cu secțiunea variabilă :

$$\theta_A = \frac{l}{6EI_0}(2c'M_A - cM_B) = \frac{l}{6EI_0}(2c' + c)M_A$$

Scanned with OKEN Scanner

Punînd $\theta_A = 1$:

$$M_A = \frac{6}{2c' + c} \cdot \frac{EI_0}{l} \theta_A = \boxed{\frac{6}{2c' + c} \cdot \frac{EI_0}{l} = K_{AB}^{(A)}} \qquad (4.42)$$

Rigiditatea practică : $\rho_{AB}^{(A)} = \boxed{\frac{1{,}5}{2c' + c} \cdot \frac{I_0}{l}}$ (4.43)

II. Reazeme încastrate parțial

În cele expuse pînă aici ne-am referit, pentru simplitatea expunerii, numai la cadre avînd reazeme încastrate perfect sau articulate. Pentru aceste cazuri simple de rezemări s-au dedus expresiile rigidităților barelor, coeficienților de transmitere și momentelor de încastrare perfectă. Uneori în practică apare însă și necesitatea considerării unor încastrări parțiale, cînd elementele în care se încastrează capetele barelor cadrului nu sînt suficient de rigide pentru a împiedica în întregime rotirile acestora. Rigiditățile barelor terminale, coeficienții de transmitere și momentele de încastrare perfectă se pot determina și în această situație, ținînd seama de condițiile de margine considerate pentru reazemele încastrate parțial.

Încastrarea parțială poate fi definită :

a) în mod aproximativ, prin fixarea unui *grad de încastrare* în reazem ;

b) mai riguros, prin precizarea *rigidității elementului în care se încastrează bara terminală.*

a) *Gradul de încastrare*

Gradul de încastrare al unei bare AB la capătul B se poate defini prin raportul :

$$\boxed{\varepsilon_{AB}^{(B)} = \frac{\varphi_B - \theta_B}{\varphi_B}} \qquad (4.44)$$

unde : φ_B este rotirea capătului B, dacă acesta ar fi articulat ;
θ_B — rotirea reală a capătului B, încastrat parțial.

$$\theta_B = \frac{l}{6EI}(2\,M_B - M_A)$$

$$\varphi_B = -\frac{l}{6EI} M_A \qquad (M_B = 0)$$

Din (4.44) : $\theta_B = [1 - \varepsilon_{AB}^{(B)}]\,\varphi_B$. Înlocuind θ_B și φ_B cu expresiile lor, rezultă :

$$\frac{l}{6EI}(2M_B - M_A) = [\varepsilon_{AB}^{(B)} - 1]\,\frac{l}{6EI} M_A$$

de unde :

$$M_B = \frac{\varepsilon_{AB}^{(B)}}{2} M_A$$

Scanned with OKEN Scanner

Rigiditatea barei AB în capătul A :

$$\theta_A = 1 = \frac{l}{6\,EI}(2M_A - M_B) = \frac{l}{6\,EI}\left[2M_A - \frac{\varepsilon_{AB}^{(B)}}{2} M_A\right]$$

$$M_A = \boxed{\frac{12\,EI}{l} \cdot \frac{1}{4 - \varepsilon_{AB}^{(B)}} = K_{AB}^{(A)}} \qquad (4.45)$$

$\varepsilon_{AB}^{(B)}$ poate varia de la 1 (încastrare perfectă) la 0 (articulaţie). Introducînd aceste valori limită în expresia rigidităţii (4.45), se regăsesc relaţiile cunoscute :

— pentru $\varepsilon_{AB}^{(B)} = 1$ $\qquad K_{AB}^{(A)} = \frac{4\,EI}{l}$

— pentru $\varepsilon_{AB}^{(B)} = 0$ $\qquad K_{AB}^{(A)} = \frac{3\,EI}{l}$

Coeficientul de transmitere de la A la B, în metoda repartizării momentelor :

$$\boxed{t_{A \to B} = \frac{\varepsilon_{AB}^{(B)}}{2}} \qquad \text{(punînd } M_A = 1 \text{ în expresia lui } M_B\text{)} \qquad (4.46)$$

— pentru $\varepsilon_{AB}^{(B)} = 1$ $\qquad t_{A \to B} = \frac{1}{2}$

— pentru $\varepsilon_{AB}^{(B)} = 0$ $\qquad t_{A \to B} = 0$

Momentele iniţiale (momentul de încastrare perfectă în A şi momentul de încastrare parţială în B) :

În relaţiile :

$$\theta_A = \frac{l}{6\,EI}(2M_A - M_B + m_A)$$

$$\theta_B = \frac{l}{6\,EI}(2M_B - M_A + m_B)$$

$$\varphi_B = \frac{l}{6\,EI}(-M_A + m_B)$$

Punem :

$$\theta_A = 0\,; \quad \theta_B = [1 - \varepsilon_{AB}^{(B)}]\,\varphi_B$$

Rezultă :

$$2\,M_A - M_B + m_A = 0$$

$$2\,M_B - M_A + m_B = [1 - \varepsilon_{AB}^{(B)}](-M_A + m_B)$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd acest sistem de ecuații, se obțin valorile momentelor inițiale :

$$M_A = \boxed{\overline{M}_{AB}^{(A)} = -\frac{2m_A + \varepsilon_{AB}^{(B)} m_B}{4 - \varepsilon_{AB}^{(B)}}} \qquad M_B = \boxed{\overline{M}_{AB}^{(B)} = -\frac{\varepsilon_{AB}^{(B)}}{4 - \varepsilon_{AB}^{(B)}}(2m_B + m_A)} \tag{4.47}$$

— pentru $\varepsilon_{AB}^{(B)} = 1$ $\quad \overline{M}_{AB}^{(A)} = -\frac{2m_A + m_B}{3}$; $\overline{M}_{AB}^{(B)} = -\frac{2m_B + m_A}{3}$

— pentru $\varepsilon_{AB}^{(B)} = 0$ $\quad \overline{M}_{AB}^{(A)} = \frac{m_A}{2}$; $\overline{M}_{AB}^{(B)} = 0$.

Gradul de încastrare poate fi definit și în alt mod : Dacă la capătul A al barei AB încastrate parțial în B se aplică un moment $M_A = 1$, în capătul B apare un moment $M_B = \frac{\varepsilon_{AB}^{(B)}}{2}$. În cazul cînd încastrarea din B este perfectă, aplicînd în A momentul $M_A = 1$, apare în B momentul $M_B' = \frac{1}{2}$. Se observă că raportul între M_B și M_B' reprezintă tocmai gradul de încastrare $\varepsilon_{AB}^{(B)}$. În unele tratate, gradul de încastrare este definit prin acest raport.

Avantajul pentru calcul al definirii încastrărilor parțiale prin gradele de încastrare (ε) corespunzătoare constă în faptul că reazemele încastrate parțial apar în schema de calcul ca niște reazeme încastrate perfect, de la care nu se mai fac transmiteri înapoi. Ecuația capătului de bară din A este :

$$\theta_A = \frac{l}{6EI} M_A \left(2 - \frac{\varepsilon_{AB}^{(B)}}{2}\right)$$

În această ecuație M_B nu apare, deci nu se fac transmiteri de la B la A.

Totuși, procedeul pe bază de „grade de încastrare" rămîne aproximativ, întrucît valoarea lui ε se alege de la început, fiind la aprecierea calculatorului. De cele mai multe ori se ia $\varepsilon_{AB}^{(B)} = \frac{1}{2}$, ceea ce nu corespunde totdeauna realității.

b) *Rigiditatea elementului în care se încastrează bara terminală*

Se definește prin momentul ce trebuie aplicat asupra reazemului pentru a imprima acestuia o rotire unitară.

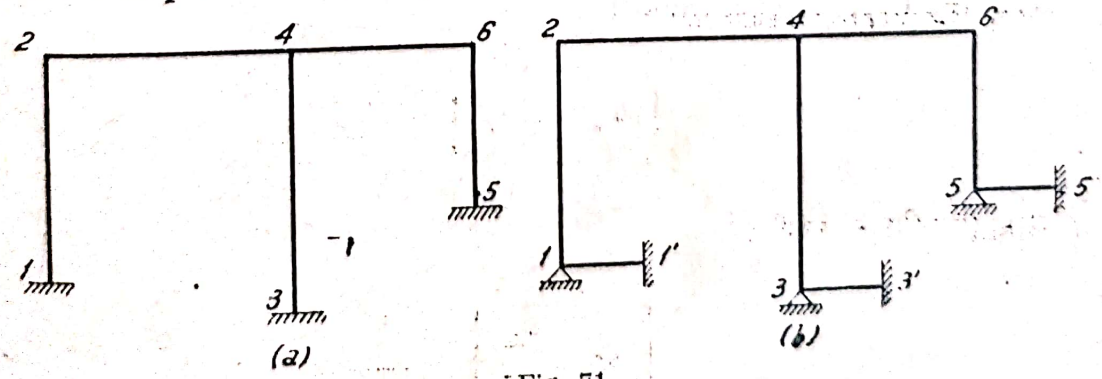


Fig. 71.

La un cadru (fig. 71, *a*) cu stîlpii încastrați parțial în reazemele *1*, *3*, *5*, în locul încastrărilor parțiale se poate considera că se introduc barele

suplimentare *1—1*, *3—3*, *5—5* (fig. 71, *b*) ale căror rigidități reprezintă rigiditățile reazemelor *1*, *3*, *5*. Astfel, reazemele devin niște noduri obișnuite, iar momentele care se obțin în secțiunile de la baza stîlpilor sînt momentele finale de încastrare parțială.

Acest mod de a defini încastrarea parțială prezintă avantajul că se ține seama de rotirile reale ale reazemelor, bineînțeles cu condiția ca rigiditățile reazemelor (barelor suplimentare) să fie corect determinate. În schimb, apare pentru calcul dezavantajul că intră în schema de transmiteri noduri noi. De exemplu în cazul din fig. 71 numărul nodurilor se dublează.

Pentru stîlpi încastrați la bază în fundații, se poate determina rigiditatea la rotire a fundației (momentul ce trebuie aplicat asupra fundației pentru a-i imprima o rotire unitară), dacă se cunoaște compresibilitatea terenului.

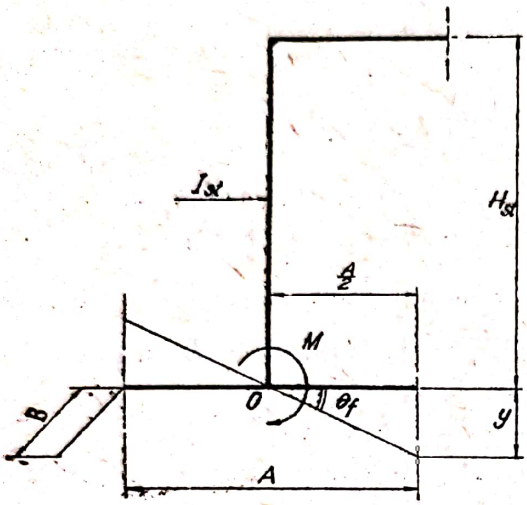


Fig. 72.

Notăm (fig. 72):

A, B — lungimea și lățimea fundației;
y — tasarea extremității fundației, cînd în O se aplică un moment M;
p — presiunea unitară pe teren sub extremitatea fundației;
C — coeficientul de tasare (coeficientul lui *Winkler*).

Neglijînd deformațiile corpului fundației la încovoiere, reazemul O se rotește numai datorită compresibilității terenului sub fundație. Avem:

$$y = \frac{p}{C}; \qquad \theta_f = 1 = \frac{y}{\frac{A}{2}} = \frac{2p}{CA}$$

$$p = \frac{CA}{2} = \frac{M}{\frac{BA^2}{6}}; \qquad M = \frac{BA^3}{12} C = I_f C$$

unde I_f este momentul de inerție al suprafeței bazei fundației.

Deci rigiditatea reazemului:

$$\boxed{K_0 = C I_f} \tag{4.48}$$

Rigiditatea practică:

$$\boxed{\rho_0 = \frac{C I_f}{4 E}} \tag{4.49}$$

(E este modulul de elasticitate al stîlpului).

Coeficientul de repartiție al stîlpului de bază :

$$r_{st}^{(0)} = \frac{\frac{I_{st}}{H_{st}}}{\frac{I_{st}}{H_{st}} + \frac{CI_f}{4E}}$$

Relația (4.48) poate fi demonstrată și în alt mod (fig. 73) : Admițînd ipoteza simplificatoare a lui Winkler, se poate considera că fundația reazemă pe un prism de pămînt de adîncime l. Momentul de inerție al secțiunii transversale a prismului :

$$I_f = \frac{BA^3}{12}$$

Aplicînd în O un moment M, momentul în lungul prismului rămîne constant. Prismul este bara suplimentară care înlocuiește reazemul. Rotirea barei suplimentare în O :

$$\theta_f = \int_0^l \frac{M_x}{E_f I_f} dx$$

unde :

E_f este modulul de elasticitate al terenului, presupus material elastic ;

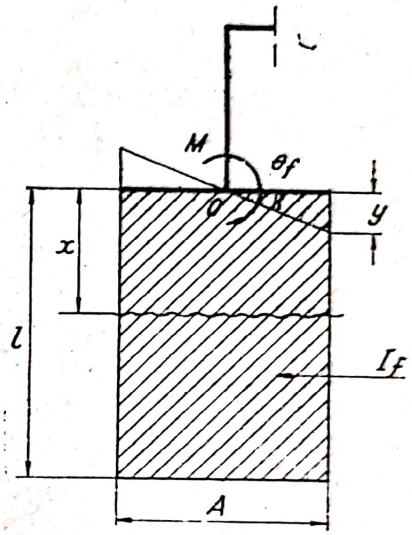


Fig. 73.

$$M_x = M \quad (const.) ;$$

$$\theta_f = \frac{M}{E_f I_f} \int_0^l dx = \frac{Ml}{E_f I_f}$$

dar :

$$E_f = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{p}{\frac{y}{l}} = \frac{pl}{y} = Cl$$

$$\theta_f = \frac{Ml}{Cl\, I_f} = \frac{M}{CI_f}$$

Punînd $\theta_f = 1$, rezultă $M = CI_f = K_0$.

Asupra rigidității la rotire a fundațiilor rezemate pe un mediu elastic, v. și lucrarea lui *A. Habel* (Bet. u. Stahlb. 1952).

III. Determinarea directă a rației progresiei la cadre simple

La unele cadre simple, avînd pînă la 3—4 noduri, sau prezentînd o simetrie care reduce numărul de ecuații de nod la 3 sau 4, rația progresiei termenilor iterației poate fi identificată cu ușurință după cîteva trepte de calcul. Odată cunoscute rația și primul termen al progresiei, necunoscutele se pot calcula prin însumarea termenilor progresiei, fără a mai fi ne-

cesar să se continue iterația. În modul acesta se pot stabili, pe bază de calcul iterativ, formule exacte pentru calculul cadrelor, de felul celor date în diferite manuale. Avantajul constă în faptul că stabilirea formulelor este mai puțin laborioasă decît pe bază de rezolvări directe de ecuații, în special pentru cadrele avînd bare cu secțiunea variabilă.

Dăm o serie de exemple de cadre cu noduri fixe, calculate prin însumări de progresii geometrice.

Exemplul 11. a) Grindă continuă cu 3 cîmpuri neegale (2 noduri). Se determină momentele pe reazeme pentru o grindă continuă cu 3 deschideri încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe un cîmp marginal (fig. 74).

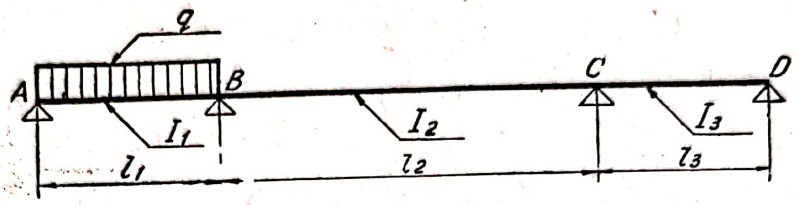


Fig. 74.

Rigiditățile barelor:

$$\rho_{AB}^{(B)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_1}{l_1}; \qquad \rho_{BC}^{(B)} = \rho_{BC}^{(C)} = \frac{I_2}{l_2}; \qquad \rho_{CD}^{(C)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_3}{l_3}$$

Folosim metoda repartizării momentelor (fig. 75).

Coeficienții de repartiție în B și C:

$$r_{BC}^{(B)} = \frac{\frac{I_2}{l_2}}{\frac{I_2}{l_2} + \frac{3}{4} \times \frac{I_1}{l_1}} = K_B; \qquad r_{AB}^{(B)} = 1 - K_B$$

$$r_{BC}^{(C)} = \frac{\frac{I_2}{l_2}}{\frac{I_2}{l_2} + \frac{3}{4} \times \frac{I_3}{l_3}} = K_C; \qquad r_{CD}^{(C)} = 1 - K_C$$

Momentul de încastrare perfectă (tab. 1):

$$\overline{M}_{AB}^{(B)} = -0{,}1250\, ql_1^2 = -M$$

Facem calculul pentru $-M$, urmînd să înlocuim la sfîrșit pe M cu valoarea lui.

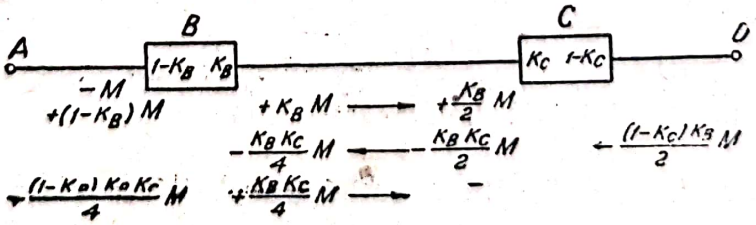


Fig. 75.

Se repartizează $-M$ în nodul B. Bara AB se încarcă cu $+(1-K_B)M$, iar bara BC cu $+K_BM$, care se transmite la C cu $+\frac{K_B}{2}M$. Prin repartizarea în C, bara BC se în-

carcă cu $-\frac{K_B K_C}{2} M$, care se transmite înapoi la B cu $-\frac{K_B K_C}{4} M$. Repartizînd acest moment, bara BC preia $+\frac{K_B^2 K_C}{4} M$. Pe coloana capătului din B al barei BC avem succesiv momentele repartizate: $+ K_B M$, $+\frac{K_B^2 K_C}{4} M$.

Raţia:

$$r = +\frac{K_B K_C}{4}$$

Primul termen al progresiei: $\left(K_B - \frac{K_B K_C}{4}\right) M = K_B \left(1 - \frac{K_C}{4}\right) M$.

Momentul total:

$$M_{BC}^{(B)} = \frac{K_B \left(1 - \frac{K_C}{4}\right)}{1 - \frac{K_B K_C}{4}} M = \frac{K_B (4 - K_C)}{4 - K_B K_C} M$$

Analog, la capătul din C al barei BC, primul termen al iteraţiei este $\frac{K_B}{2}(1 - K_C)M$.

Momentul total:

$$M_{BC}^{(C)} = \frac{\frac{K_B}{2}(1 - K_C)}{1 - \frac{K_B K_C}{4}} M = \frac{2 K_B (1 - K_C)}{4 - K_B K_C} M$$

În cazul grinzii cu deschideri egale:

$$K_B = K_C = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{7}$$

$$M_{BC}^{(B)} = \frac{\frac{4}{7}\left(4 - \frac{4}{7}\right)}{4 - \left(\frac{4}{7}\right)^2} M = \frac{8}{15} M = \frac{8}{15} 0{,}125\, ql^2 = \boxed{+ 0{,}067\, ql^2}$$

$$M_{BC}^{(C)} = \frac{2\frac{4}{7}\left(1 - \frac{4}{7}\right)}{4 - \left(\frac{4}{7}\right)^2} M = \frac{2}{15} M = \frac{2}{15} 0{,}125\, ql^2 = \boxed{+ 0{,}017\, ql^2}$$

(s-au regăsit coeficienţii cunoscuţi din „Manualul pentru beton armat", E. T. pag. 266).

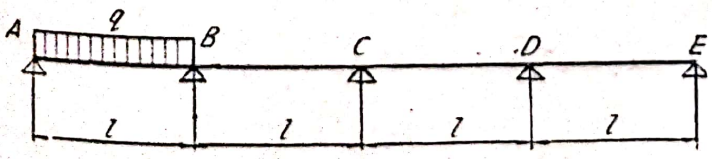
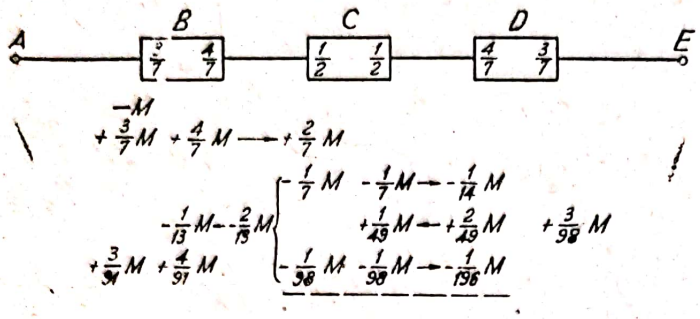


Fig. 76.

b) **Grindă continuă cu 4 cîmpuri egale (3 noduri).** Se determină momentele pe reazeme pentru o grindă continuă cu 4 deschideri egale, încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe un cîmp marginal (fig. 76).

Folosim metoda repartizării momentelor (fig. 77):

$$r_{AB}^{(B)} = \frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{3}{7}; \qquad r_{BC}^{(B)} = \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4}{7};$$



$$r_{BC}^{(C)} = r_{CD}^{(C)} = \frac{1}{2}$$

Momentul de încastrare perfectă (tab. 1):

$$\overline{M}_{AB}^{(B)} = -0{,}1250\, ql^2 = -M$$

Fig. 77.

Repartizăm în nodul B momentul $-M$. Bara AB se încarcă cu $+\frac{3}{7}M$, bara BC cu $+\frac{4}{7}M$, care se transmite cu $+\frac{2}{7}M$ la nodul C. Repartizăm acest moment în nodul C. Vom avea în fiecare bară (BC și CD) $-\frac{1}{7}M$. Pentru a pune în evidență progresia geometrică, nu mai trahsmitem înapoi la B, ci continuăm iterația numai între nodurile C și D. De la C la D se transmite $-\frac{1}{14}M$, care se repartizează în D. Bara CD preia prin repartizare $+\frac{1}{14}\times\frac{4}{7} = +\frac{2}{49}M$, iar bara DE $+\frac{1}{14}\times\frac{3}{7} = +\frac{3}{98}M$. Se transmite spre C $+\frac{1}{49}M$, care repartizat dă $-\frac{1}{98}M$ etc.

Se observă că la nodul C, momentele de transmis spre D și B sînt succesiv:

$$-\frac{1}{7}M, \quad -\frac{1}{98}M, \text{ etc.} \qquad \left(\text{rația} = \frac{\frac{1}{98}}{\frac{1}{7}} = \frac{1}{14}\right)$$

Deci momentul total de transmis spre B după echilibrarea completă a nodurilor C și D va fi

$$-\frac{1}{7}M\,\frac{1}{1-\frac{1}{14}} = -\frac{2}{13}M$$

care se transmite la B cu $-\frac{1}{13}M$. Prin repartiția în B, bara AB primește momentul $+\frac{1}{13}\times\frac{3}{7}M = \frac{3}{91}M$. Se observă că momentele repartizate succesiv barei AB în nodul B sînt:

$$+\frac{3}{7}M, \quad +\frac{3}{91}M, \text{ etc.} \qquad \left(\text{rația} = \frac{\frac{3}{91}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{13}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentul final la capătul B al barei AB:

$$M_{AB}^{(B)} = -M + \frac{3}{7}\,\frac{1}{1-\frac{1}{13}}\,M = M\left(1-\frac{13}{28}\right) = -\frac{15}{28}M$$

$$M_{AB}^{(B)} = -\frac{15}{28}\,0{,}1250\,ql^2 = \boxed{-\,0{,}067\,ql^2}$$

Momentul final la capătul C al barei BC:

$$M_{BC}^{(C)} = +\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{13}\right)M\,\frac{1}{1-\frac{1}{13}} = +\frac{1}{7}M$$

$$M_{BC}^{(C)} = +\,\frac{1}{7}\,0{,}1250\,ql^2 = \boxed{+\,0{,}018\,ql^2}$$

Momentul final la capătul D al barei DE:

$$M_{DE}^{(D)} = +\frac{3}{98}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{14}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{13}} = +\frac{1}{28}M$$

$$M_{DE}^{(D)} = +\,\frac{1}{28}\,0{,}1250\,ql^2 = \boxed{+\,0{,}0045\,ql^2}$$

(rezultatele obținute concordă cu coeficienții din tabelele uzuale).

Exemplul 12. Cadru cu 3 deschideri, cu stîlpii încastrați la bază. Se calculează cadrul simetric din fig. 78 *a*, cu 3 deschideri egale și avînd riglele BD, DF, FH cu vute simetrice, încărcat cu o sarcină uniform distribuită pe toate deschiderile.

Ținînd seama de simetrie, pentru rigla centrală DF se introduce în locul rigidității ρ_1 rigiditatea redusă ρ_1' conform formulei (4.43). Coeficienții de repartiție la noduri:

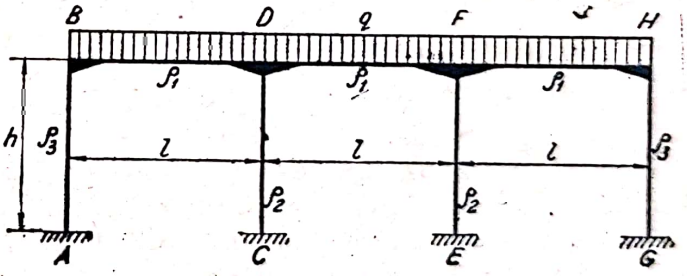


Fig. 78, a

$$r_{BD}^{(B)} = \frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_3} = r_1; \qquad r_{AB}^{(B)} = 1 - r_1;$$

$$r_{BD}^{(D)} = \frac{1}{\rho_1+\rho_1'+\rho_2} = r_2; \qquad r_{DE}^{(B)} = \frac{\rho_1'}{\rho_1+\rho_1'+\rho_2} = r_3$$

Coeficienții de transmitere:

$$t_{B\to D} = t_{D\to B} = t_1; \qquad t_{D\to C} = t_2; \qquad t_{B\to A} = t_3$$

Momentele de încastrare perfectă:

$$\overline{M}_{BD}^{(B)} = \overline{M}_{DF}^{(D)} = \overline{M}_{FH}^{(F)} = +\,M; \qquad \overline{M}_{BD}^{(D)} = \overline{M}_{DF}^{(F)} = \overline{M}_{FH}^{(H)} = -\,M$$

Scanned with OKEN Scanner

Schema de calcul (v. fig. 78, *b*).

În nodurile D și F momentele de încastrare perfectă de o parte și de alta a nodului se echilibrează, deci rămîne numai momentul neechilibrat din B, cu care se începe iterația. Repartizarea în B: bara BD preia $-r_1M$, care se transmite la D cu $-r_1t_1M$. Repartizarea în D: bara BD preia $+r_1r_2t_1M$, care se transmite la B cu $r_1r_2t_1^2M$. Noua repartizare în B: bara BD preia $-r_1^2r_2t_1^2M$ etc.

Seria momentelor neechilibrate în B are rația: $r = r_1r_2t_1^2$. Termenul inițial al seriei: $M(1-r_1)$. Momentul total:

$$M_{BD}^{(B)} = M\,\frac{1-r_1}{1-r_1r_2\,t_1^2}$$

$$M_{AB}^{(B)} = -\,M\,\frac{1-r_1}{1-r_1\,r_2\,t_1^2}$$

$$M_{BD}^{(D)} = -\,M + \frac{r_1\,t_1\,(1-r_2)\,M}{1-r_1\,r_2\,t_1^2}$$

$$M_{DE}^{(D)} = +\,M + \frac{r_1\,r_3\,t_1\,M}{1-r_1\,r_2\,t_1^2}$$

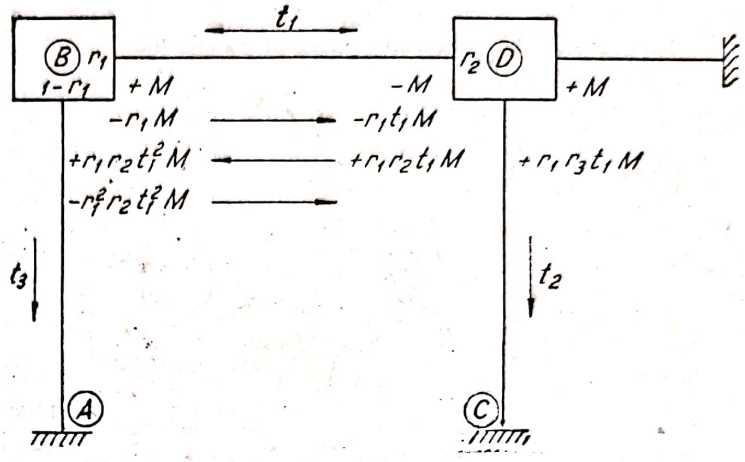


Fig. 78 b.

$$M_{CD}^{(D)} = -\,M_{BD}^{(D)} - M_{DE}^{(D)}; \qquad M_{CD}^{(C)} = M_{CD}^{(D)}t_2; \qquad M_{AB}^{(A)} = M_{AB}^{(B)}\,t_3.$$

Se observă că exemplele s-au ales astfel ca totdeauna să apară momente inițiale neechilibrate la cîte un singur nod al sistemului, respectiv în sistemul de ecuații să existe termen liber diferit de zero la o singură ecuație. Dacă apar momente neechilibrate la două sau mai multe noduri simultan, calculul trebuie făcut separat pentru fiecare din ele, rația progresiei geometrice fiind diferită în fiecare caz, așa cum s-a arătat și în cap. II.

★

O metodă pentru calculul cadrelor, care se bazează tot pe însumarea directă a progresiei geometrice formate de termenii iterației, a fost recent publicată de *P. P. Șaghin* (v. bibl. 69,70). Pentru un cadru oarecare de tip „deschis" (a cărui schemă nu cuprinde contururi închise), dacă se aplică ordinea de efectuare a transmiterilor, utilizată în exemplele 11 și 12, se obține între capetele fiecărei bare *jk* cîte o progresie geometrică de rație:

$$r = +\,t_{j\to k}\,t_{k\to j} = 1 - (1 - t_{j\to k}\,t_{k\to j}) = 1 - \delta_{jk}$$

unde:

$$\delta_{jk} = \begin{vmatrix} 1 & t_{k\to j} \\ t_{j\to k} & 1 \end{vmatrix}$$

este determinantul minor format de termenii de pe coloanele j, k, din ecuațiile nodurilor j, k.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & t_{k\to j} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & t_{j\to k} & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ \cdot \\ (j) \\ (k) \\ \cdot \\ (n) \end{matrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

P. P. Şaghin stabileşte pentru momentele la capetele barelor formule de calcul din aproape în aproape, pornind de la nodul încărcat cu moment exterior, spre nodurile marginale, utilizînd însumarea termenilor progresiilor geometrice şi introducînd pentru raţiile progresiilor expresiile lor în funcţie de determinanţii minori δ_{jk} corespunzători. De aceea metoda este denumită : metoda „determinanţilor de momente".

Pentru bare cu secţiune constantă :

$$r = t_{j\to k}\, t_{k\to j} = \left[-\frac{1}{2}\, r_{jk}^{(j)} \right] \left[-\frac{1}{2}\, r_{jk}^{(k)} \right] = +\frac{1}{4}\, r_{jk}^{(j)}\, r_{jk}^{(k)}$$

unde $r_{jk}^{(j)}$, $r_{jk}^{(k)}$ sînt coeficienţii de repartiţie ai barei jk în nodurile j şi k.

La expresia de mai sus ajunge şi *Şaghin* [bibl. 70, pag. 9, formula (3)]

În operarea cu rotiri, folosirea însumării directe a progresiei geometrice a termenilor iteraţiei permite, în cazul sistemelor „deschise", stabilirea unor expresii simple pentru rotirile nodurilor, sub formă de fracţii continue :

$$\theta_j = \theta_j^{(1)} \cfrac{1}{1 - \cfrac{\alpha_{jk}}{1 - \cfrac{\alpha_{kl}}{1 - \cfrac{\alpha_{lm}}{1 - \dots}}}}$$

unde $\theta_j^{(1)}$ sînt valorile iniţiale ale rotirilor, iar coeficienţii α_{jk}, α_{kl}, α_{lm}, ... sînt raţiile progresiilor geometrice obţinute prin transmiterile între $j - k$, $k - l$, $l - m$, ...

Pentru exemplificare, în fig. 79 se arată mersul operaţiunilor pentru deducerea expresiei de mai sus, în cazul unei grinzi continue cu 5 deschideri, încărcată cu un moment exterior $\overline{M}_1$ în nodul *1*. Valoarea iniţială a rotirii în nodul *1* :

$$\theta_1^{(1)} = \frac{\overline{M}_1}{\Sigma K_1}$$

se transmite la nodul *2* cu $\theta_1^{(1)}\, t_{1\to 2}$ şi de aici la nodul *3* cu $\theta_1^{(1)}\, t_{1\to 2}\, t_{2\to 3}$. Se continuă apoi transmiterile numai între nodurile *3* şi *4*, fără a transmite înapoi la *2*. Al doilea termen la nodul *3* este : $\theta_1^{(1)}\, t_{1\to 2}\, t_{2\to 3}\, t_{3\to 4}\, t_{4\to 3}$, deci raţia progresiei termenilor rezultaţi din transmiterile între *3* şi *4* :

$$\alpha_{34} = t_{3\to 4}\, t_{4\to 3}$$

Rotirea totală în *3* după acest prim ciclu de operaţiuni :

$$\theta_3^{(1)} = \theta_1^{(1)}\, t_{1\to 2}\, t_{2\to 3}\, \frac{1}{1-\alpha_{34}}$$

se transmite înapoi la *2* cu $\theta_1^{(1)}\, t_{1\to 2}\, t_{2\to 3}\, t_{3\to 2}\, \dfrac{1}{1-\alpha_{34}}$.

Scanned with OKEN Scanner

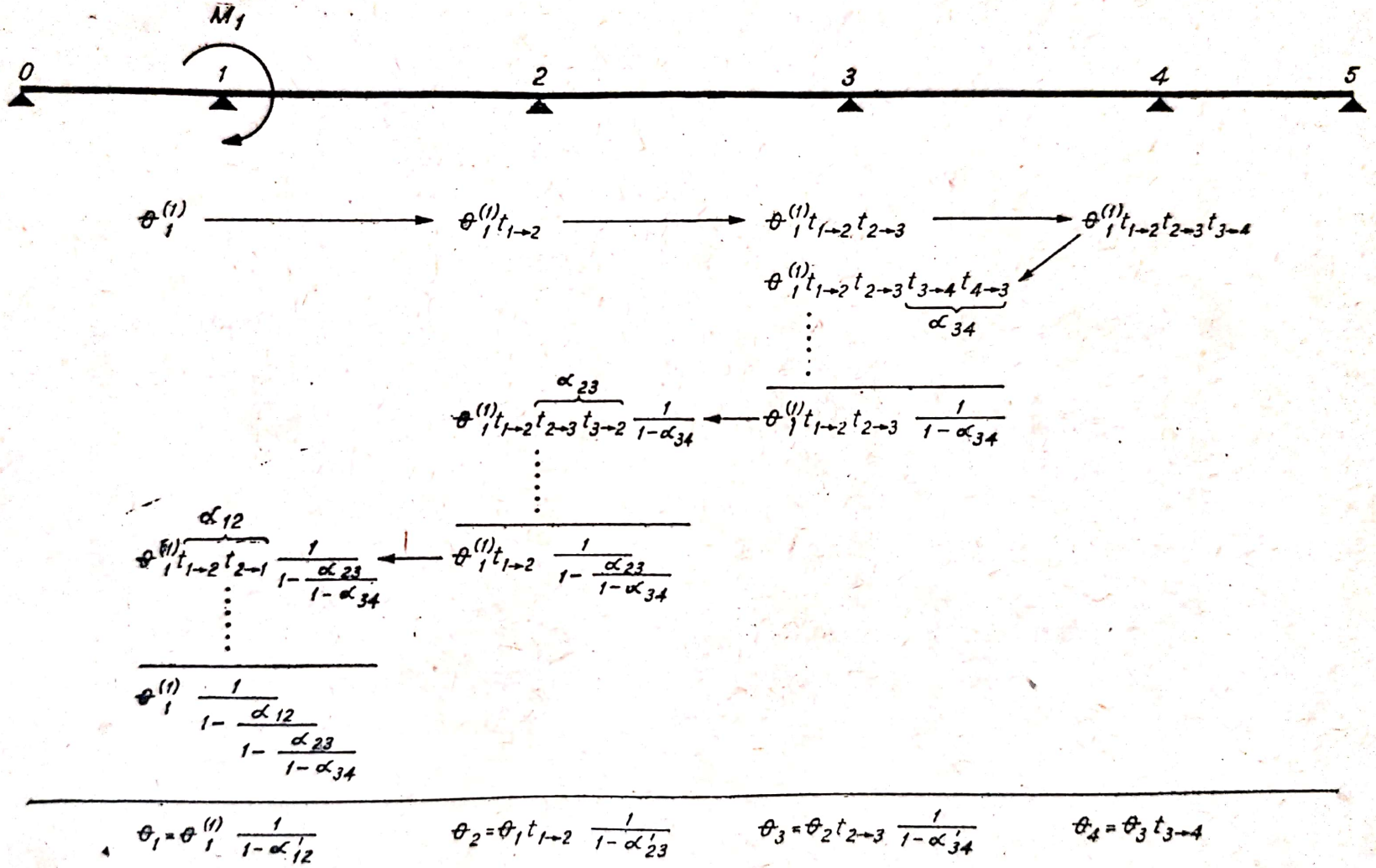

M1
0
1
2
3
4
5
$\theta_1^{(1)}$
$\theta_1^{(1)} t_{1\to2}$
$\theta_1^{(1)} t_{1\to2} t_{2\to3}$
$\theta_1^{(1)} t_{1\to2} t_{2\to3} t_{3\to4}$
$\theta_1^{(1)} t_{1\to2} t_{2\to3} t_{3\to4} t_{4\to3}$
α_{34}
$\theta_1^{(1)} t_{1\to2} t_{2\to3} \frac{1}{1-\alpha_{34}}$
$\theta_1^{(1)} t_{1\to2} t_{2\to3} t_{3\to2} \frac{1}{1-\alpha_{34}}$
α_{23}
$\theta_1^{(1)} t_{1\to2} \frac{1}{1-\frac{\alpha_{23}}{1-\alpha_{34}}}$
$\theta_1^{(1)} t_{1\to2} t_{2\to1} \frac{1}{1-\frac{\alpha_{23}}{1-\alpha_{34}}}$
α_{12}
$\theta_1^{(1)} \frac{1}{1-\frac{\alpha_{12}}{1-\frac{\alpha_{23}}{1-\alpha_{34}}}}$
$\theta_1 = \theta_1^{(1)} \frac{1}{1-\alpha'_{12}}$
$\theta_2 = \theta_1 t_{1\to2} \frac{1}{1-\alpha'_{23}}$
$\theta_3 = \theta_2 t_{2\to3} \frac{1}{1-\alpha'_{34}}$
$\theta_4 = \theta_3 t_{3\to4}$

Fig. 79

Se continuă iterația numai între *2* și *3*. Notînd : $t_{2\to 3}\, t_{3\to 2} = \alpha_{23}$, al doilea termen la nodul *2* va fi :

$$\theta_1^{(1)}\, t_{1\to 2}\, \alpha_{23}\, \frac{1}{1-\alpha_{34}},$$

deci rația progresiei geometrice între *2* și *3* este $\alpha'_{23} = \alpha_{23}\frac{1}{1-\alpha_{34}}$.

(Se observă că prin termenul $\frac{1}{1-\alpha_{34}}$ se introduce și efectul nodului *4*, respectiv la fiecare deblocare a nodului *3* se lasă se rotească și nodul *4*, adică în realitate se deblochează grupul de noduri *3*, *4*.) Rotirea totală în *2* :

$$\theta_2^{(1)} = \theta_1^{(1)}\, t_{1\to 2}\, \frac{1}{1-\alpha'_{23}} = \theta_1^{(1)}\, t_{1\to 2}\, \frac{1}{1-\frac{\alpha_{23}}{1-\alpha_{34}}}$$

se transmite înapoi la *1* cu $\theta_1^{(1)}\, t_{1\to 2}\, t_{2\to 1}\, \frac{1}{1-\frac{\alpha_{23}}{1-\alpha_{34}}}$

Se continuă, după același procedeu, iterația între *1* și *2*. Notînd și aici $t_{1\to 2}\, t_{2\to 1} = \alpha_{12}$, al doilea termen la nodul *1* va fi :

$$\theta_1^{(2)} = \theta_1^{(1)}\, \alpha_{12}\, \frac{1}{1-\frac{\alpha_{23}}{1-\alpha_{34}}}$$

deci rația progresici geometrice între *1* și *2* :

$$\alpha'_{12} = \alpha_{12}\, \frac{1}{1-\frac{\alpha_{23}}{1-\alpha_{34}}} = \alpha_{12}\, \frac{1}{1-\alpha'_{23}}$$

Rotirea totală a nodului *1* :

$$\theta_1 = \theta_1^{(1)}\, \frac{1}{1-\alpha'_{12}} = \theta_1^{(1)}\, \frac{1}{1-\frac{\alpha_{12}}{1-\frac{\alpha_{23}}{1-\alpha_{34}}}}$$

Valorile finale ale rotirilor în celelalte noduri se obțin din transmiterea lui θ_1 la *2*, *3*, *4*. Rezultă formulele de recurență :

$$\theta_2 = \theta_1\, t_{1\to 2}\, \frac{1}{1-\alpha'_{23}} \qquad \left(\alpha'_{23}\, \frac{\alpha_{23}}{1-\alpha_{34}}\right)$$

$$\theta_3 = \theta_2\, t_{2\to 3}\, \frac{1}{1-\alpha'_{34}} \qquad (\alpha'_{34} = \alpha_{34})$$

$$\theta_4 = \theta_3 t_{3\to 4} \qquad (\alpha'_{45} = 0)$$

Scanned with OKEN Scanner

Să aplicăm această metodă de calcul grinzii continue cu 4 deschideri egale din exemplul nr. 11, *b*. Solicitarea exterioară a sistemului de bază în nodul B este momentul de încastrare perfectă al barei AB (fig. 79) :

$$\overline{M}_B = \overline{M}_{AB}^{(B)} = -0{,}125\ ql^2$$

Rigiditățile barelor :

$$\rho_{AB} = \rho_{DE} = \frac{3}{4}\ ;\quad \rho_{BC} = \rho_{CD} = 1\ ;$$

$$\Sigma\rho_B = \Sigma\rho_D = 1{,}75\ ;\qquad \Sigma\rho_C = 2{,}00$$

Coeficienți de transmitere :

$$t_{C\to B} = t_{C\to D} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1{,}75} = -0{,}286$$

$$t_{B\to C} = t_{D\to C} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2{,}00} = -0{,}250$$

Rațiile progresiilor geometrice :

$$\alpha_{BC} = \alpha_{CD} = 0{,}286 \times 0{,}250 = 0{,}0715$$

$$\alpha'_{CD} = \alpha_{CD} = 0{,}0715\ ;\quad \alpha'_{BC} = \frac{\alpha_{BC}}{1-\alpha_{CD}} = \frac{0{,}0715}{1-0{,}0715} = 0{,}0770$$

Valoarea inițială a rotirii în B :

$$\theta'^{(1)}_B = \frac{\overline{M}_B}{\Sigma\rho_B} = -\frac{0{,}125\ ql^2}{1{,}75} = 0{,}0715\ ql^2$$

Valorile finale ale rotirilor nodurilor :

$$\theta'_B = \theta'^{(1)}_B \frac{1}{1-\alpha'_{BC}} = -0{,}0715\ \frac{1}{1-0{,}0770} = -0{,}0774\ ql^2$$

$$\theta'_C = \theta'_B\, t'_{B\to C}\, \frac{1}{1-\alpha'_{CD}} = -0{,}0774\ ql^2\,(-0{,}250)\,\frac{1}{1-0{,}0715} = 0{,}0209\ ql^2$$

$$\theta'_D = \theta'_C\, t_{C\to D} = 0{,}0209\ ql^2\ (-0{,}286) = -0{,}0060\ ql^2$$

Momentele la capetele barelor :

$$M_{AB}^{(B)} = -0{,}125\ ql^2 - \frac{3}{4}(-0{,}0774\ ql^2) = -0{,}067\ ql^2$$

$$M_{BC}^{(B)} = -(-0{,}0774 + \frac{1}{2}\,0{,}0209)\ ql^2 = +0{,}067\ ql^2$$

$$M_{BC}^{(C)} = -(0{,}0209 - \frac{1}{2}\,0{,}0774)\ ql^2 = +0{,}018\ ql^2$$

$$M_{CD}^{(C)} = -(0{,}0209 - \frac{1}{2}\,0{,}0060)\ ql^2 = -0{,}018\ ql^2$$

$$M_{CD}^{(D)} = -(-0{,}0060 + \frac{1}{2}\,0{,}0209)\ ql^2 = -0{,}0045\ ql^2$$

$$M_{DE}^{(D)} = -\frac{3}{4}(-0{,}0060\ ql^2) = +0{,}0045\ ql^2$$

Scanned with OKEN Scanner

Procedeul de calcul expus mai sus a fost introdus de *Kloučeк* (v. bibl. 41) şi poate fi considerat ca un corespondent în operarea cu rotiri al metodei punctelor fixe. Pentru detalii asupra modului de aplicare la sisteme mai complicate, se pot consulta şi lucrările lui *Ulrich* şi *Fischer* (bibl. 26).

IV. Aplicarea procedeului de iteraţie Wright în metoda transmiterii rotirilor (v. bibl. 51)

În cap. I s-a expus, ca variantă a modului de operare pe schema de transmiteri, procedeul de iteraţie elementar al lui Wright. În exemplul nr. 13 este aplicat acest procedeu la calculul prin metoda transmiterii rotirilor al unei grinzi continue.

Exemplu 13. Grindă continuă, calculată prin metoda transmiterii rotirilor, aplicînd procedeul de iteraţie al lui Wright. Pentru grinda continuă din fig. 80 se cere determinarea momentelor pe reazeme, cu aproximaţia de 10 kgm.

Secţiunea grinzii este constantă. Punînd $I = 1$ m^4, rigidităţile barelor :

$$\rho_{AB}^{(A)} = \rho_{AB}^{(B)} = \frac{1}{6} = 0{,}167$$

$$\rho_{BC}^{(B)} = \rho_{BC}^{(C)} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$\rho_{CD}^{(C)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = 0{,}125$$

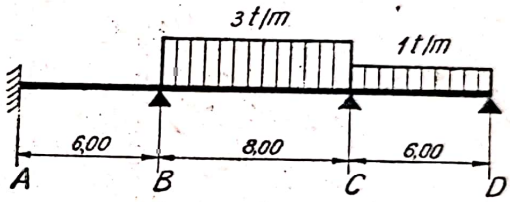


Fig. 80.

$$\sum \rho^{(B)} = 0{,}167 + 0{,}125 = 0{,}292$$

$$\sum \rho^{(C)} = 0{,}125 + 0{,}125 = 0{,}250$$

Coeficienţii de transmitere :

$$t_{B\to C} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}125}{0{,}250} = -0{,}250\,; \quad t_{C\to B} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}125}{0{,}292} = -0{,}214$$

Momentele de încastrare perfectă :

$$\bar{M}_{BC}^{(B)} = +\frac{3000 \times 8^2}{12} = +16000 \text{ kgm}\,; \qquad \bar{M}_{BC}^{(C)} = -16000 \text{ kgm}$$

$$\bar{M}_{CD}^{(C)} = +\frac{1000 \times 6^2}{8} = +4500 \text{ kgm}$$

Valorile iniţiale ale rotirilor :

$$\theta_B^{\prime(1)} = +\frac{16000}{4 \times 0{,}292} = +13672$$

$$\theta_C^{\prime(1)} = \frac{-16000 + 4500}{4 \times 0{,}250} = 11500$$

Scanned with OKEN Scanner

Schema de transmiteri (v. fig. 81 a).

Corectarea începe de la nodul B, unde $\theta_B^{\prime(1)} = 13672$. Se scade 10000, care se transmite la C cu $-10000 \times 0{,}250 = -2500$. Rămîne pentru treapta de calcul următoare rotirea netransmisă $+3\,672$. Se corectează nodul C, unde rotirea blocată este $-11500 - 2500 = -14000$. Se scade 10000, care se transmite la B cu $+10\,000 \times 0{,}214$. Rămîne netransmisă

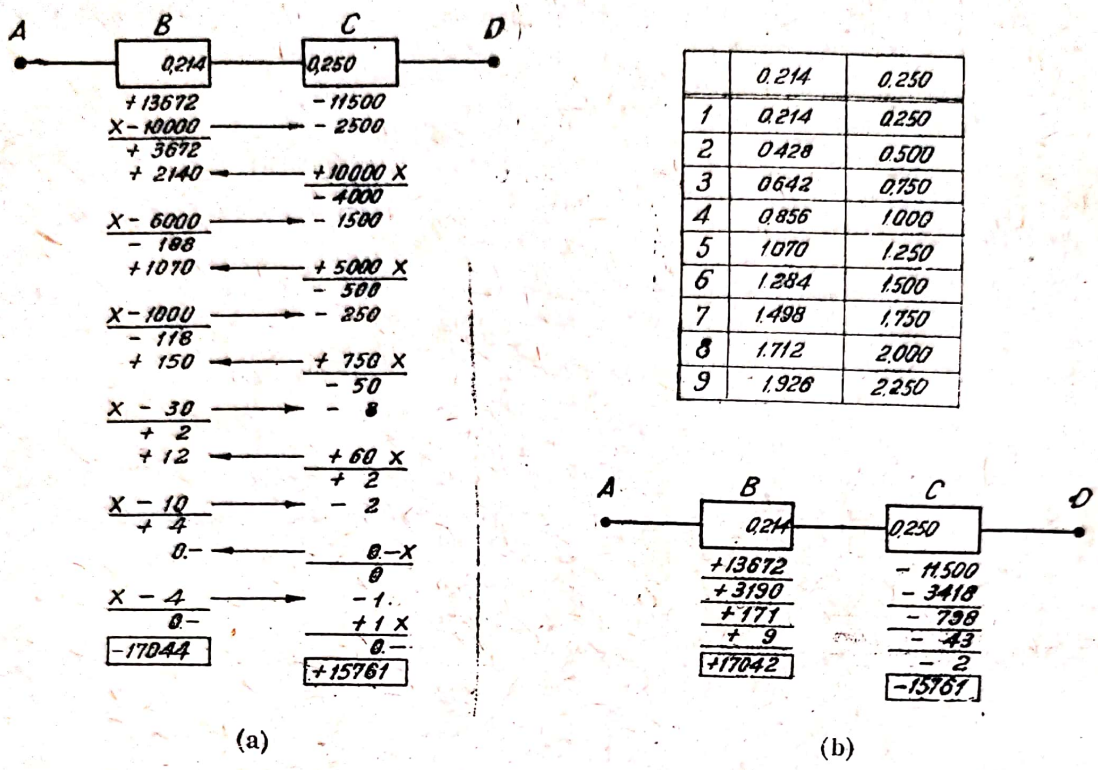


Fig. 81

diferența -4000. La noua corectare a nodului B, rotirea blocată este $+3672 + 2140 = 5\,812$. Se scade 6000, care se transmite la C cu $-6000 \times 0{,}250 = -1500$. Rămîne netransmis $+5812 - 6000 = -188$ etc. Însumarea la sfîrșitul calculului:

$$\theta_B' = -(-10\,000 - 6000 - 1000 - 30 - 10 - 4) = +17044$$

$$\theta_C' = -(+1000 + 5000 + 700 + 60 + 0 + 1) = -15761$$

Momente la capetele barelor:

$$M_{BC}^{(B)} = -4 \times 0{,}125 \left(17044 - \frac{1}{2}\ 15761 \right) + 16000 = +11400 \text{ kgm}$$

$$M_{AB}^{(B)} = -4 \times 0{,}167 \times 17044 = -11400 \text{ kgm}$$

$$M_{BC}^{(C)} = -4 \times 0{,}125 \left(-15761 + \frac{1}{2}\ 17044 \right) - 16000 = -12380 \text{ kgm}$$

$$M_{CD}^{(C)} = -4 \times 0{,}125\ (-15761) + 4500 = +12380 \text{ kgm}$$

Pentru comparație s-a dat în fig. 81 b schema de transmiteri în metoda obișnuită. Se observă și aici, ca și în exemplul 5, că numărul de trepte de calcul și de operațiuni pe schemă este mai mare în procedeul Wright, care prezintă în schimb avantajele arătate în cap. II.

Scanned with OKEN Scanner

V. Linii de influență

În metoda transmiterii rotirilor, se obțin ca rezultat al calculului valorile rotirilor nodurilor, cu ajutorul cărora se poate construi direct deformata cadrului. În cazul unui cadru încărcat cu sarcini mobile, se pot trasa în acest mod și liniile de influență ale eforturilor în diferite secțiuni, folosind principiul deplasărilor virtuale.

De exemplu la cadrul din fig. 82, *a*, pentru determinarea liniei de influență a momentului la capătul B al barei AB, se consideră cadrul încărcat într-o secțiune curentă x cu forța de 1 t și se introduce pe bara AB, în imediata apropiere a nodului B, o articulație (fig. 82, *b*), înlocuindu-se efectul continuității dintre cele două părți de cadru despărțite prin articulație, cu perechea de momente $M_{AB}^{(B)}$ și cu perechea de forțe $V_{AB}^{(B)}$; apoi se dă sistemului o deplasare virtuală, rotind partea din stînga față de cea din dreapta cu $\Delta\theta_B = 1$. În această deplasare virtuală dau lucru mecanic numai forța de 1 t, care parcurge săgeata δ_x, și perechea de momente $M_{AB}^{(B)}$, care parcurg rotiri diferind între ele cu $\Delta\theta_B = 1$. Ecuația de lucru mecanic virtual:

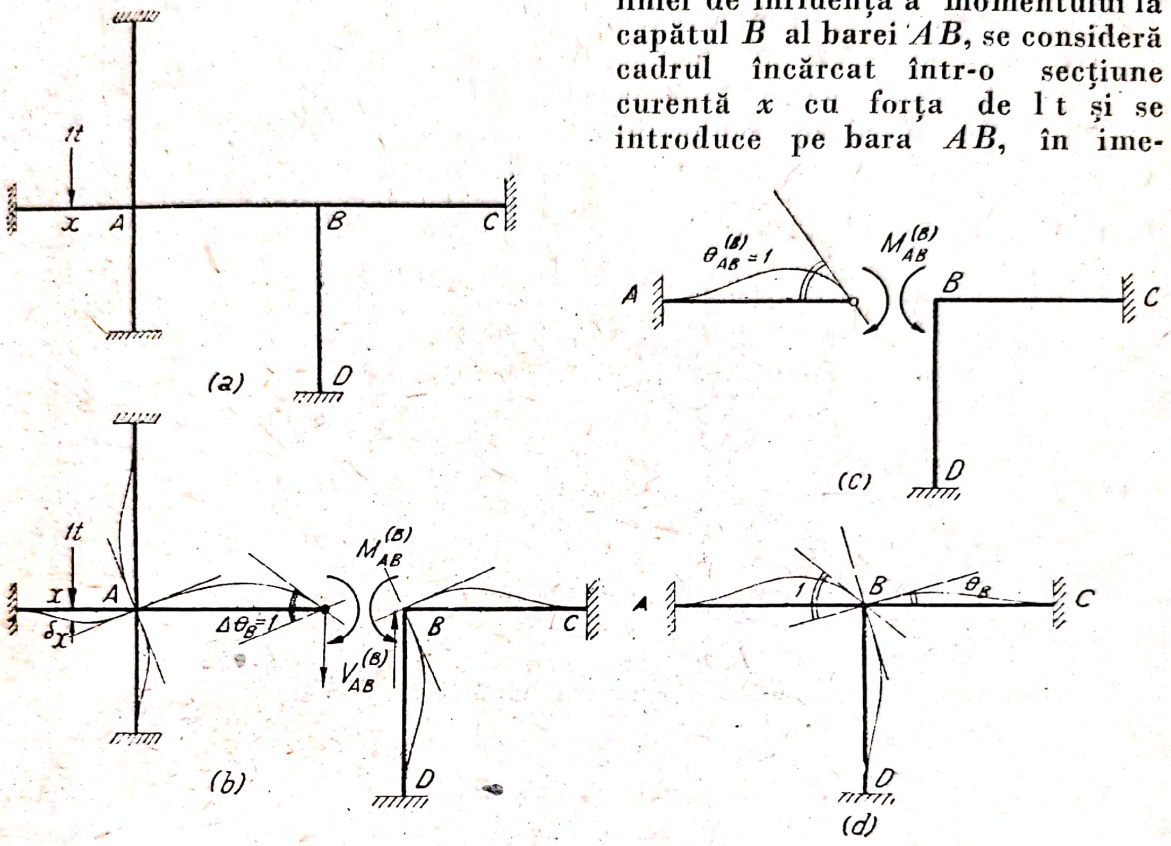


Fig. 82

$$M_{AB}^{(B)}\,\Delta\theta_B = 1\text{t} \times \delta_x$$

$$M_{AB}^{(B)} = 1\text{t}\,\frac{\delta_x}{\Delta\theta_B} = \delta_x$$

Deci ordonatele δ_x ale deformatei cadrului reprezintă chiar ordonatele liniei de influență a momentului $M_{AB}^{(B)}$.

Utilizăm pentru determinarea rotirilor nodurilor metoda aproximațiilor succesive. În sistemul de bază, cu nodurile blocate, se introduce articulația în apropierea nodului B și se dă barei AB rotirea $\theta_{AB}^{(B)} = 1$. În acest timp

(fig. 82, *c*), toate nodurile rămîn blocate. Perechea de momente $M_{AB}^{(B)}$ reprezintă solicitarea exterioară a sistemului de bază.

$$M_{AB}^{(B)} \text{ (pe nod)} = -\theta_{AB}^{(B)} K_{AB}^{(B)} = -K_{AB}^{(B)}$$

Deblocăm apoi nodul B care, conform relației (4.12), se rotește cu :

$$\theta_B = \frac{M_{AB}^{(B)}}{K_{AB}^{(B)} + K_{DB}^{(B)} + K_{CB}^{(B)}} = -\frac{K_{AB}^{(B)}}{K_{AB}^{(B)} + K_{DB}^{(B)} + K_{CB}^{(B)}} = -r_{AB}^{(B)}$$

Deci, după deblocarea nodului B, barele BD și BC au în B rotirile $\theta_B = -r_{AB}^{(B)}$, iar bara AB are în B rotirea $1 - r_{AB}^{(B)}$. Diferența de rotire $\Delta\theta_B = 1$, între cele două părți ale cadrului, se păstrează.

Continuînd deblocarea succesivă a nodurilor, pînă cînd cantitățile de transmis devin neglijabile, se obțin valorile finale ale rotirilor nodurilor în deplasarea virtuală dată. Cu ajutorul lor se construiește deformata cadrului, care reprezintă chiar linia de influență căutată (fig. 82, *d*).

Suprafața liniei de influență pe porțiunea dintre două noduri succesive A, B se poate calcula (v. bibl. 5) cu formula :

$$\Omega_{AB} = \int_0^{l_{AB}} \delta_x \, dx = \boxed{\frac{l_{AB}^2}{12}(\theta_A - \theta_B)} \qquad (4.50)$$

unde :

δ_x — este ordonata deformatei (săgeata) în secțiunea x;
l_{AB} — deschiderea barei AB.

Exemplul 14. Determinarea liniei de influență a momentului încovoietor într-o secțiune a unui cadru cu noduri fixe, cu metoda transmiterii rotirilor.

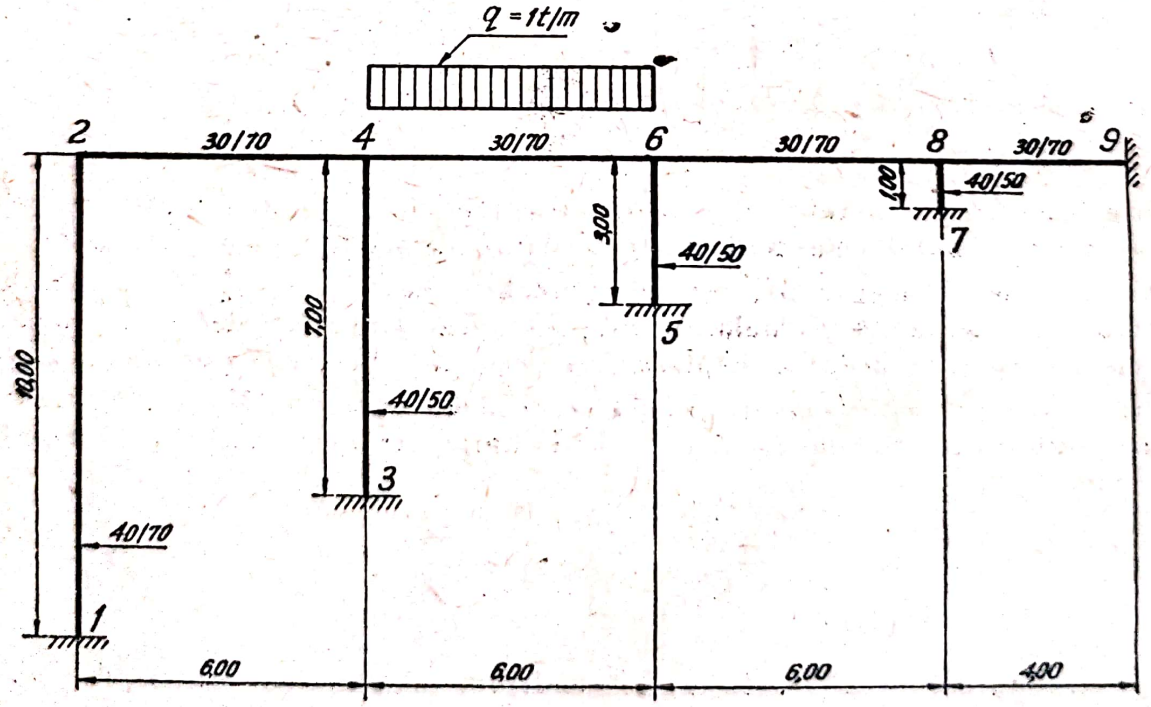


Fig. 83.

Pentru cadrul din fig. 83 se cere trasarea liniei de influență a momentului $M_{4-6}^{(6)}$ și calculul cu ajutorul ei al momentului dintr-o sarcină uniform distribuită de 1 t/m pe deschiderea $4-6$.

Scanned with OKEN Scanner

Rigiditățile barelor

Bara	h (dm)	b (dm)	I (dm^4)	l (dm)	$\rho = \frac{I}{l}$ (dm^3)
1—2	7,0	4,0	114,3	100	1,143
3—4	5,0	4,0	41,7	70	0,595
5—6	5,0	4,0	41,7	30	1,390
7—8	5,0	4,0	41,7	10	4,170
2—4	7,0	3,0	85,8	60	1,430
4—6	7,0	3,0	85,8	60	1,430
6—8	7,0	3,0	85,8	60	1,430
8—9	7,0	3,0	85,8	40	2,145

Sumele rigidităților la noduri:

$$\Sigma\rho_2 = 1{,}143 + 1{,}430 = 2{,}573$$

$$\Sigma\rho_4 = 1{,}430 + 0{,}595 + 1{,}430 = 3{,}455$$

$$\Sigma\rho_6 = 1{,}430 + 1{,}390 + 1{,}430 = 4{,}250$$

$$\Sigma\rho_8 = 1{,}430 + 4{,}170 + 2{,}145 = 7{,}745$$

Coeficientul de repartiție al barei $4-6$ în nodul 6:

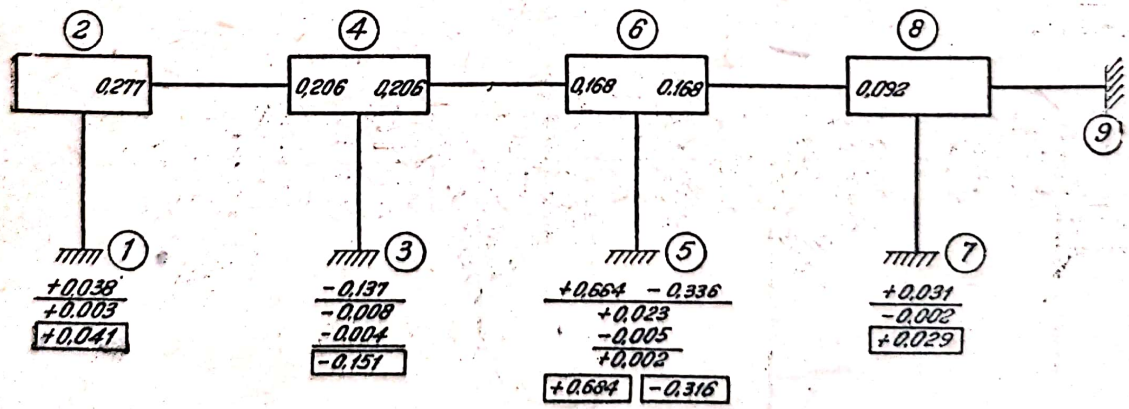
$$r_{4-6}^{(6)} = \frac{1{,}430}{4{,}250} = 0{,}336$$

Coeficienții de transmitere:

$$t_{2\to4} = t_{6\to4} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1{,}430}{3{,}455} = -0{,}206\,;\quad t_{4\to2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1{,}430}{2{,}573} = -0{,}277$$

$$t_{4\to6} = t_{8\to6} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1{,}430}{4{,}250} = -0{,}168\,;\quad t_{6\to8} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1{,}430}{7{,}745} = -0{,}092$$

Schema de calcul (v. fig. 84 a).



ORDINEA

(6) +0,664; −0,336 (8) +0,031

(4) −0,137 (6) +0,023 − 0,005 = +0,018

(2) +0,038 (4) −0,008 − 0,004 = −0,012

Fig. 84 a.

Se dă capătului *6* al barei *4—6* rotirea + 1,000. Se deblochează nodul 6, care se roteşte cu $\theta_6 = -r^{(6)}_{4-6} = -0{,}336$. După deblocare, bara *4—6* are în 6 rotirea totală + 1,000 − 0,336 = = + 0,664, iar barele *5—6* şi *6—8* rotirea − 0,336. Se transmite :

— la nodul *4* : $-0{,}664 \times 0{,}206 = -0{,}137$

— la nodul *8* : $+0{,}336 \times 0{,}092 = +0{,}031$

După aceasta corectările nodurilor continuă după procedeul obişnuit. Cantităţile acumulate în treptele următoare de calcul la nodul *6* se înscriu pe o coloană unică. La sfîrşitul calculului, se adună cantităţile de pe coloana unică la valorile iniţiale + 0,664, − 0,336 ale rotirilor în dreapta şi în stînga articulaţiei introduse, obţinîndu-se valorile finale + 0,684 şi − 0,316 ale rotirilor în jurul nodului *6*.

Linia de influenţă a momentului $M^{(6)}_{4-6}$ este reprezentată în fig. 84 b.

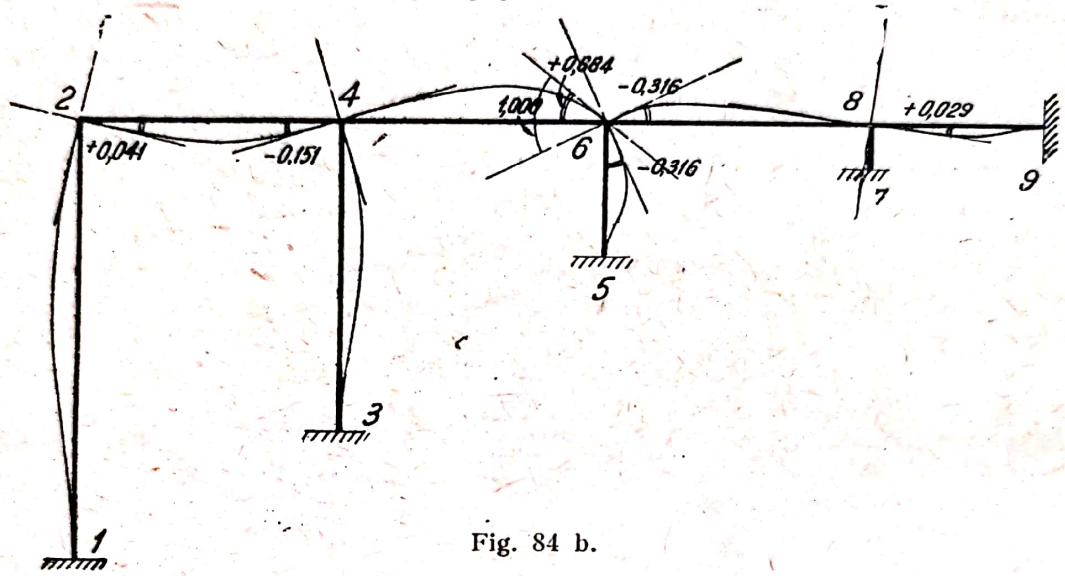


Fig. 84 b.

Suprafaţa liniei de influenţă $M^{(6)}_{4-6}$ între *4* şi *6* :

$$\Omega_{4-6} = \frac{-0{,}151 - 0{,}684}{12} 6{,}00^2 = -2{,}50 \text{ m}^2$$

Momentul din sarcina uniform distribuită :

$$M^{(6)}_{4-6} = 2{,}50 \text{ m}^2 \times 1 \text{ t/m} = 2{,}50 \text{ tm}$$

Verificarea prin metoda repartizării momentelor (v. fig. 85). Momentul de încastrare perfectă : $\frac{1 \times 6^2}{12} = 3$ tm.

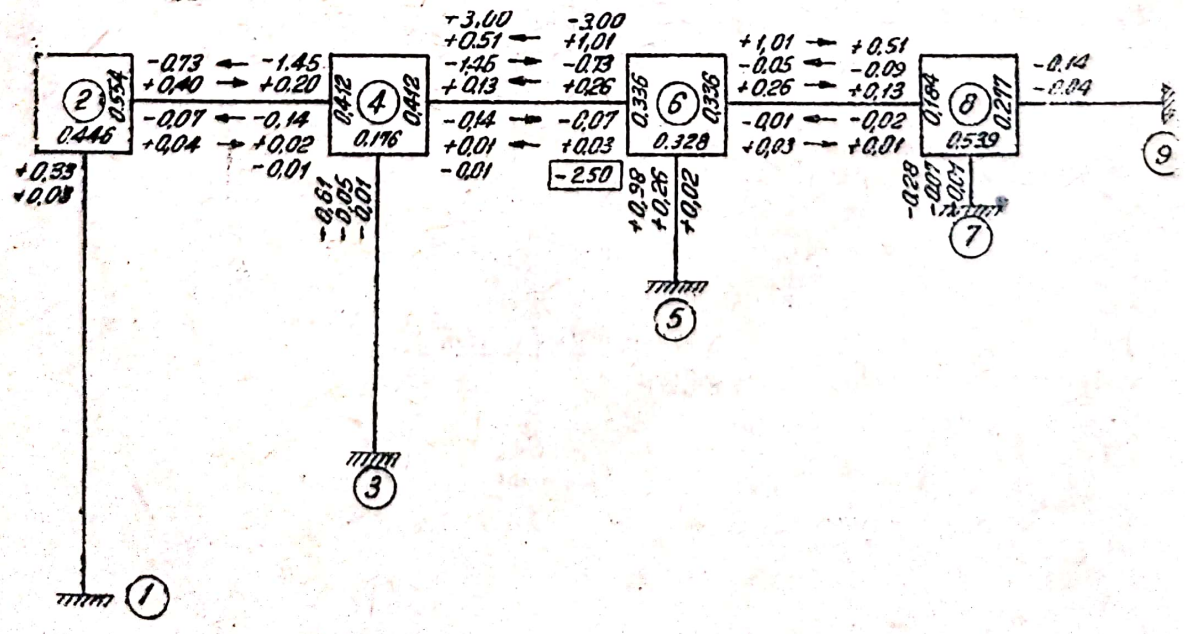


Fig. 85.

F. COMPARAȚIE ÎNTRE METODELE DE REZOLVARE PRIN APROXIMAȚII SUCCESIVE PENTRU CADRE CU NODURI FIXE

Dintre cele două moduri de a scrie și rezolva prin aproximații succesive sistemul de ecuații de continuitate și echilibru ale unui cadru cu noduri fixe, — luînd ca necunoscute momentele sau rotirile — fiecare are avantajele lui în ceea ce privește ușurința calculului.

I. Avantajele metodei transmiterii rotirilor

a) Numărul de ecuații ale sistemului fiind mai mic decît în metoda momentelor, numărul de operațiuni pe schemă și de coloane de cifre se reduce în consecință. Vom avea la fiecare nod cîte o singură coloană, în loc de cîte o coloană la fiecare capăt de bară. De asemenea, se elimină operațiunile de repartiție de la fiecare treaptă de calcul.

b) Echilibrînd nodurile începînd de la cel unde s-a acumulat cea mai mare cantitate de rotiri transmise, se obține ordinea de calcul optimă pentru convergență. În metoda repartizării momentelor, singurul criteriu pe care-l avem la dispoziție pentru alegerea ordinei de echilibrare a nodurilor este de a porni totdeauna de la nodul unde se găsește cel mai mare moment neechilibrat (cea mai mare cantitate de momente transmise spre nod și nerepartizate) — criteriu care însă nu este cel mai just. De exemplu, presupunînd toate barele unui cadru de rigidități egale și două noduri avînd aproximativ același moment neechilibrat, dar un număr diferit de bare, cel mai neechilibrat nod este cel cu mai puține bare, deoarece fiecare bară preia și transmite mai departe un moment mai mare. În general, nu interesează să se pornească de la nodul cu $\overline{M}$ max., ci de la cel cu $\frac{\overline{M}}{\Sigma K} = \theta\text{max.}$

În metoda repartizării momentelor nu apar aceste elemente și deci ordinea de echilibrare a nodurilor nu poate ajunge să fie cea optimă pentru convergență, ca în metoda transmiterii rotirilor.

c) Prin trecerea la sfîrșitul calculului de la rotiri la momente, se face implicit și verificarea calculului, prin verificarea echilibrului momentelor în jurul nodurilor. În metoda repartizării momentelor, așa cum s-a mai arătat, verificarea finală a echilibrului în jurul nodurilor nu constituie decît o verificare a operațiunilor de repartiție făcute în timpul iterației, ecuațiile de capete de bare rămînînd neverificate (nu se verifică egalitatea rotirilor la noduri).

În modul acesta, eventualele erori la operațiunile de transmitere apar la sfîrșit în metoda transmiterii rotirilor, pe cînd în metoda repartizării momentelor nu apar decît dacă se verifică ecuațiile (4.16) cu momentele finale rezultate din calcul, operațiune laborioasă și care în general nu se mai face în practică.

d) În cazul cadrelor încărcate cu sarcini mobile, cu ajutorul metodei transmiterii rotirilor se pot trasa direct liniile de influență.

e) După cum se va vedea în cap. VII, metoda transmiterii rotirilor se pretează mai bine la o extindere a rezolvării prin aproximații succesive și pentru cazul cadrelor cu noduri deplasabile (v. bibl. 2).

II. Avantajele metodei repartizării momentelor

a) Operațiunile de calcul se fac cu momente, deci cu elemente al căror ordin de mărime este mai ușor de urmărit și de interpretat, decît cel al rotirilor. Transmiterea momentelor în interiorul cadrelor dă o imagine mai

Scanned with OKEN Scanner

directă a propagării efectelor, decît transmiterea rotirilor. Deşi în mod obişnuit în metoda transmiterii rotirilor lucrăm cu cantităţile $\theta' = E\theta$, care aduc rotirile reale foarte mici la un ordin de mărime apropiat de cel al momentelor, totuşi faptul că se operează cu alte elemente decît necunoscutele finale ale problemei (momentele la capetele barelor) este considerat ca un dezavantaj al acestei metode, în raport cu metoda repartizării momentelor.

b) Prin faptul că se operează cu momente, apar la fiecare treaptă de calcul corecţiile (erorile) direct la necunoscutele care interesează, încît se poate aprecia mai just aproximaţia la care să se încheie iteraţia, fie procentual faţă de momentele iniţiale de încastrare perfectă, fie chiar ca valori absolute, calculatorul ştiind de obicei ce valori ale momentelor încovoietoare sînt neglijabile pentru dimensionare într-o anumită situaţie. În metoda transmiterii rotirilor, singurul criteriu după care ne putem orienta pentru a şti cînd să încheiem iteraţia sînt valorile corecţiilor la rotiri, care se pot limita în procente faţă de rotirile iniţiale. Acest criteriu nu este însă suficient, erorile procentuale la rotiri nefiind concludente în ceea ce priveşte erorile procentuale la momente. Într-adevăr, relaţia finală de trecere de la rotiri la momente este :

$$M_{jk}^{(j)} = \overline{M}_{jk}^{(j)} - 4\rho_{jk}^{(j)} \left[\theta_j' + t_{j\to k}^{(M)}\, \theta_k'\right]$$

Dacă momentele de încastrare perfectă în jurul unui nod se echilibrează în bună parte, ceea ce se întîmplă deseori la cadrele obişnuite şi la grinzile continue, în calculul pentru sarcina permanentă, valorile iniţiale ale rotirilor sînt mici, astfel că mergînd cu iteraţia pînă la realizarea unei aproximaţii oarecare faţă de aceste valori, realizăm la momente o precizie mai mare decît cea cerută, termenul al doilea din expresia lui $M_{jk}^{(j)}$ fiind mic în raport cu primul şi erorile pe care le conţine pierzîndu-şi din importanţă prin adunarea cu primul termen.

Invers, dacă momentele de încastrare perfectă sînt mici, sau nu există de loc (bare neîncărcate), iar pentru θ_j' şi $t_{j\to k}\,\theta_k'$ se obţin valori apropiate şi de semn contrar, $M_{jk}^{(j)}$ rezultă dintr-o diferenţă de doi termeni apropiaţi şi de semn contrar, caz în care erorile la rezultat pot fi — după cum se ştie — mult mai mari decît la termenii care se scad.

c) În metoda transmiterii rotirilor este necesară la sfîrşit o transformare înapoi în momente. După cum s-a arătat, această transformare se poate opera chiar pe schemă, făcînd o transmitere finală cu coeficientul $+\frac{1}{2}$. La bare cu secţiunea variabilă, transmiterea finală se face cu un coeficient diferit de $\frac{1}{2}$ şi care nu mai apare pe schemă niciodată în restul calculului (este coeficientul de transmitere din metoda repartizării momentelor) şi în consecinţă avantajul operării pe schemă se micşorează.

d) Prin folosirea metodei simplificate (*Dašek*), se elimină operaţiunile de repartiţie, ajungîndu-se la acelaşi număr de operaţiuni ca şi în metoda transmiterii rotirilor.

În lumina avantajelor şi dezavantajelor de mai sus, cele două procedee de calcul prin aproximaţii succesive pentru cadre cu noduri fixe se situează pe acelaşi plan de utilitate. După importanţa care se acordă avantajelor respective, este preferat un procedeu sau celălalt.

Scanned with OKEN Scanner

III. Alte procedee de rezolvare prin aproximații succesive pentru cadre cu noduri fixe

Cele două procedee expuse sînt cele la care se ajunge aplicînd sistemului de ecuații din metoda deplasărilor modul obișnuit de rezolvare prin iterație, cu organizarea calculelor pe o schemă de transmiteri. După cum se aleg ca necunoscute rotirile nodurilor sau momentele la capetele barelor, se ajunge la metoda „transmiterii rotirilor" sau la cea a „repartizării momentelor".

Față de acestea, se dau în literatură numeroase variante, care în general se deosebesc fie printr-un mod diferit de sistematizare a calculului numeric, fie prin aplicarea unor alte metode de iterație, operarea în mod convențional cu alte necunoscute în locul rotirilor de noduri sau momentelor la capetele barelor, gruparea unor operațiuni sau alte artificii de calcul asemănătoare. Fiecare din aceste variante prezintă, în ceeace privește numărul și simplitatea calculelor numerice pe care le comportă, avantaje și inconveniente. Unele pot deveni deosebit de avantajoase în anumite cazuri particulare.

a) *Iterația cu valorile întregi ale necunoscutelor*

Kani (v. bibl. 72) folosește în calculul cadrelor, în locul iterației obișnuite cu corecțiile Δx, operarea cu valorile întregi ale necunoscutelor. Calculul diferă numai prin aceea că la fiecare corectare a unui nod se adună la cantitățile transmise și valoarea inițială :

$$b_{j0} = \frac{[a_{j0}]}{a_{jj}}$$

Avantajele sînt cele generale ale operării cu valorile întregi ale necunoscutelor :

— nu mai este necesară însumarea termenilor Δx din fiecare coloană la sfîrșitul iterației ;

— erorile de calcul se elimină de la sine, deci calculul este autoverificat ;

— se pot introduce ca valori inițiale ale necunoscutelor x, în locul celor date de termenii liberi ai ecuațiilor (b_{j0}), oricare alte valori apreciate că ar fi mai apropiate de cele exacte ; în acest mod se micșorează numărul de trepte de calcul necesare ;

— în cazul cînd se urmărește o exactitate mai mare a rezultatelor (de exemplu 5—6 cifre exacte), se pot totuși efectua primele trepte ale iterației cu rigla de calcul și numai ultimele cu mașina, fără a influența exactitatea rezultatelor.

Inconvenientul acestei metode constă în necesitatea de a aduna la fiecare deblocare de nod termenul b_{j0} la cantitățile deblocate.

b) *Alegerea ca necunoscute a momentelor neechilibrate la noduri*

Pornind de la metoda „repartizării momentelor" și introducînd ca necunoscute în locul momentelor la capetele barelor momentele neechilibrate la noduri, se ajunge la procedeul simplificator al lui *Dašek*, care a fost expus mai înainte și în care operațiunile de repartiție de la fiecare treaptă a iterației se înlocuiesc cu o singură repartiție finală a momentelor neechilibrate totale.

Scanned with OKEN Scanner

O altă variantă a folosirii momentelor neechilibrate la noduri ca necunoscute în rezolvarea prin aproximații succesive se poate obține pornind de la metoda „transmiterii rotirilor". Momentul total neechilibrat (suma momentelor neechilibrate din toate treptele de calcul) la un nod j:

$$M_j = \theta_j \sum K_{jk}^{(j)}.$$

Înlocuind în sistemul de ecuații (4. 10):

$$\theta_j \sum K_{jk}^{(j)} + \frac{1}{2} \sum K_{jk}^{(j)} \theta_k = \overline{M}_j$$

rotirile în funcție de momentele neechilibrate („momentele active"):

$$\theta_j = \frac{M_j}{\sum\limits_j K_{jk}^{(j)}} \; ; \qquad \theta_k = \frac{M_k}{\sum\limits_k K_{jk}^{(k)}}$$

se obține sistemul transformat:

$$M_j + \frac{1}{2} \sum_j \frac{K_{jk}^{(j)} M_k}{\sum\limits_k K_{jk}^{(k)}} = \overline{M}_j$$

în care necunoscutele sînt momentele active M_j. Acest sistem de ecuații se rezolvă prin iterație, ajungîndu-se la o metodă de calcul analogă cu metoda transmiterii rotirilor. Valoarea inițială a necunoscutei M_j:

$$M_j^{(1)} = \overline{M}_j$$

Coeficientul de transmitere de la k la j:

$$t_{k \to j} = -\frac{1}{2} \frac{K_{jk}^{(j)}}{\sum\limits_k K_{jk}^{(k)}}$$

Valorile finale ale momentelor la capetele barelor:

$$M_{jk}^{(j)} = \overline{M}_{jk}^{(j)} - K_{jk}^{(j)} \left(\theta_j + \frac{1}{2} \theta_k \right) = \overline{M}_{jk}^{(j)} - r_{jk}^{(j)} M_j + t_{k \to j} M_k$$

Metoda „momentelor active" prezintă avantajul că se operează cu cîtimi de ordinul de mărime al momentelor care acționează efectiv asupra cadrului. De asemenea, prezintă aspecte interesante în cazul mai general al cadrelor cu noduri deplasabile.

Ideia acestei metode se găsește în lucrarea lui *F. Bäumelt*: „Das Formänderungsverfahren — ohne Formänderungen" (Bet. u. E. nr. 19/1941). Intr-o formă mai dezvoltată, cuprinzînd și aplicarea la cadre cu noduri deplasabile, metoda a fost publicată la noi într'o serie de lucrări ale catedrei de Statică de la Inst. Polit. Iași (v. de exemplu *A. Șesan* și *N. Orlovschi*: „Variante și simplificări ale metodei distribuției momentelor", Teoria și Practica Constr., nr. 1/1954).

Scanned with OKEN Scanner

c) *Procedee bazate pe metoda eforturilor*

Şi în metoda eforturilor se pot da procedee de rezolvare prin aproximaţii succesive pentru cadre cu noduri fixe, luînd ca necunoscute rotirile sau momentele. Deşi aici sistemul de bază de la care se porneşte şi semnificaţiile fizice ale operaţiunilor din rezolvarea prin iteraţie sînt altele, totuşi operaţiunile propriu-zise numerice nu diferă prea mult faţă de cele din procedeele bazate pe metoda deplasărilor.

În *metoda Grinter* (bibl. 32) se operează cu rotirile capetelor de bare. Se porneşte de la metoda generală a eforturilor, deci de la un sistem de bază cu toate barele articulate la capete. Considerînd un nod j în interiorul unui cadru (fig. 86) şi una din barele jk, concurente în nod, în situaţia iniţială rotirile în j şi k ale barei jk sînt :

$$\varphi_{jk}^{(j)} = \frac{l_{jk}}{6EI_{jk}} m_{jk}^{(j)}$$

$$\varphi_{jk}^{(k)} = \frac{l_{jk}}{6EI_{jk}} m_{jk}^{(k)}$$

unde $m_{jk}^{(j)}$, $m_{jk}^{(k)}$ sînt factorii de încărcare.

Restabilind continuitatea la toate nodurile, apar la capetele barei jk momentele $M_{jk}^{(j)}$, $M_{jk}^{(k)}$, iar valorile finale ale rotirilor în j şi k sînt θ_j, θ_k.

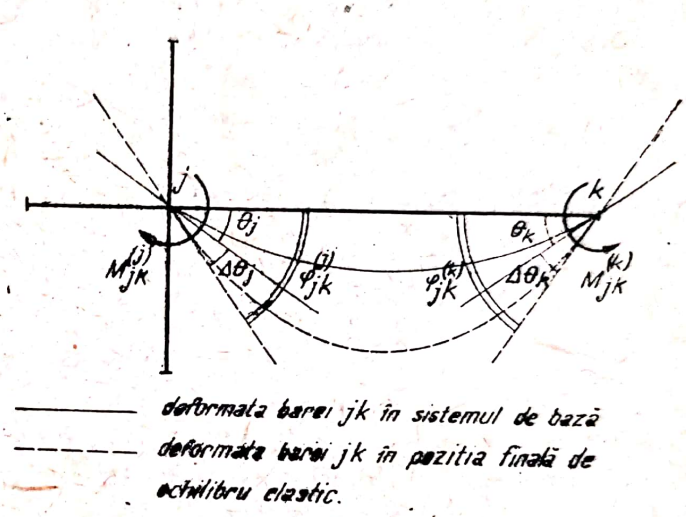


Fig. 86.

Notăm cu :

$$\Delta\theta_j = \theta_j - \varphi_{jk}^{(j)}; \qquad \Delta\theta_k = \theta_k - \varphi_{jk}^{(k)}$$

variaţiile rotirilor capetelor barei jk de la poziţia iniţială la cea finală.

Relaţiile între momentele $M_{jk}^{(j)}$, $M_{jk}^{(k)}$ şi variaţiile de rotiri $\Delta\theta_j$, $\Delta\theta_k$ sînt (4.6), cu convenţia de semn din fig. 44 şi înţelegînd prin $M_{jk}^{(j)}$, $M_{jk}^{(k)}$ momentele pe nod :

$$\left.\begin{aligned} M_{jk}^{(j)} &= -\frac{2EI_{jk}}{l_{jk}}(2\Delta\theta_j + \Delta\theta_k) \\ M_{jk}^{(k)} &= -\frac{2EI_{jk}}{l_{jk}}(2\Delta\theta_k + \Delta\theta_j) \end{aligned}\right\} \qquad (4.51)$$

În metoda Grinter se iau ca necunoscute static nedeterminate variaţiile de rotiri $\Delta\theta_j$, $\Delta\theta_k$. Pentru fiecare capăt de bară se scrie cîte o ecuaţie (4.51), în care necunoscuta principală este variaţia rotirii din capătul de bară pentru care s-a scris ecuaţia.

Pentru determinarea termenilor liberi $M_{jk}^{(j)}$, $M_{jk}^{(k)}$ se scriu în plus condiţiile de continuitate şi echilibru la noduri. Condiţia de echilibru la nodul j :

$$\sum M_{jk}^{(j)} = 0 \qquad (4.52)$$

Sistemul de ecuaţii (4.51), (4.52) se rezolvă prin iteraţie.

În ecuația (4.51) se explicitează necunoscuta principală :

$$\Delta\theta_j = M_{jk}^{(j)} \frac{l_{jk}}{4EI_{jk}} - \frac{1}{2} \Delta\theta_k$$

Coeficientul de transmitere de la k la j :

$$\boxed{t_{k \to j} = -\frac{1}{2}} \qquad (4.53)$$

Pentru determinarea valorii inițiale a necunoscutei $\Delta\theta_j$ se scrie ecuația de echilibru (4.52) în j. Dacă în sistemul de bază, cu barele articulate la capete, se restabilește continuitatea la un singur nod j, momentul care apare la capătul din j al barei jk va fi :

$$M_{jk}^{(j)} = -\frac{3EI_{jk}}{l_{jk}} \Delta\theta_j = -3E\ \rho_{jk}^{(j)} [\theta_j - \varphi_{jk}^{(j)}] \qquad (4.54)$$

Condiția de echilibru în j :

$$\sum_j M_{jk}^{(j)} = 0 ; \quad -3E \sum_j \rho_{jk}^{(j)} [\theta_j - \varphi_{jk}^{(j)}] = 0$$

$$\theta_j \sum_j \rho_{jk}^{(j)} - \sum_j \varphi_{jk}^{(j)} \rho_{jk}^{(j)} = 0$$

$$\boxed{\theta_j = \sum \varphi_{jk}^{(j)} \frac{\rho_{jk}^{(j)}}{\Sigma \rho_{jk}^{(j)}} = \sum \varphi_{jk}^{(j)} r_{jk}^{(j)}} \qquad (4.55)$$

Deci valoarea inițială a rotirii nodului j se obține printr-o operațiune asemănătoare cu repartiția din metoda repartizării momentelor : se înmulțește rotirea inițială independentă $\varphi_{jk}^{(j)}$ a fiecărui capăt de bară din j cu coeficientul de repartiție respectiv $r_{jk}^{(j)}$. Suma produselor $\varphi_r r_{jk}^{(j)}$ reprezintă rotirea θ_j.

Făcînd apoi pentru fiecare capăt de bară diferența $\theta_j - \varphi_{jk}^{(j)}$, se obțin valorile inițiale ale necunoscutelor $\Delta\theta_j$, care se introduc în ecuațiile (4.51).

Corectarea unui nod [repartiția conform relației (4.55)] reprezintă rezolvarea unei ecuații de nod (4.52). Transmiterea necunoscutelor $\Delta\theta_j$ rezultate din operațiunea de repartiție reprezintă rezolvarea ecuațiilor de capăt de bară (4.51). Efectuînd alternativ repartițiile și transmiterile, se rezolvă întregul sistem de ecuații, obținîndu-se ca rezultat valorile finale ale necunoscutelor $\Delta\theta_j$. Cu acestea, se calculează apoi momentele la capetele barelor, cu ajutorul relațiilor (4.54).

Mersul calculului :

— Se înscriu pe schema de transmiteri, în jurul nodurilor, coeficienții de repartiție $r_{jk}^{(j)}$.

— Se calculează valorile inițiale $\varphi_{jk}^{(j)}$ ale rotirilor capetelor de bare, în sistemul de bază.

— Se corectează succesiv nodurile. Se începe cu o repartiție, iar apoi urmează alternativ transmiteri și repartiții. Într-o treaptă de calcul oarecare, cantitățile transmise acumulate la un nod reprezintă rotirile inde-

pendente ale barelor în nodul considerat articulat. Prin corectarea nodului, fiecare capăt de bară primește o rotire diferită $\Delta\theta_j$, astfel ca rotirile tuturor barelor în nod să devină egale.

— La sfîrșitul iterației, se însumează valorile $\Delta\theta_j$ din toate treptele de calcul, la fiecare capăt de bară.

— Se calculează momentele la capetele barelor, cu relația (4.54).

Dacă în (4.54) se introduc, în locul mărimilor reale ale rotirilor, mărimile :

$$\theta_j' = 3E\theta_j\,; \quad \varphi_{jk}'^{(j)} = 3E\,\varphi_{jk}^{(j)} = \frac{m_{jk}^{(j)}}{2\,\rho_{jk}^{(j)}}$$

operațiunea finală de trecere la momente se simplifică, relația (4.54) devenind :

$$M_{jk}^{(j)} = \rho_{jk}^{(j)}\,\Delta\theta_j$$

Ne vom mărgini la această prezentare cu caracter informativ a metodei Grinter, fără a insista asupra detaliilor de calcul, întrucît se vede imediat că față de procedeele iterative bazate pe metoda generală a deplasărilor nu prezintă avantaje. Se operează cu rotiri, este necesară la sfîrșit o trecere de la rotiri la momente (mai simplă în adevăr decît în metoda transmiterii rotirilor) și totuși operațiunile de repartiție rămîn necesare. Deci se cumulează dezavantajele celor două metode de calcul tratate anterior. Mai apare și o complicație suplimentară : pe coloana unui capăt de bară se înscriu atît valorile transmise, cît și cele repartizate ; ori, la sfîrșitul calculului vor trebui să se însumeze numai valorile repartizate. Acestea trebuie deci marcate cu un semn special, pentru a fi distinse de celelalte.

Simplificarea propusă de Dašek în metoda repartizării momentelor (eliminarea operațiunilor de repartiție) poate fi aplicată și la metoda Grinter, însă cu aceasta nu se elimină toate complicațiile specifice metodei.

Operarea cu momente. Întrucît rezolvarea prin iterație a sistemului de ecuații din metoda eforturilor, luînd ca necunoscute momentele, conduce la o metodă de calcul avantajoasă în special în cazul grinzilor continue, ea este tratată în cap. V, ca o metodă specifică acestui tip de structuri.

d) *Organizarea calculelor pe tablouri*

În locul operării pe o schemă de transmiteri, aplicată chiar pe schema cadrului, calculul se poate sistematiza și pe un tablou, în care se înscriu atît operațiunile preliminare (determinarea coeficienților de transmitere și de repartiție), cît și cele de iterație și eventualele transformări finale necesare. Acest procedeu, utilizat în publicațiile mai noi sovietice (bibl. 62), maghiare (bibl. 54), cehoslovace (bibl. 18) și germane (bibl. 36), este preferat de unii calculatori. Calculul pe tablou devine avantajos în special la un număr mare de trepte, respectiv cînd convergența iterației este mai înceată sau cînd se cer rezultatele cu exactitate mai mare. În astfel de cazuri se poate ajunge ca operarea pe schemă să devină incomodă, datorită numărului mare de termeni care se acumulează în fiecare coloană.

Pentru exemplificare, se dă mai jos transpunerea pe tablouri a calculelor din exemplele nr. 9 și 10.

Scanned with OKEN Scanner

Calculul prin metoda transmiterii rotirilor (exemplul 10)

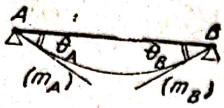
Nodul (j)	0	1			2		4			6	7
Nodurile vecine (k)	1	0	2	4	1	7	1	3	6	4	2
$\rho_{(jk)}^{(j)}$	1,190	1,190	0,960	0,778	2,320	1,660	1,000	0,457	1,100	1,110	2,950
$\Sigma\rho_j$	—	2,928			3,980		2,557			—	—
$r_{(jk)}^{(j)}$	—	0,407	0,328	0,265	0,583	0,417	0,392	0,178	0,430	—	—
$t_{j\to k}^{(M)}$	0,500	0,500	0,775	0,624	0,320	0'778	0,483	—	0,603	0,603	0,4444
$t_{k\to j}^{(\theta)} = t_{j\to k}^{(M)} r_{jk}^{(j)}$	—	—	0,254	0,165	0,186	—	0,189	—	—	—	—
$\overline{M}_{jk}^{(j)}$	—	—	—	+29,2	—	+54,2	−42,2	—	+37,2	−37,2	−113,7
$\overline{M}_j = \Sigma\overline{M}_{jk}^{(j)}$	—	+29,2			+54,2		−5,0			−37,2	−113,7
$\theta_j^{'(1)} = \frac{10\,\overline{M}_j}{4\Sigma\rho_j}$	—	+24,9			+34,0		−4,9			—	—
Rotiri transmise		−8,7 +1,3 +0,8 +0,1 +0,1			−3,0 −0,4		−3,0 −0,4				
θ_j'	—	+18,5			+30,6		−8,3			—	—
θ_k'	+18,5	—	+30,6	−8,3	+18,5	—	+18,5	—	—	−8,3	+30,6
$\theta_k' t_{k\to j}^{(M)}$	+9,3	—	+23,7	−5,1	+5,9	—	+8,9	—	—	−5,0	+13,6
$\left[\theta_j' + \theta_k' t_{k\to j}^{(M)}\right]$	+9,3	+18,5	+42,2	+13,4	+36,5	+30,6	+0,6	−8,3	−8,3	−5,0	+13,6
$-\frac{4}{10}\rho_{jk}^{(j)}[\,]$	−4,5	−8,9	−16,2	−4,1	−33,9	+33,9	−42,4	+1,5	+40,9	−35,0	−129,7
$\cdots + \overline{M}_{jk}^{(j)} = M_{jk}^{(j)}$	−4,5	−8,9	−16,2	+25,1	−33,9	+33,9	−42,4	+1,5	+40,9	−35,0	−129,7

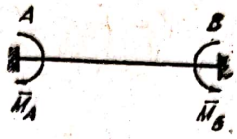
Scanned with OKEN Scanner

Calculul prin metoda repartizării momentelor (exemplul 9)

Nodul de la care se transmite (j)	0	1			2		4			6	7
Nodul spre care se transmite (k)	1	0	2	4	1	7	1	3	6	4	2
$\rho_{jk}^{(j)}$	1,190	1,190	0,960	0,778	2,320	1,660	1,000	0,457	1,100	1,100	2,950
$\Sigma\rho_j$	—	2,928			3,980		2,557			—	—
$r_{jk}^{(j)}$	—	0,407	0,328	0,265	0,583	0,417	0,392	0,178	0,430	—	—
$tj \to k$	0,500	0,500	0,775	0,624	0,320	0,788	0,483	—	0,603	0,603	0,444
$\overline{M}_{jk}^{(j)}$	—	—	—	+29,2	—	+54,2	−42,2	—	+37,2	−37,2	−113,7
Momente repartizate și transmise	−3,9	−7,8	−10,1 −6,3	−5,0 +1,5	−31,6 −4,9	−22,6	−3,1 +3,2	+1,4	+3,5	+2,1	−17,8
	−0,5	−1,0	+0,9 −0,8 +0,1	−0,6	+2,9 −0,6 +0,3	+2,0 +0,3	−0,4				+1,6
	−0,1	−0,1	0.— 0.—	0.—			+0,1	+0,1	+0,2	+0,1	+0,2
$M_{jk}^{(j)}$	−4,5	−8,9	−16,2	+25,1	−33,9	−33,9	−42,4	+1,5	+40,9	−35,0	−129,7

CARACTERISTICI DE ÎNCĂRCARE ȘI MOMENTE DE ÎNCASTRARE



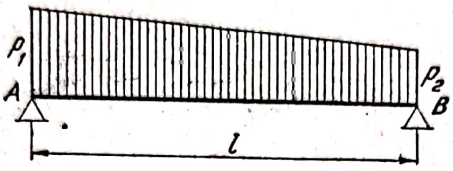


Caracteristici de încărcare

$m_A = + \mu_1 X$
$m_B = - \mu_2 X$

Momente de încastrare perfectă la bare dublu încastrate

$\bar{M}_A = + \mu_3 X$
$\bar{M}_B = - \mu_4 X$

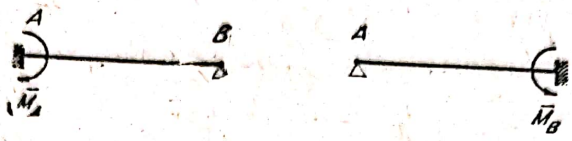


$X = p_1 l^2$

$\frac{p_2}{p_1}$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0,00	0,1333	0,1167	0,0500	0,0333	0,0667	0,0583
0,05	0,1392	0,1232	0,0517	0,0358	0,0696	0,0617
0,10	0,1450	0,1300	0,0533	0,0383	0,0725	0,0650
0,15	0,1509	0,1367	0,0550	0,0408	0,0755	0,0683
0,20	0,1567	0,1433	0,0567	0,0433	0,0784	0,0717
0,25	0,1626	0,1500	0,0583	0,0458	0,0813	0,0750
0,30	0,1683	0,1567	0,0600	0,0483	0,0842	0,0783
0,35	0,1742	0,1633	0,0617	0,0508	0,0871	0,0817
0,40	0,1800	0,1700	0,0633	0,0533	0,0900	0,0850
0,45	0,1859	0,1767	0,0650	0,0558	0,0930	0,0883
0,50	0,1917	0,1833	0,0667	0,0583	0,0959	0,0907
0,55	0,1976	0,1900	0,0683	0,0608	0,0988	0,0950
0,60	0,2033	0,1967	0,0700	0,0633	0,1017	0,0983
0,65	0,2092	0,2033	0,0717	0,0658	0,1046	0,1017
0,70	0,2150	0,2100	0,0733	0,0683	0,1075	0,1050
0,75	0,2209	0,2167	0,0750	0,0708	0,1105	0,1083
0,80	0,2267	0,2233	0,0767	0,0733	0,1134	0,1117
0,85	0,2326	0,2300	0,0783	0,0758	0,1163	0,1150
0,90	0,2383	0,2367	0,0800	0,0783	0,1192	0,1183
0,95	0,2442	0,2433	0,0817	0,0808	0,1221	0,1217
1,00	0,2500	0,2500	0,0833	0,0833	0,1250	0,1250

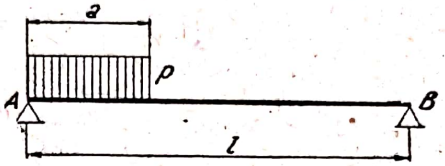
Scanned with OKEN Scanner

Tabela 1



Momente de încastrare perfectă la bare încastrate la un capăt și articulate la celălalt capăt

$$\bar{M}_A = +\mu_5 X \qquad \bar{M}_B = -\mu_6 X$$

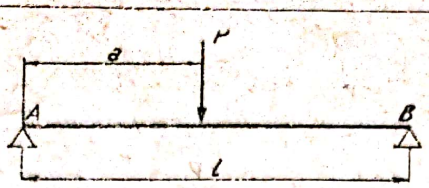


$$\xi = \frac{a}{l}$$

$$X = pl^2$$

ξ	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,05	0,0024	0,0012	0,0012	0,0000	0,0012	0,0006
0,10	0,0090	0,0050	0,0044	0,0003	0,0045	0,0025
0,15	0,0193	0,0111	0,0091	0,0010	0,0097	0,0056
0,20	0,0324	0,0196	0,0151	0,0023	0,0162	0,0098
0,25	0,0479	0,0303	0,0218	0,0042	0,0240	0,0152
0,30	0,0650	0,0430	0,0290	0,0070	0,0325	0,0215
0,35	0,0834	0,0575	0,0364	0,0105	0,0417	0,0288
0,40	0,1024	0,0736	0,0437	0,0149	0,0512	0,0368
0,45	0,1216	0,0910	0,0507	0,0201	0,0608	0,0455
0,50	0,1406	0,1094	0,0573	0,0261	0,0703	0,0547
0,55	0,1590	0,1284	0,0632	0,0326	0,0795	0,0642
0,60	0,1764	0,1476	0,0684	0,0396	0,0882	0,0738
0,65	0,1925	0,1666	0,0728	0,0469	0,0963	0,0833
0,70	0,2070	0,1850	0,0763	0,0543	0,1035	0,0925
0,75	0,2197	0,2021	0,0791	0,0615	0,1099	0,1011
0,80	0,2304	0,2176	0,0811	0,0683	0,1152	0,1083
0,85	0,2398	0,2307	0,0824	0,0742	0,1195	0,1154
0,90	0,2450	0,2410	0,0830	0,0790	0,1225	0,1205
0,95	0,2488	0,2476	0,0833	0,0821	0,1244	0,1238
1,00	0,2500	0,2500	0,0833	0,0833	0,1250	0,1250

Scanned with OKEN Scanner



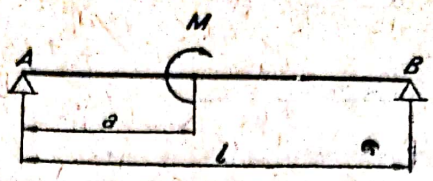
$$\xi = \frac{a}{l}$$

$$X = Pl$$

ξ	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,05	0,0926	0,0499	0,0451	0,0024	0,0463	0,0250
0,10	0,1710	0,0990	0,0810	0,0090	0,0855	0,0495
0,15	0,2359	0,1467	0,1084	0,0191	0,1180	0,0733
0,20	0,2880	0,1920	0,1280	0,0320	0,1440	0,0960
0,25	0,3281	0,2344	0,1406	0,0469	0,1641	0,1172
0,30	0,3570	0,2730	0,1470	0,0630	0,1785	0,1365
0,35	0,3754	0,3071	0,1479	0,0796	0,1877	0,1536
0,40	0,3840	0,3360	0,1440	0,0960	0,1920	0,1680
0,45	0,3836	0,3589	0,1361	0,1114	0,1918	0,1795
0,50	0,3750	0,3750	0,1250	0,1250	0,1875	0,1875
0,55	0,3589	0,3836	0,1114	0,1361	0,1795	0,1918
0,60	0,3360	0,3840	0,0960	0,1440	0,1680	0,1920
0,65	0,3071	0,3754	0,0796	0,1479	0,1536	0,1877
0,70	0,2730	0,3570	0,0630	0,1470	0,1365	0,1785
0,75	0,2344	0,3281	0,0469	0,1406	0,1172	0,1641
0,80	0,1920	0,2880	0,0320	0,1280	0,0960	0,1440
0,85	0,1467	0,2359	0,0191	0,1084	0,0733	0,1180
0,90	0,0990	0,1710	0,0090	0,0810	0,0495	0,0855
0,95	0,0499	0,0926	0,0024	0,0451	0,0250	0,0463
1,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$\frac{1}{6}$	$\frac{55}{216}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{27,5}{216}$	$\frac{17,5}{216}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{4}{27}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{5}{27}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{55}{216}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{17,5}{216}$	$\frac{27,5}{216}$

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 1 (continuare)

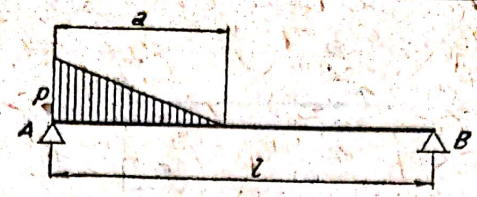


$\xi = \frac{a}{l}$

$X = M$

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	ξ
2,0000	1,0000	−1,0000	0,0000	−1,0000	−0,5000	0,00
1,7075	0,9925	−0,8075	−0,0925	−0,8538	−0,4963	0,05
1,4300	0,9700	−0,6300	−0,1700	−0,7150	−0,4850	0,10
1,1675	0,9325	−0,4675	−0,2325	−0,5838	−0,4663	0,15
0,9200	0,8800	−0,3200	−0,2800	−0,4600	−0,4400	0,20
0,6875	0,8125	−0,1875	−0,3125	−0,3438	−0,4063	0,25
0,4700	0,7300	−0,0700	−0,3300	−0,2350	−0,3650	0,30
0,2675	0,6325	+0,0325	−0,3325	−0,1338	−0,3163	0,35
0,0800	0,5200	+0,1200	−0,3200	−0,0400	−0,2600	0,40
−0,0925	0,3925	+0,1925	−0,2925	+0,0463	−0,1963	0,45
−0,2500	0,2500	+0,2500	−0,2500	+0,1250	−0,1250	0,50
−0,3925	0,0925	+0,2925	−0,1925	+0,1963	−0,0463	0,55
−0,5200	−0,0800	+0,3200	−0,1200	+0,2600	+0,0400	0,60
−0,6325	−0,2675	+0,3325	−0,0325	+0,3163	+0,1338	0,65
−0,7300	−0,4700	+0,3300	+0,0700	+0,3650	+0,2350	0,70
−0,8125	−0,6875	+0,3125	+0,1875	+0,4063	+0,3438	0,75
−0,8800	−0,9200	+0,2800	+0,3200	+0,4400	+0,4600	0,80
−0,9325	−1,1675	+0,2325	+0,4675	+0,4663	+0,5838	0,85
−0,9700	−1,4300	+0,1700	+0,6300	+0,4850	+0,7150	0,90
−0,9925	−1,7075	+0,0925	+0,8075	+0,4963	+0,8538	0,95
−1,0000	−2,0000	0,0000	+1,0000	+0,5000	+1,0000	1,00

Scanned with OKEN Scanner



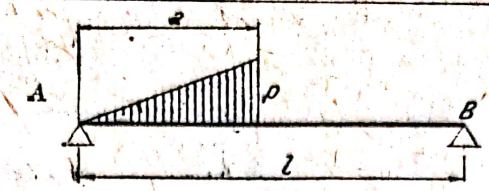
$$\xi = \frac{a}{l}$$

$$X = pl^2$$

ξ	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,05	0,0008	0,0004	0,0004	0,0000	0,0004	0,0002
0,10	0,0031	0,0017	0,0015	0,0001	0,0016	0,0009
0,15	0,0067	0,0037	0,0032	0,0003	0,0033	0,0018
0,20	0,0114	0,0066	0,0054	0,0006	0,0057	0,0033
0,25	0,0171	0,0102	0,0080	0,0011	0,0086	0,0051
0,30	0,0237	0,0146	0,0109	0,0019	0,0119	0,0073
0,35	0,0309	0,0197	0,0140	0,0028	0,0155	0,0099
0,40	0,0386	0,0254	0,0173	0,0040	0,0193	0,0127
0,45	0,0468	0,0317	0,0206	0,0055	0,0234	0,0159
0,50	0,0552	0,0386	0,0240	0,0073	0,0276	0,0193
0,55	0,0638	0,0458	0,0272	0,0093	0,0319	0,0229
0,60	0,0725	0,0535	0,0305	0,0115	0,0363	0,0268
0,65	0,0811	0,0615	0,0336	0,0140	0,0406	0,0308
0,70	0,0896	0,0697	0,0365	0,0166	0,0448	0,0349
0,75	0,0979	0,0779	0,0392	0,0193	0,0489	0,0389
0,80	0,1058	0,0862	0,0418	0,0222	0,0529	0,0431
0,85	0,1134	0,0943	0,0442	0,0251	0,0567	0,0472
0,90	0,1206	0,1022	0,0463	0,0280	0,0603	0,0511
0,95	0,1272	0,1097	0,0483	0,0307	0,0636	0,0549
1,00	0,1333	0,1167	0,0500	0,0333	0,0667	0,0584

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 1 (continuare)

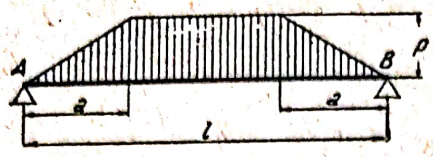
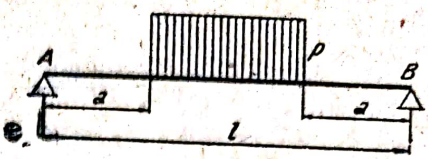


$$\xi = \frac{a}{l}$$

$$X = pl^2$$

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	ξ
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00
0,0016	0,0008	0,0008	0,0000	0,0008	0,0004	0,05
0,0059	0,0033	0,0028	0,0002	0,0030	0,0017	0,10
0,0126	0,0074	0,0059	0,0007	0,0063	0,0037	0,15
0,0210	0,0130	0,0097	0,0017	0,0105	0,0065	0,20
0,0308	0,0201	0,0138	0,0031	0,0154	0,0101	0,25
0,0413	0,0284	0,0181	0,0051	0,0207	0,0142	0,30
0,0526	0,0378	0,0224	0,0077	0,0263	0,0189	0,35
0,0638	0,0482	0,0265	0,0109	0,0319	0,0241	0,40
0,0749	0,0592	0,0301	0,0145	0,0375	0,0296	0,45
0,0854	0,0709	0,0333	0,0188	0,0427	0,0355	0,50
0,0950	0,0825	0,0359	0,0233	0,0475	0,0413	0,55
0,1038	0,0941	0,0380	0,0281	0,0519	0,0471	0,60
0,1118	0,1051	0,0393	0,0328	0,0559	0,0526	0,65
0,1174	0,1155	0,0398	0,0378	0,0587	0,0578	0,70
0,1219	0,1242	0,0398	0,0422	0,0610	0,0621	0,75
0,1246	0,1314	0,0392	0,0461	0,0623	0,0657	0,80
0,1255	0,1364	0,0382	0,0491	0,0628	0,0682	0,85
0,1245	0,1388	0,0367	0,0510	0,0623	0,0694	0,90
0,1215	0,1379	0,0350	0,0514	0,0608	0,0690	0,95
0,1167	0,1333	0,0333	0,0500	0,0584	0,0667	1,00

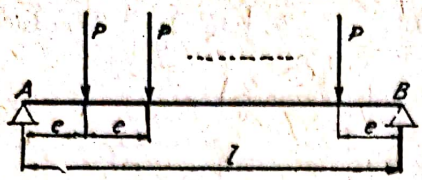
Scanned with OKEN Scanner

Încărcarea	 $\xi = \frac{a}{l} \quad X = pl^2$	 $\xi = \frac{a}{l} \quad X = pl^2$

ξ	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_3=\mu_4$	$\mu_5=\mu_6$	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_3=\mu_4$	$\mu_5=\mu_6$
0,00	0,2500	0,0833	0,1250	0,2500	0,0833	0,1250
0,05	0,2488	0,0829	0,1244	0,2464	0,0821	0,1232
0,10	0,2453	0,0817	0,1225	0,2360	0,0787	0,1180
0,15	0,2396	0,0799	0,1198	0,2196	0,0732	0,1098
0,20	0,2320	0,0773	0,1160	0,1980	0,0660	0,0990
0,25	0,2227	0,0742	0,1114	0,1719	0,0573	0,0860
0,30	0,2118	0,0706	0,1059	0,1420	0,0473	0,0710
0,35	0,1995	0,0665	0,0998	0,1091	0,0364	0,0546
0,40	0,1860	0,0620	0,0930	0,0740	0,0247	0,0370
0,45	0,1715	0,0572	0,0858	0,0374	0,0125	0,0187
0,50	0,1563	0,0521	0,0781	0,0000	0,0000	0,0000

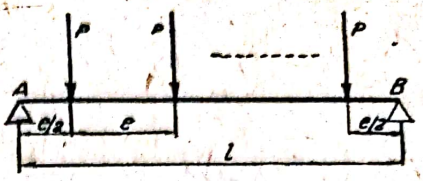
Scanned with OKEN Scanner

Tabela 1 (continuare)



n = nr. de forțe

$$e = \frac{l}{n+1}; \quad X = nPl$$



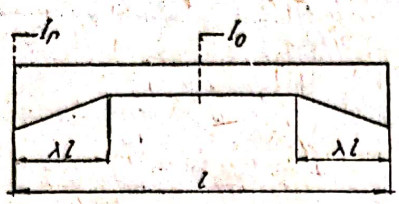
n = nr. de forțe

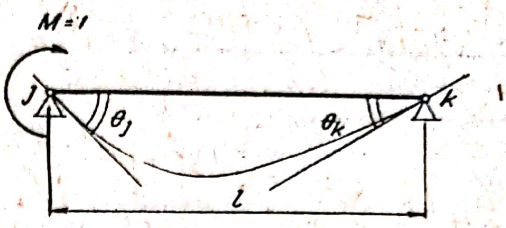
$$e = \frac{l}{n}; \quad X = nPl$$

n	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_3 = \mu_4$	$\mu_5 = \mu_6$	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_3 = \mu_4$	$\mu_5 = \mu_6$
1	0,3750	0,1250	0,1875	0,3750	0,1250	0,1875
2	0,3333	0,1111	0,1667	0,2812	0,0937	0,1406
3	0,3125	0,1042	0,1563	0,2639	0,0880	0,1320
4	0,3000	0,1000	0,1500	0,2577	0,0859	0,1289
5	0,2917	0,0972	0,1459	0,2550	0,0850	0,1275
6	0,2857	0,0952	0,1429	0,2503	0,0834	0,1252
7	0,2812	0,0937	0,1406	0,2502	0,0834	0,1251
8	0,2777	0,0926	0,1389	0,2502	0,0834	0,1251
9	0,2750	0,0917	0,1375	0,2501	0,0834	0,1251
10	0,2727	0,0909	0,1364	0,2501	0,0834	0,1251
∞	0,2500	0,0833	0,1250	0,2500	0,0833	0,1250

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienții c', c'', c și caracteristicile de încărcare





$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

$$\theta_j = \frac{l}{6EI_0} 2c'$$

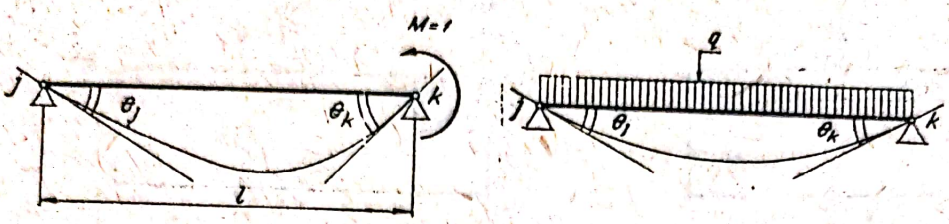
$$\theta_k = \frac{l}{6EI_0} c$$

λ	n	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
0,50	c'	1,000	0,942	0,883	0,819	0,753	0,681	0,605	0,520	0,471	0,421	0,364
	c	1,000	0,960	0,920	0,876	0,806	0,774	0,710	0,637	0,593	0,548	0,493
	v	0,250	0,240	0,230	0,219	0,206	0,193	0,178	0,160	0,148	0,140	0,123
0,45	c'	1,000	0,948	0,891	0,834	0,774	0,708	0,636	0,558	0,516	0,465	0,414
	c	1,000	0,966	0,936	0,894	0,852	0,810	0,756	0,696	0,657	0,618	0,576
	v	0,250	0,242	0,233	0,224	0,214	0,202	0,189	0,174	0,164	0,154	0,143
0,40	c'	1,000	0,951	0,900	0,849	0,793	0,732	0,668	0,595	0,554	0,512	0,463
	c	1,000	0,972	0,945	0,912	0,881	0,846	0,801	0,751	0,720	0,689	0,650
	v	0,250	0,243	0,236	0,229	0,220	0,211	0,200	0,188	0,180	0,172	0,163
0,35	c'	1,000	0,957	0,912	0,864	0,813	0,759	0,702	0,636	0,599	0,561	0,516
	c	1,000	0,978	0,960	0,930	0,906	0,876	0,840	0,804	0,780	0,756	0,720
	v	0,250	0,245	0,239	0,233	0,226	0,219	0,211	0,200	0,197	0,188	0,181
0,30	c'	1,000	0,963	0,922	0,879	0,836	0,789	0,736	0,678	0,644	0,611	0,572
	c	1,000	0,984	0,967	0,948	0,929	0,906	0,880	0,850	0,832	0,812	0,789
	v	0,250	0,246	0,242	0,237	0,232	0,227	0,220	0,212	0,208	0,203	0,197
0,25	c'	1,000	0,966	0,933	0,897	0,858	0,819	0,774	0,723	0,695	0,666	0,630
	c	1,000	0,990	0,978	0,966	0,948	0,930	0,912	0,894	0,879	0,864	0,846
	v	0,250	0,247	0,244	0,241	0,237	0,223	0,229	0,223	0,220	0,217	0,212
0,20	c'	1,000	0,972	0,945	0,915	0,883	0,849	0,812	0,771	0,746	0,722	0,694
	c	1,000	0,990	0,985	0,978	0,967	0,954	0,944	0,929	0,921	0,911	0,900
	v	0,250	0,248	0,246	0,244	0,242	0,239	0,236	0,232	0,230	0,228	0,225
0,15	c'	1,000	0,978	0,957	0,933	0,909	0,882	0,855	0,822	0,803	0,783	0,762
	c	1,000	0,996	0,990	0,984	0,978	0,972	0,966	0,960	0,954	0,948	0,942
	v	0,250	0,249	0,248	0,247	0,245	0,244	0,242	0,240	0,239	0,237	0,236
0,10	c'	1,000	0,987	0,971	0,954	0,938	0,918	0,899	0,877	0,864	0,851	0,835
	c	1,000	0,996	0,996	0,996	0,991	0,990	0,985	0,981	0,979	0,976	0,973
	v	0,250	0,250	0,249	0,248	0,248	0,247	0,246	0,245	0,245	0,244	0,244
0,05	c'	1,000	0,993	0,985	0,978	0,968	0,957	0,948	0,936	0,930	0,923	0,914
	c	1,000	1,000	0,999	0,998	0,998	0,997	0,996	0,995	0,995	0,994	0,993
	v	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,249	0,249	0,249	0,249	0,248	0,248
0,00	c'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	v	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250

Scanned with OKEN Scanner

DREPTE *Tabela 24*

$s'm_j$, $s''m_k$ pentru sarcină uniform distribuită



$$\theta_j = \frac{l}{6EI_0}\, c \qquad \theta_j = \frac{l}{6EI_0}\, s'm_j \qquad s'm_j = s''m_k = vql^2$$

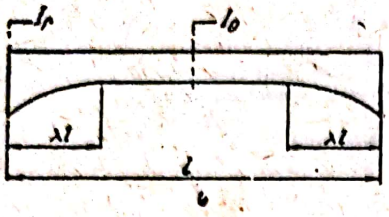
$$c' = c''$$

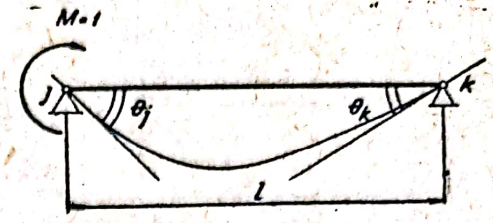
$$\theta_k = \frac{l}{6EI_0}\, 2c'' \qquad \theta_k = \frac{l}{6EI_0}\, s''m_k$$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
0,332	0,327	0,298	0,267	0,233	0,214	0,192	0,170	0,141	0,105	0,078	c'	
0,460	0,456	0,423	0,390	0,351	0,328	0,302	0,272	0,235	0,180	0,144	c	0,50
0,115	0,113	0,106	0,098	0,088	0,082	0,076	0,068	0,059	0,046	0,035	v	
0,384	0,378	0,351	0,324	0,291	0,273	0,225	0,231	0,207	0,171	0,147	c'	
0,546	0,540	0,516	0,486	0,456	0,432	0,414	0,384	0,354	0,312	0,276	c	0,45
0,137	0,135	0,129	0,122	0,113	0,108	0,102	0,096	0,088	0,077	0,068	v	
0,436	0,432	0,407	0,381	0,352	0,335	0,317	0,297	0,273	0,243	0,219	c'	
0,628	0,624	0,602	0,578	0,551	0,535	0,517	0,495	0,469	0,432	0,402	c	0,40
0,157	0,156	0,151	0,145	0,138	0,134	0,129	0,124	0,117	0,108	0,100	v	
0,491	0,486	0,465	0,441	0,414	0,399	0,384	0,366	0,342	0,315	0,294	c'	
0,705	0,702	0,684	0,666	0,642	0,630	0,618	0,600	0,576	0,546	0,522	c	0,35
0,176	0,175	0,171	0,167	0,161	0,158	0,154	0,150	0,144	0,137	0,131	v	
0,550	0,546	0,526	0,505	0,481	0,468	0,453	0,435	0,417	0,390	0,372	c'	
0,775	0,774	0,760	0,745	0,728	0,718	0,707	0,695	0,677	0,665	0,636	c	0,30
0,194	0,193	0,190	0,187	0,182	0,179	0,177	0,173	0,169	0,163	0,159	v	
0,612	0,609	0,591	0,573	0,552	0,540	0,528	0,513	0,495	0,474	0,456	c'	
0,839	0,834	0,828	0,816	0,804	0,798	0,792	0,780	0,768	0,750	0,738	c	0,25
0,209	0,209	0,207	0,205	0,201	0,199	0,197	0,195	0,192	0,188	0,184	v	
0,678	0,675	0,661	0,646	0,628	0,618	0,608	0,595	0,581	0,561	0,546	c'	
0,893	0,892	0,886	0,879	0,871	0,866	0,860	0,854	0,846	0,834	0,828	c	0,20
0,223	0,223	0,221	0,220	0,218	0,217	0,215	0,214	0,212	0,209	0,206	v	
0,749	0,747	0,735	0,723	0,711	0,702	0,693	0,684	0,672	0,657	0,645	c'	
0,937	0,936	0,934	0,930	0,924	0,921	0,918	0,915	0,912	0,906	0,900	c	0,15
0,235	0,235	0,233	0,232	0,231	0,230	0,230	0,229	0,228	0,226	0,224	v	
0,827	0,825	0,817	0,809	0,799	0,794	0,788	0,781	0,772	0,762	0,793	c'	
0,971	0,971	0,970	0,968	0,966	0,964	0,963	0,961	0,959	0,956	0,954	c	0,10
0,243	0,243	0,242	0,242	0,241	0,241	0,241	0,240	0,240	0,239	0,238	v	
0,910	0,909	0,905	0,900	0,895	0,812	0,889	0,886	0,881	0,876	0,870	c'	
0,993	0,993	0,992	0,992	0,991	0,991	0,990	0,990	0,989	0,989	0,989	c	0,05
0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,247	0,247	0,247	v	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	c'	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	c	0,00
0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	v	

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienții c' c'' c și caracteristicile de încărcare





$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

$$\theta_j = \frac{l}{6EI_0} 2c'$$

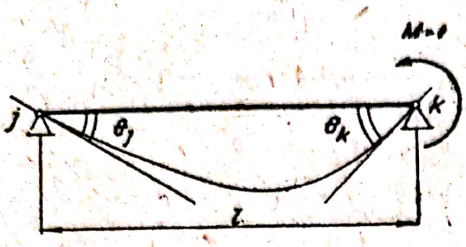
$$\theta_k = \frac{l}{6EI_0} c$$

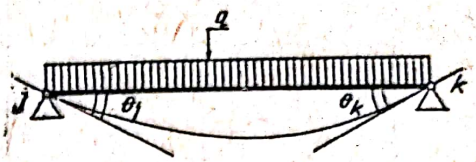
λ	n	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
0,50	c'	1,000	0,960	0,916	0,870	0,821	0,765	0,708	0,640	0,602	0,559	0,510
	c	1,000	0,978	0,956	0,930	0,904	0,872	0,835	0,790	0,763	0,731	0,693
	w	0,250	0,245	0,239	0,233	0,226	0,218	0,209	0,197	0,191	0,183	0,173
0,45	c'	1,000	0,963	0,924	0,879	0,834	0,786	0,732	0,669	0,634	0,594	0,549
	c	1,000	0,984	0,966	0,942	0,918	0,894	0,864	0,828	0,803	0,774	0,744
	w	0,250	0,245	0,241	0,236	0,230	0,223	0,215	0,206	0,200	0,194	0,186
0,40	c'	1,000	0,966	0,930	0,891	0,850	0,804	0,756	0,699	0,667	0,631	0,589
	c	1,000	0,984	0,971	0,954	0,935	0,912	0,889	0,858	0,839	0,818	0,792
	w	0,250	0,247	0,242	0,238	0,234	0,229	0,222	0,215	0,210	0,205	0,198
0,35	c'	1,000	0,969	0,936	0,903	0,867	0,825	0,780	0,729	0,701	0,669	0,630
	c	1,000	0,990	0,978	0,966	0,948	0,930	0,918	0,888	0,873	0,858	0,834
	w	0,250	0,247	0,244	0,241	0,237	0,233	0,228	0,222	0,218	0,214	0,209
0,30	c'	1,000	0,972	0,945	0,915	0,883	0,846	0,808	0,763	0,738	0,709	0,676
	c	1,000	0,990	0,983	0,972	0,962	0,948	0,934	0,916	0,905	0,892	0,877
	w	0,250	0,248	0,245	0,243	0,241	0,237	0,233	0,229	0,226	0,223	0,219
0,25	c'	1,000	0,978	0,954	0,927	0,908	0,871	0,837	0,798	0,776	0,751	0,722
	c	1,000	0,996	0,990	0,978	0,972	0,964	0,954	0,942	0,932	0,922	0,911
	w	0,250	0,248	0,247	0,245	0,243	0,241	0,238	0,235	0,233	0,230	0,227
0,20	c'	1,000	0,981	0,962	0,942	0,918	0,895	0,866	0,834	0,814	0,795	0,772
	c	1,000	0,996	0,992	0,990	0,982	0,976	0,970	0,961	0,955	0,950	0,942
	w	0,250	0,249	0,248	0,247	0,245	0,244	0,242	0,240	0,239	0,238	0,236
0,15	c'	1,000	0,987	0,972	0,954	0,936	0,918	0,897	0,873	0,858	0,843	0,825
	c	1,000	0,998	0,996	0,990	0,986	0,984	0,981	0,978	0,975	0,972	0,968
	w	0,250	0,250	0,249	0,248	0,247	0,247	0,245	0,244	0,244	0,243	0,242
0,10	c'	1,000	0,989	0,980	0,969	0,957	0,945	0,929	0,912	0,902	0,892	0,879
	c	1,000	0,999	0,998	0,997	0,995	0,994	0,992	0,990	0,988	0,987	0,985
	w	0,250	0,250	0,250	0,249	0,249	0,248	0,248	0,247	0,247	0,247	0,246
0,05	c'	1,000	0,996	0,990	0,984	0,978	0,972	0,964	0,955	0,950	0,944	0,938
	c	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,998	0,997	0,997	0,997	0,996
	w	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,249	0,249
0,00	c'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	w	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250

Scanned with OKEN Scanner

PARABOLICE

$s'm_j$, $s''m_k$ pentru sarcină uniform distribuită





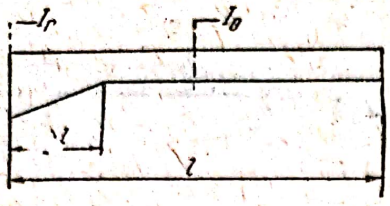
$$\theta_j = \frac{l}{6EI_0}\, c \qquad \theta_j = \frac{l}{6EI_0}\, s'm_j$$

$$\theta_k = \frac{l}{6EI_0}\, 2c'' \qquad \theta_k = \frac{l}{6EI_0}\, s''m_k \qquad c' = c''$$

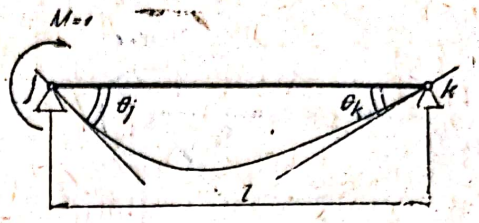
$$s'm_j = s''m_k = wql^2$$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
0,482	0,477	0,451	0,422	0,389	0,370	0,349	0,313	0,292	0,249	0,213	c'	
0,670	0,666	0,642	0,616	0,584	0,565	0,543	0,515	0,479	0,426	0,378	c	0,50
0,167	0,166	0,161	0,154	0,146	0,142	0,136	0,129	0,120	0,106	0,094	w	
0,523	0,516	0,495	0,468	0,438	0,420	0,399	0,375	0,345	0,306	0,273	c'	
0,724	0,720	0,702	0,678	0,654	0,636	0,618	0,594	0,564	0,516	0,474	c	0,45
0,181	0,180	0,175	0,170	0,163	0,159	0,154	0,149	0,141	0,129	0,119	w	
0,566	0,561	0,539	0,515	0,486	0,470	0,452	0,430	0,403	0,366	0,333	c'	
0,776	0,774	0,757	0,739	0,718	0,704	0,689	0,670	0.644	0,606	0,570	c	0,40
0,194	0,193	0,189	0,185	0,179	0,176	0,172	0,167	0,161	0,151	0,143	w	
0,611	0,606	0,585	0,564	0,537	0,525	0,507	0,486	0,462	0,429	0,399	c'	
0,823	0,822	0,810	0,792	0,780	0,768	0,756	0,738	0,720	0,690	0,660	c	0,35
0,206	0,205	0,202	0,199	0,194	0,191	0,188	0,185	0,180	0,172	0,165	w	
0,657	0,654	0,635	0,616	0,593	0,580	0,565	0,547	0,525	0,495	0,468	c'	
0,867	0,864	0,856	0,885	0,832	0,824	0,814	0,803	0,787	0,762	0,744	c	0,30
0,217	0,216	0,214	0,211	0,208	0,206	0,203	0,200	0,197	0,191	0,185	w	
0,709	0,702	0,687	0,671	0,651	0,639	0,626	0,611	0,590	0,564	0,543	c'	
0,905	0,904	0,897	0,888	0,879	0,873	0,865	0,858	0,847	0,834	0,816	c	0,25
0,226	0,225	0,224	0,222	0,220	0,218	0,217	0,215	0,212	0,208	0,204	w	
0,758	0,756	0,743	0,728	0,712	0,703	0,692	0,679	0,663	0,639	0,621	c'	
0,938	0,936	0,932	0,927	0,921	0,917	0,913	0,907	0,900	0,888	0,876	c	0,20
0,235	0,234	0,233	0,232	0,230	0,229	0,228	0,227	0,225	0,222	0,220	w	
0,814	0,810	0,801	0,789	0,777	0,771	0,762	0,750	0,738	0,720	0,705	c'	
0,966	0,966	0,960	0,957	0,954	0,951	0,948	0,945	0,942	0,936	0,930	c	0,15
0,241	0,241	0,240	0,239	0,239	0,238	0,237	0,236	0,235	0,234	0,232	w	
0,872	0,870	0,863	0,856	0,847	0,842	0,836	0,828	0,820	0,807	0,795	c'	
0,983	0,983	0,982	0,981	0,979	0,978	0,977	0,976	0,974	0,972	0,969	c	0,10
0,246	0,246	0,245	0,245	0,245	0,245	0,244	0,244	0,243	0,242	0,242	w	
0,934	0,933	0,929	0,926	0,921	0,918	0,915	0,911	0,907	0,900	0,894	c'	
0,996	0,996	0,995	0,995	0,995	0,994	0,994	0,994	0,993	0,991	0,990	c	0,05
0,249	0,249	0,249	0,249	0,248	0,248	0,248	0,248	0.248	0,248	0,248	w	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	c'	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	c	0,00
0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	w	

Scanned with OKEN Scanner



$$n = \frac{I_0}{I_r}$$



$$\theta_j = \frac{l}{6EI_0}\,2c'$$

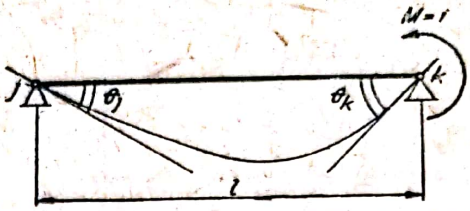
$$\theta_k = \frac{l}{6EI_0}\,c''$$

λ	n	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
1,00	c'	1,000	0,927	0,846	0,765	0,681	0,594	0,500	0,402	0,353	0,294	0,236
	c''	1,000	0,975	0,946	0,915	0,879	0,836	0,791	0,734	0,726	0,659	0,609
	c	1,000	0,942	0,894	0,834	0,773	0,703	0,628	0,541	0,490	0,438	0,376
0,75	c'	1,000	0,932	0,862	0,788	0,712	0,631	0,546	0,453	0,401	0,349	0,291
	c''	1,000	0,989	0,977	0,963	0,949	0,931	0,912	0,888	0,872	0,856	0,835
	c	1,000	0,963	0,925	0,882	0,838	0,787	0,732	0,667	0,628	0,587	0,539
0,50	c'	1,000	0,945	0,890	0,831	0,769	0,702	0,631	0,553	0,502	0,464	0,413
	c''	1,000	0,996	0,993	0,990	0,985	0,980	0,974	0,967	0,962	0,957	0,951
	c	1,000	0,978	0,960	0,936	0,913	0,882	0,855	0,818	0,797	0,774	0,746
0,45	c'	1,000	0,951	0,897	0,843	0,783	0,723	0,654	0,582	0,540	0,498	0,447
	c''	1,000	0,999	0,996	0,993	0,990	0,984	0,981	0,975	0,972	0,969	0,963
	c	1,000	0,984	0,966	0,948	0,924	0,906	0,876	0,846	0,828	0,810	0,786
0,40	c'	1,000	0,954	0,905	0,855	0,800	0,744	0,681	0,612	0,573	0,533	0,488
	c''	1,000	0,999	0,997	0,994	0,992	0,990	0,987	0,983	0,980	0,978	0,975
	c	1,000	0,984	0,973	0,960	0,940	0,924	0,901	0,875	0,860	0,844	0,825
0,35	c'	1,000	0,957	0,915	0,867	0,819	0,765	0,711	0,648	0,612	0,576	0,534
	c''	1,000	0,999	0,998	0,996	0,995	0,993	0,991	0,990	0,987	0,984	0,982
	c	1,000	0,990	0,978	0,966	0,954	0,936	0,924	0,900	0,888	0,876	0,864
0,30	c'	1,000	0,963	0,923	0,882	0,839	0,792	0,741	0,685	0,655	0,620	0,582
	c''	1,000	0,999	0,998	0,998	0,997	0,995	0,994	0,993	0,992	0,991	0,989
	c	1,000	0,990	0,983	0,972	0,964	0,954	0,940	0,925	0,915	0,907	0,895
0,25	c'	1,000	0,969	0,933	0,897	0,861	0,821	0,777	0,726	0,701	0,669	0,636
	c''	1,000	0,999	0,999	0,999	0,998	0,998	0,997	0,997	0,996	0,996	0,995
	c	1,000	0,996	0,990	0,984	0,972	0,964	0,960	0,948	0,940	0,930	0,924
0,20	c'	1,000	0,972	0,945	0,915	0,884	0,848	0,814	0,773	0,748	0,725	0,697
	c''	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,999	0,998	0,998	0,998	0,997	0,997
	c	1,000	0,996	0,992	0,988	0,983	0,977	0,972	0,965	0,961	0,956	0,950
0,15	c'	1,000	0,978	0,957	0,933	0,909	0,885	0,855	0,822	0,804	0,786	0,762
	c''	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
	c	1,000	0,998	0,997	0,996	0,993	0,990	0,984	0,978	0,975	0,973	0,972
0,10	c'	1,000	0,987	0,971	0,954	0,938	0,921	0,900	0,877	0,864	0,851	0,836
	c''	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c	1,000	0,999	0,998	0,997	0,995	0,994	0,992	0,991	0,989	0,988	0,987
0,05	c'	1,000	0,993	0,985	0,978	0,968	0,957	0,948	0,936	0,929	0,923	0,914
	c''	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,998	0,998	0,997	0,997
0,00	c'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c''	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Scanned with OKEN Scanner

DREPTE

c', c'',



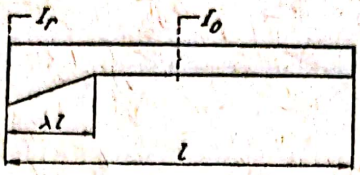
$$\theta_j = \frac{l}{6EI_0}\, c$$

$$\theta_k = \frac{l}{6EI_0}\, 2c''$$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
0,204	0,198	0,172	0,144	0,115	0,099	0,084	0,067	0,048	0,027	0,015	c'	
0,579	0,573	0,545	0,512	0,473	0,449	0,421	0,388	0,348	0,282	0,228	c''	1,00
0,341	0,336	0,302	0,268	0,229	0,208	0,184	0,157	0,125	0,084	0,054	c	
0,260	0,256	0,227	0,198	0,167	0,150	0,133	0,113	0,091	0,066	0,050	c'	
0,823	0,819	0,808	0,794	0,778	0,767	0,756	0,742	0,724	0,693	0,671	c''	0,75
0,511	0,505	0,480	0,451	0,418	0,399	0,378	0,353	0,323	0,285	0,255	c	
0,385	0,378	0,355	0,328	0,299	0,283	0,266	0,246	0,224	0,195	0,174	c'	
0,947	0,946	0,943	0,939	0,934	0,931	0,928	0,923	0,918	0,909	0,906	c''	0,50
0,730	0,727	0,712	0,695	0,676	0,664	0,651	0,636	0,617	0,594	0,570	c	
0,423	0,417	0,393	0,369	0,339	0,324	0,306	0,288	0,267	0,237	0,219	c'	
0,961	0,960	0,958	0,957	0,954	0,951	0,948	0,945	0,939	0,933	0,930	c''	0,45
0,773	0,768	0,756	0,744	0,726	0,714	0,708	0,690	0,678	0,654	0,604	c	
0,463	0,459	0,436	0,412	0,385	0,370	0,354	0,336	0,315	0,288	0,270	c'	
0,973	0,972	0,970	0,968	0,966	0,965	0,963	0,961	0,958	0,954	0,951	c''	0,40
0,813	0,811	0,801	0,789	0,775	0,767	0,758	0,748	0,734	0,714	0,702	c	
0,510	0,504	0,483	0,462	0,438	0,423	0,408	0,390	0,372	0,346	0,327	c'	
0,981	0,981	0,980	0,978	0,977	0,976	0,975	0,974	0,972	0,969	0,966	c''	0,35
0,852	0,851	0,840	0,834	0,822	0,816	0,810	0,798	0,786	0,774	0,635	c	
0,561	0,557	0,538	0,518	0,495	0,482	0,469	0,453	0,434	0,411	0,393	c'	
0,988	0,988	0,987	0,987	0,986	0,985	0,984	0,983	0,982	0,980	0,978	c''	0,30
0,888	0,886	0,880	0,872	0,864	0,859	0,854	0,847	0,839	0,828	0,816	c	
0,620	0,616	0,599	0,581	0,560	0,545	0,535	0,523	0,506	0,483	0,468	c'	
0,995	0,995	0,994	0,994	0,993	0,993	0,992	0,991	0,990	0,989	0,988	c''	0,25
0,917	0,916	0,913	0,909	0,902	0,899	0,895	0,890	0,884	0,876	0,870	c	
0,682	0,678	0,665	0,650	0,632	0,623	0,612	0,600	0,586	0,567	0,552	c'	
0,997	0,997	0,996	0,996	0,996	0,996	0,995	0,995	0,995	0,994	0,993	c''	0,20
0,947	0,946	0,943	0,940	0,935	0,933	0,930	0,927	0,923	0,918	0,912	c	
0,752	0,747	0,738	0,726	0,711	0,705	0,696	0,687	0,672	0,660	0,648	c'	
0,999	0,999	0,998	0,998	0,998	0,998	0,997	0,997	0,997	0,997	0,996	c''	0,15
0,967	0,966	0,965	0,963	0,961	0,960	0,958	0,957	0,955	0,952	0,948	c	
0,827	0,825	0,818	0,809	0,800	0,794	0,788	0,781	0,773	0,762	0,753	c'	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	c''	0,10
0,986	0,986	0,985	0,984	0,983	0,982	0,981	0,980	0,979	0,979	0,978	c	
0,910	0,909	0,905	0,901	0,896	0,893	0,889	0,885	0,881	0,876	0,870	c'	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	c''	0,05
0,997	0,997	0,996	0,996	0,995	0,995	0,995	0,995	0,994	0,994	0,994	c	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	c'	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	c''	0,00
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	c	

Scanned with OKEN Scanner

Caracteristicile de încărcare $s'm_j$, $s''m_k$

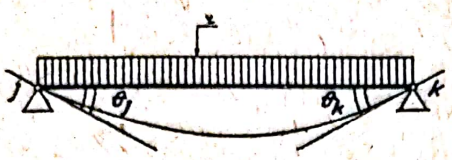


$$n = \frac{l_0}{l_r}$$

λ	n	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
1,00	v_1	0,250	0,235	0,218	0,202	0,184	0,164	0,143	0,112	0,106	0,092	0,076
	v_2	0,250	0,241	0,229	0,217	0,203	0,188	0,172	0,152	0,140	0,127	0,112
0,75	v_1	0,250	0,240	0,225	0,211	0,197	0,181	0,163	0,143	0,131	0,119	0,104
	v_2	0,250	0,244	0,238	0,230	0,223	0,213	0,203	0,191	0,183	0,175	0,165
0,50	v_1	0,250	0,243	0,235	0,226	0,217	0,207	0,196	0,182	0,175	0,165	0,156
	v_2	0,250	0,248	0,246	0,243	0,239	0,236	0,232	0,227	0,224	0,221	0,217
0,45	v_1	0,250	0,244	0,236	0,229	0,221	0,212	0,203	0,191	0,184	0,177	0,169
	v_2	0,250	0,248	0,246	0,244	0,242	0,239	0,236	0,233	0,230	0,228	0,225
0,40	v_1	0,250	0,245	0,239	0,233	0,226	0,218	0,210	0,200	0,194	0,188	0,181
	v_2	0,250	0,249	0,247	0,246	0,244	0,242	0,240	0,237	0,235	0,234	0,232
0,35	v_1	0,250	0,246	0,241	0,236	0,230	0,224	0,218	0,209	0,205	0,200	0,194
	v_2	0,250	0,249	0,248	0,247	0,246	0,245	0,243	0,241	0,240	0,239	0,237
0,30	v_1	0,250	0,247	0,243	0,239	0,235	0,230	0,224	0,218	0,215	0,211	0,206
	v_2	0,250	0,250	0,249	0,248	0,247	0,246	0,245	0,244	0,243	0,242	0,241
0,25	v_1	0,250	0,247	0,245	0,242	0,239	0,235	0,232	0,227	0,224	0,221	0,217
	v_2	0,250	0,250	0,249	0,249	0,248	0,248	0,247	0,247	0,246	0,245	0,245
0,20	v_1	0,250	0,248	0,247	0,245	0,242	0,240	0,238	0,235	0,233	0,230	0,228
	v_2	0,250	0,250	0,250	0,249	0,249	0,249	0,248	0,248	0,248	0,248	0,247
0,15	v_1	0,250	0,249	0,248	0,247	0,245	0,244	0,242	0,241	0,239	0,238	0,236
	v_2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,249	0,249	0,249	0,249
0,10	v_1	0,250	0,250	0,249	0,248	0,248	0,247	0,247	0,246	0,245	0,244	0,244
	v	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
0,05	v_1	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,249	0,249	0,249	0,249	0,248	0,248
	v_2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
0,00	v_1	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
	v_2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250

Scanned with OKEN Scanner

DREPTE
pentru sarcină uniform distribuită

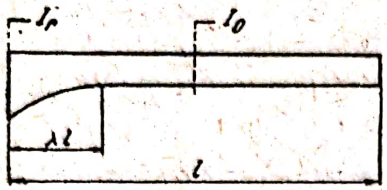


$$\theta_j = \frac{l}{6EI_0}\, s'm_j \qquad s'm_j = v_1\, ql^2$$

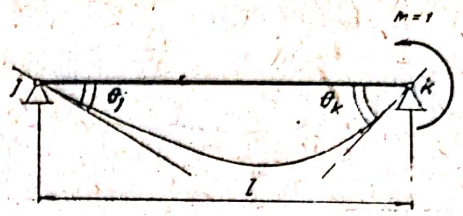
$$\theta_k = \frac{l}{6EI_0}\, s''m_k \qquad s''m_k = v_2\, ql^2$$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	λ	
0,068	0,066	0,059	0,051	0,042	0,037	0,032	0,026	0,020	0,012	0,007	v_1	1,00
0,103	0,101	0,093	0,084	0,074	0,067	0,060	0,052	0,043	0,030	0,021	v_2	
0,097	0,095	0,088	0,080	0,071	0,065	0,060	0,054	0,046	0,038	0,031	v_1	0,75
0,159	0,158	0,152	0,146	0,139	0,134	0,129	0,123	0,115	0,105	0,097	v_2	
0,150	0,149	0,144	0,139	0,132	0,128	0,124	0,119	0,113	0,104	0,098	v_1	0,50
0,215	0,214	0,212	0,209	0,206	0,204	0,202	0,199	0,196	0,191	0,187	v_2	
0,164	0,163	0,158	0,153	0,147	0,143	0,140	0,135	0,130	0,122	0,116	v_1	0,45
0,223	0,222	0,221	0,219	0,217	0,215	0,213	0,211	0,209	0,205	0,201	v_2	
0,177	0,176	0,172	0,167	0,162	0,159	0,156	0,152	0,147	0,141	0,136	v_1	0,40
0,230	0,229	0,228	0,227	0,225	0,224	0,223	0,221	0,220	0,217	0,215	v_2	
0,190	0,189	0,186	0,182	0,178	0,176	0,173	0,170	0,165	0,160	0,156	v_1	0,35
0,236	0,236	0,235	0,234	0,233	0,232	0,231	0,230	0,229	0,227	0,225	v_2	
0,203	0,202	0,200	0,197	0,193	0,191	0,189	0,187	0,184	0,179	0,175	v_1	0,30
0,241	0,241	0,240	0,239	0,239	0,238	0,238	0,237	0,236	0,235	0,234	v_2	
0,215	0,215	0,213	0,211	0,208	0,206	0,205	0,203	0,200	0,197	0,194	v_1	0,25
0,244	0,244	0,244	0,244	0,243	0,243	0,242	0,242	0,242	0,241	0,240	v_2	
0,226	0,226	0,024	0,023	0,021	0,020	0,219	0,218	0,216	0,214	0,212	v_1	0,20
0,247	0,247	0,247	0,247	0,247	0,246	0,246	0,246	0,245	0,245	0,245	v_2	
0,236	0,236	0,235	0,234	0,233	0,232	0,231	0,230	0,229	0,228	0,227	v_1	0,15
0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	v_2	
0,244	0,243	0,243	0,242	0,242	0,242	0,241	0,241	0,240	0,239	0,239	v_1	0,10
0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,249	v_2	
0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,247	0,247	0,247	0,247	v_1	0,05
0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	v_2	
0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	v_1	0,00
0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	v_2	

Scanned with OKEN Scanner



$$n = \frac{I_0}{I_r}$$



$$\theta_j = \frac{l}{6EI_0} 2c'$$

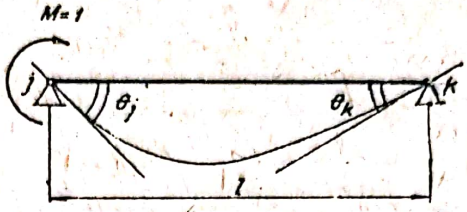
$$\theta_k = -\frac{l}{6EI_0} c$$

λ	n	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
1,00	c′	1,000	0,939	0,875	0,807	0,737	0,663	0,580	0,490	0,438	0,386	0,327
	c″	1,000	0,990	0,978	0,966	0,950	0,933	0,911	0,883	0,864	0,846	0,820
	c	1,000	0,966	0,935	0,900	0,858	0,810	0,760	0,697	0,658	0,617	0,566
0,75	c′	1,000	0,947	0,893	0,835	0,774	0,706	0,636	0,555	0,508	0,461	0,406
	c″	1,000	0,995	0,991	0,985	0,979	0,970	0,962	0,951	0,943	0,935	0,924
	c	1,000	0,980	0,958	0,932	0,906	0,874	0,839	0,797	0,768	0,741	0,705
0,50	c′	1,000	0,960	0,919	0,873	0,827	0,770	0,719	0,655	0,616	0,578	0,533
	c″	1,000	0,999	0,997	0,996	0,994	0,992	0,989	0,986	0,982	0,980	0,978
	c	1,000	0,990	0,978	0,966	0,952	0,933	0,917	0,895	0,886	0,866	0,847
0,45	c′	1,000	0,965	0,924	0,885	0,840	0,791	0,736	0,678	0,645	0,610	0,564
	c″	1,000	0,999	0,998	0,997	0,996	0,995	0,993	0,992	0,991	0,990	0,988
	c	1,000	0,993	0,984	0,972	0,960	0,948	0,930	0,913	0,900	0,889	0,870
0,40	c′	1,000	0,967	0,931	0,894	0,853	0,810	0,762	0,706	0,673	0,640	0,601
	c″	1,000	0,999	0,999	0,998	0,997	0,995	0,994	0,992	0,991	0,990	0,989
	c	1,000	0,995	0,985	0,978	0,968	0,954	0,944	0,929	0,919	0,909	0,896
0,35	c′	1,000	0,969	0,399	0,903	0,867	0,828	0,786	0,735	0,705	0,675	0,639
	c″	1,000	0,999	0,999	0,998	0,998	0,997	0,996	0,995	0,994	0,993	0,993
	c	1,000	0,996	0,990	0,984	0,972	0,966	0,954	0,942	0,936	0,930	0,918
0,30	c′	1,000	0,975	0,946	0,916	0,884	0,849	0,810	0,766	0,740	0,713	0,680
	c″	1,000	1,000	0,999	0,999	0,999	0,998	0,998	0,997	0,996	0,996	0,995
	c	1,000	0,997	0,991	0,986	0,981	0,972	0,967	0,958	0,952	0,946	0,938
0,25	c′	1,000	0,978	0,954	0,927	0,900	0,869	0,837	0,798	0,776	0,754	0,727
	c″	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,998	0,998	0,997	0,997	0,997
	c	1,000	0,997	0,994	0,990	0,984	0,981	0,978	0,872	0,966	0,962	0,958
0,20	c′	1,000	0,981	0,962	0,942	0,918	0,894	0,866	0,835	0,815	0,796	0,773
	c″	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
	c	1,000	0,998	0,996	0,994	0,990	0,987	0,981	0,981	0,975	0,975	0,971
0,15	c′	1,000	0,987	0,970	0,954	0,936	0,918	0,897	0,873	0,858	0,843	0,825
	c″	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,999	0,999	0,999	0,999
	c	1,000	0,998	0,998	0,996	0,995	0,993	0,990	0,998	0,986	0,984	0,983
0,10	c′	1,000	0,990	0,980	0,969	0,957	0,945	0,929	0,912	0,902	0,892	0,879
	c″	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c	1,000	1,000	0,999	0,998	0,998	0,997	0,996	0,995	0,994	0,993	0,992
0,05	c′	1,000	0,996	0,990	0,984	0,975	0,970	0,964	0,955	0,950	0,944	0,938
	c″	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,999	0,998	0,998	0,998	0,998
0,00	c′	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c″	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,070	1,000	1,000	1,000

Scanned with OKEN Scanner

PARABOLICE

c', c'', c

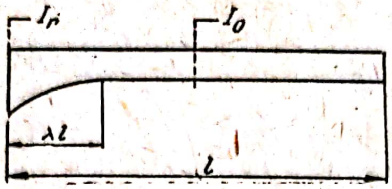


$$\theta_j = \frac{l}{6EI_o}\, c$$

$$\theta_k = \frac{l}{6EI_o}\, 2c''$$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
0,299	0,288	0,259	0,228	0,194	0,175	0,154	0,131	0,105	0,072	0,048	c'	
0,803	0,801	0,783	0,764	0,739	0,724	0,705	0,682	0,650	0,597	0,549	c''	1,00
0,536	0,528	0,501	0,469	0,430	0,407	0,380	0,349	0,308	0,252	0,204	c	
0,375	0,368	0,341	0,311	0,276	0,257	0,236	0,211	0,182	0,146	0,117	c'	
0,917	0,915	0,909	0,900	0,890	0,884	0,876	0,866	0,852	0,828	0,807	c''	0,75
0,683	0,679	0,659	0,635	0,606	0,589	0,568	0,544	0,512	0,465	0,423	c	
0,507	0,501	0,478	0,452	0,422	0,404	0,385	0,363	0,336	0,297	0,270	c'	
0,976	0,975	0,973	0,970	0,968	0,965	0,963	0,960	0,956	0,951	0,945	c''	0,50
0,835	0,834	0,821	0,808	0,792	0,783	0,772	0,758	0,740	0,714	0,690	c	
0,544	0,537	0,513	0,489	0,462	0,444	0,426	0,405	0,378	0,342	0,312	c'	
0,982	0,981	0,980	0,978	0,975	0,974	0,972	0,971	0,968	0,963	0,960	c''	0,45
0,863	0,858	0,852	0,840	0,828	0,816	0,810	0,798	0,780	0,756	0,738	c	
0,578	0,573	0,553	0,530	0,503	0,488	0,470	0,450	0,425	0,390	0,363	c'	
0,987	0,987	0,986	0,985	0,983	0,982	0,981	0,980	0,978	0,975	0,972	c''	0,40
0,888	0,888	0,878	0,869	0,859	0,852	0,844	0,835	0,822	0,804	0,786	c	
0,620	0,615	0,594	0,573	0,549	0,534	0,519	0,501	0,477	0,444	0,420	c'	
0,992	0,992	0,991	0,990	0,989	0,988	0,987	0,986	0,984	0,983	0,981	c''	0,25
0,913	0,912	0,906	0,900	0,888	0,882	0,876	0,870	0,858	0,846	0,828	c	
0,662	0,657	0,641	0,622	0,600	0,587	0,573	0,556	0,535	0,504	0,480	c'	
0,095	0,995	0,994	0,994	0,993	0,992	0,992	0,991	0,991	0,990	0,988	c''	0,30
0,934	0,932	0,928	0,922	0,916	0,912	0,907	0,901	0,893	0,882	0,870	c	
0,710	0,705	0,691	0,674	0,654	0,643	0,631	0,617	0,597	0,570	0,549	c'	
0,996	0,996	0,996	0,996	0,995	0,995	0,995	0,994	0,994	0,993	0,993	c''	0,25
0,953	0,952	0,949	0,945	0,940	0,937	0,934	0,930	0,924	0,918	0,906	c	
0,760	0,757	0,744	0,731	0,714	0,705	0,694	0,681	0,665	0,642	0,624	c'	
0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,997	0,997	0,997	0,996	0,996	c''	0,20
0,969	0,968	0,966	0,964	0,961	0,959	0,956	0,953	0,949	0,943	0,941	c	
0,814	0,810	0,801	0,792	0,777	0,771	0,762	0,753	0,741	0,720	0,708	c'	
0,999	0,999	0,999	0,999	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,997	0,997	c''	0,15
0,981	0,981	0,979	0,978	0,977	0,975	0,973	0,972	0,970	0,968	0,966	c	
0,872	0,871	0,863	0,856	0,847	0,842	0,836	0,829	0,820	0,807	0,795	c'	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	c''	0,10
0,992	0,992	0,991	0,990	0,989	0,989	0,988	0,988	0,987	0,986	0,986	c	
0,934	0,932	0,929	0,925	0,921	0,918	0,915	0,911	0,907	0,900	0,879	c'	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	c''	0,05
0,998	0,998	0,998	0,998	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,996	0,996	c	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	c'	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	c''	0,00
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	c	

Scanned with OKEN Scanner

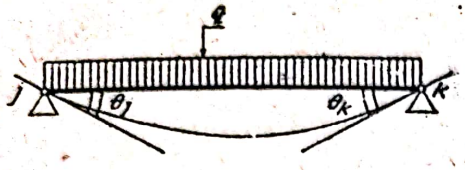


$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ	n	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
1,00	w_1	0,250	0,239	0,229	0,217	0,203	0,189	0,173	0,154	0,142	0,130	0,115
	w_2	0,250	0,245	0,239	0,233	0,226	0,217	0,207	0,195	0,187	0,179	0,167
0,75	w_1	0,250	0,242	0,235	0,226	0,216	0,205	0,193	0,178	0,169	0,160	0,148
	w_2	0,250	0,247	0,244	0,241	0,237	0,232	0,226	0,220	0,216	0,211	0,205
0,50	w_1	0,250	0,246	0,241	0,236	0,230	0,222	0,217	0,208	0,203	0,197	0,190
	w_2	0,250	0,249	0,248	0,247	0,245	0,244	0,242	0,240	0,238	0,236	0,233
0,45	w_1	0,250	0,247	0,242	0,238	0,233	0,228	0,222	0,214	0,209	0,205	0,199
	w_2	0,250	0,250	0,249	0,248	0,247	0,245	0,244	0,242	0,241	0,239	0,238
0,40	w_1	0,250	0,247	0,244	0,241	0,236	0,232	0,227	0,222	0,216	0,212	0,207
	w_2	0,250	0,250	0,249	0,248	0,247	0,247	0,245	0,244	0,244	0,242	0,241
0,35	w_1	0,250	0,248	0,245	0,242	0,239	0,235	0,231	0,226	0,223	0,220	0,215
	w_2	0,250	0,250	0,250	0,249	0,248	0,248	0,247	0,246	0,245	0,245	0,244
0,30	w_1	0,250	0,248	0,246	0,244	0,242	0,239	0,236	0,232	0,229	0,226	0,223
	w_2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,249	0,249	0,248	0,248	0,247	0,247	0,246
0,25	w_1	0,250	0,249	0,248	0,246	0,244	0,242	0,239	0,236	0,235	0,233	0,230
	w_2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,249	0,249	0,249	0,248	0,248	0,248
0,20	w_1	0,250	0,249	0,248	0,247	0,246	0,245	0,243	0,241	0,240	0,239	0,237
	w_2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,249	0,249	0,249	0,249
0,15	w_1	0,250	0,250	0,249	0,248	0,248	0,247	0,246	0,245	0,244	0,243	0,242
	w_2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
0,10	w_1	0,250	0,250	0,250	0,250	0,249	0,249	0,248	0,248	0,247	0,247	0,247
	w_2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
0,05	w_1	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,249	0,249	0,249
	w_2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
0,00	w_1	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
	w_2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250

Scanned with OKEN Scanner

PARABOLICE
pentru sarcină uniform distribuită

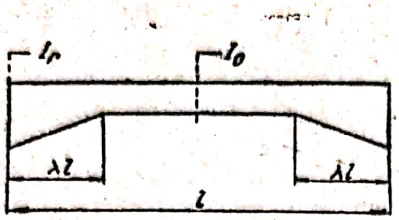


$$\theta_j = \frac{l}{6EI_0}\, s' m_j \qquad s' m_j = w_1 q l^2$$

$$\theta_k = \frac{l}{6EI^0}\, s'' m_k \qquad s'' m_k = w_2 q l^2$$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
0,107	0,105	0,098	0,089	0,079	0,073	0,066	0,059	0,049	0,037	0,027	w_1	1,00
0,161	0,160	0,153	0,145	0,137	0,131	0,124	0,116	0,105	0,088	0,074	w_2	
0,141	0,139	0,133	0,125	0,116	0,111	0,105	0,098	0,089	0,077	0,060	w_1	0,75
0,201	0,200	0,196	0,192	0,187	0,183	0,179	0,174	0,167	0,157	0,147	w_2	
0,185	0,184	0,180	0,175	0,170	0,166	0,162	0,157	0,151	0,141	0,133	w_1	0,50
0,232	0,231	0,230	0,228	0,227	0,225	0,224	0,222	0,219	0,215	0,211	w_2	
0,196	0,194	0,190	0,186	0,181	0,178	0,175	0,170	0,164	0,156	0,149	w_1	0,45
0,237	0,236	0,235	0,234	0,232	0,231	0,230	0,229	0,227	0,223	0,220	w_2	
0,204	0,203	0,200	0,197	0,192	0,190	0,187	0,183	0,178	0,171	0,164	w_1	0,40
0,240	0,240	0,239	0,238	0,237	0,236	0,235	0,234	0,233	0,230	0,228	w_2	
0,213	0,212	0,210	0,207	0,203	0,201	0,199	0,196	0,192	0,185	0,181	w_1	0,35
0,243	0,243	0,242	0,242	0,241	0,241	0,240	0,239	0,238	0,236	0,235	w_2	
0,221	0,221	0,219	0,217	0,214	0,212	0,210	0,208	0,204	0,200	0,196	w_1	0,30
0,246	0,246	0,245	0,245	0,244	0,244	0,244	0,243	0,242	0,241	0,240	w_2	
0,229	0,229	0,227	0,225	0,223	0,222	0,221	0,219	0,217	0,213	0,210	w_1	0,25
0,247	0,247	0,247	0,247	0,246	0,246	0,246	0,246	0,245	0,245	0,244	w_2	
0,236	0,236	0,235	0,233	0,232	0,231	0,230	0,229	0,227	0,225	0,223	w_1	0,20
0,249	0,249	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,247	0,247	w_2	
0,241	0,241	0,240	0,240	0,239	0,239	0,238	0,237	0,236	0,235	0,234	w_1	0,15
0,250	0,250	0,250	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,248	w_2	
0,246	0,246	0,246	0,246	0,245	0,245	0,245	0,244	0,244	0,243	0,242	w_1	0,10
0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	w_2	
0,249	0,249	0,249	0,249	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248	w_1	0,05
0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	w_2	
0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	w_1	0,00
0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	w_2	

Scanned with OKEN Scanner

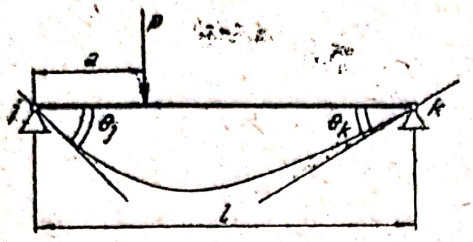


$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,50	1,00	v_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		v_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	v_1	0,116	0,210	0,271	0,299	0,297	0,269	0,217	0,151	0,078
		v_2	0,078	0,151	0,217	0,269	0,297	0,299	0,271	0,210	0,116
	0,20	v_1	0,078	0,142	0,189	0,216	0,220	0,196	0,156	0,107	0,055
		v_2	0,055	0,107	0,156	0,196	0,220	0,216	0,189	0,142	0,078
	0,10	v_1	0,056	0,105	0,143	0,169	0,174	0,155	0,122	0,083	0,042
		v_2	0,042	0,083	0,122	0,155	0,174	0,169	0,143	0,105	0,056
	0,05	v_1	0,041	0,078	0,109	0,131	0,138	0,122	0,096	0,065	0,033
		v_2	0,033	0,065	0,096	0,122	0,138	0,131	0,109	0,078	0,041
0,40	1,00	v_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		v_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	v_1	0,134	0,229	0,296	0,328	0,326	0,292	0,236	0,166	0,088
		v_2	0,088	0,166	0,236	0,292	0,326	0,328	0,296	0,229	0,134
	0,20	v_1	0,096	0,176	0,238	0,273	0,275	0,248	0,197	0,136	0,068
		v_2	0,068	0,136	0,197	0,248	0,275	0,273	0,238	0,176	0,096
	0,10	v_1	0,078	0,148	0,205	0,241	0,247	0,221	0,175	0,119	0,060
		v_2	0,060	0,119	0,175	0,221	0,247	0,241	0,205	0,148	0,078
	0,05	v_1	0,065	0,126	0,179	0,216	0,223	0,200	0,157	0,106	0,053
		v_2	0,053	0,106	0,157	0,200	0,223	0,216	0,179	0,126	0,065
0,35	1,00	v_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		v_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	v_1	0,136	0,241	0,309	0,341	0,338	0,302	0,244	0,172	0,088
		v_2	0,088	0,172	0,244	0,302	0,338	0,341	0,309	0,241	0,136
	0,20	v_1	0,104	0,194	0,262	0,298	0,299	0,269	0,218	0,149	0,074
		v_2	0,074	0,149	0,218	0,269	0,299	0,298	0,262	0,194	0,104
	0,10	v_1	0,088	0,170	0,236	0,272	0,277	0,249	0,200	0,137	0,068
		v_2	0,068	0,137	0,200	0,249	0,277	0,272	0,236	0,170	0,088
	0,05	v_1	0,079	0,152	0,215	0,253	0,259	0,233	0,187	0,126	0,062
		v_2	0,062	0,126	0,187	0,233	0,259	0,253	0,215	0,152	0,079

Scanned with OKEN Scanner

DREPTE
pentru sarcini concentrate

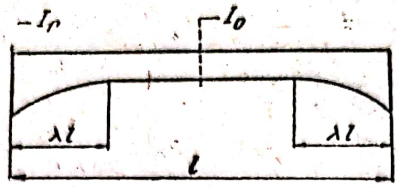


$$\theta_j = \frac{l}{6EI_0}\, s'm_j \qquad s'm_j = v_1\, Pl$$

$$\theta_k = \frac{l}{6EI_0}\, s''m_k \qquad s''m_k = v_2\, Pl$$

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,30	1,00	v_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		v_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	v_1	0,143	0,248	0,320	0,352	0,347	0,312	0,251	0,176	0,092
		v_2	0,092	0,176	0,251	0,312	0,347	0,352	0,320	0,248	0,143
	0,20	v_1	0,115	0,214	0,286	0,320	0,319	0,287	0,232	0,160	0,081
		v_2	0,081	0,160	0,232	0,287	0,319	0,320	0,286	0,214	0,115
	0,10	v_1	0,101	0,193	0,266	0,302	0,302	0,273	0,220	0,151	0,076
		v_2	0,076	0,151	0,220	0,273	0,302	0,302	0,266	0,193	0,101
	0,05	v_1	0,092	0,178	0,250	0,287	0,290	0,262	0,210	0,143	0,072
		v_2	0,072	0,143	0,210	0,262	0,290	0,287	0,250	0,178	0,092
0,25	1,00	v_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		v_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	v_1	0,148	0,258	0,328	0,361	0,357	0,319	0,257	0,180	0,092
		v_2	0,092	0,180	0,257	0,319	0,357	0,361	0,328	0,258	0,148
	0,20	v_1	0,127	0,232	0,307	0,339	0,336	0,302	0,245	0,169	0,086
		v_2	0,086	0,169	0,245	0,302	0,336	0,339	0,307	0,232	0,127
	0,10	v_1	0,116	0,217	0,291	0,326	0,325	0,293	0,236	0,164	0,083
		v_2	0,083	0,164	0,236	0,293	0,325	0,326	0,291	0,217	0,116
	0,05	v_1	0,106	0,204	0,280	0,316	0,316	0,285	0,230	0,159	0,079
		v_2	0,079	0,159	0,230	0,285	0,316	0,316	0,280	0,204	0,106
0,20	1,00	v_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		v_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	v_1	0,155	0,266	0,338	0,370	0,364	0,326	0,264	0,184	0,097
		v_2	0,097	0,184	0,264	0,326	0,364	0,370	0,338	0,266	0,155
	0,20	v_1	0,137	0,251	0,325	0,355	0,350	0,315	0,256	0,179	0,091
		v_2	0,091	0,179	0,256	0,315	0,350	0,355	0,325	0,251	0,137
	0,10	v_1	0,128	0,241	0,315	0,347	0,343	0,309	0,251	0,175	0,088
		v_2	0,088	0,175	0,251	0,309	0,343	0,347	0,315	0,241	0,128
	0,05	v_1	0,122	0,232	0,307	0,340	0,337	0,304	0,217	0,172	0,086
		v_2	0,086	0,172	0,247	0,304	0,337	0,340	0,307	0,232	0,122

Scanned with OKEN Scanner



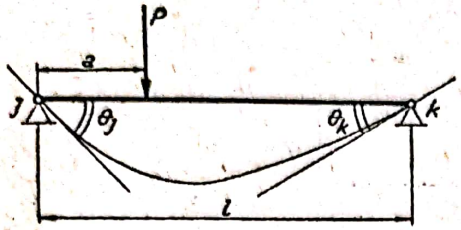
$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,50	1,00	w_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		w_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	w_1	0,139	0,239	0,310	0,338	0,334	0,299	0,242	0,169	0,086
		w_2	0,086	0,169	0,242	0,299	0,334	0,338	0,310	0,239	0,139
	0,20	w_1	0,105	0,192	0,255	0,288	0,289	0,259	0,208	0,143	0,073
		w_2	0,073	0,143	0,208	0,259	0,289	0,288	0,255	0,192	0,105
	0,10	w_1	0,086	0,163	0,221	0,256	0,259	0,232	0,185	0,127	0,064
		w_2	0,064	0,127	0,185	0,232	0,259	0,256	0,221	0,163	0,086
	0,05	w_1	0,072	0,138	0,193	0,227	0,232	0,208	0,165	0,112	0,056
		w_2	0,056	0,112	0,165	0,208	0,232	0,227	0,193	0,138	0,072
0,40	1,00	w_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		w_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	w_1	0,146	0,250	0,323	0,355	0,349	0,314	0,253	0,176	0,090
		w_2	0,090	0,176	0,253	0,314	0,349	0,355	0,323	0,250	0,146
	0,20	w_1	0,119	0,218	0,287	0,322	0,320	0,288	0,232	0,161	0,082
		w_2	0,082	0,161	0,232	0,288	0,320	0,322	0,287	0,218	0,119
	0,10	w_1	0,104	0,196	0,265	0,300	0,301	0,271	0,218	0,149	0,076
		w_2	0,076	0,149	0,218	0,271	0,301	0,300	0,265	0,196	0,104
	0,05	w_1	0,092	0,176	0,244	0,281	0,283	0,256	0,205	0,140	0,070
		w_2	0,070	0,140	0,205	0,256	0,283	0,281	0,244	0,176	0,092
0,35	1,00	w_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		w_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	w_1	0,148	0,259	0,332	0,361	0,354	0,320	0,258	0,179	0,091
		w_2	0,091	0,179	0,258	0,320	0,354	0,361	0,332	0,259	0,148
	0,20	w_1	0,127	0,230	0,304	0,336	0,332	0,300	0,242	0,169	0,086
		w_2	0,086	0,169	0,242	0,300	0,332	0,336	0,304	0,230	0,127
	0,10	w_1	0,114	0,211	0,284	0,318	0,318	0,287	0,232	0,160	0,080
		w_2	0,080	0,160	0,232	0,287	0,318	0,318	0,284	0,211	0,114
	0,05	w_1	0,103	0,195	0,269	0,304	0,305	0,275	0,223	0,152	0,076
		w_2	0,076	0,152	0,223	0,275	0,305	0,304	0,269	0,195	0,103

Scanned with OKEN Scanner

PARABOLICE

$s''m_k$ pentru sarcini concentrate

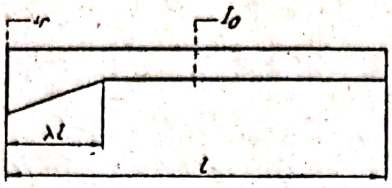


$$\theta_j = \frac{l}{6\,EI_o}\,s'm_j\,; \qquad s'm_j = w_1\,Pl$$

$$\theta_k = \frac{l}{6\,EI_o}\,s''m_k\,; \qquad s''m_k = w_2\,Pl$$

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,30	1,00	w_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		w_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	w_1	0,152	0,265	0,338	0,367	0,359	0,325	0,263	0,183	0,094
		w_2	0,094	0,183	0,263	0,325	0,359	0,367	0,338	0,265	0,152
	0,20	w_1	0,134	0,244	0,317	0,349	0,344	0,310	0,251	0,175	0,089
		w_2	0,089	0,175	0,251	0,310	0,344	0,349	0,317	0,244	0,134
	0,10	w_1	0,123	0,229	0,303	0,336	0,333	0,300	0,243	0,169	0,085
		w_2	0,085	0,169	0,243	0,300	0,333	0,336	0,303	0,229	0,123
	0,05	w_1	0,113	0,217	0,291	0,325	0,323	0,292	0,236	0,163	0,082
		w_2	0,082	0,163	0,236	0,292	0,323	0,325	0,291	0,217	0,113
0,25	1,00	w_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		w_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	w_1	0,157	0,267	0,344	0,373	0,365	0,328	0,267	0,185	0,096
		w_2	0,096	0,185	0,267	0,328	0,365	0,373	0,344	0,267	0,157
	0,20	w_1	0,145	0,256	0,329	0,358	0,353	0,318	0,259	0,181	0,092
		w_2	0,092	0,181	0,259	0,318	0,353	0,358	0,329	0,256	0,145
	0,10	w_1	0,136	0,244	0,320	0,350	0,346	0,311	0,253	0,176	0,089
		w_2	0,089	0,176	0,253	0,311	0,346	0,350	0,320	0,244	0,136
	0,05	w_1	0,128	0,236	0,311	0,342	0,339	0,306	0,250	0,173	0,088
		w_2	0,088	0,173	0,250	0,306	0,339	0,342	0,311	0,236	0,128
0,20	1,00	w_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		w_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	w_1	0,160	0,272	0,349	0,377	0,367	0,332	0,269	0,188	0,097
		x_2	0,097	0,188	0,269	0,332	0,367	0,377	0,349	0,272	0,160
	0,20	w_1	0,150	0,268	0,338	0,368	0,361	0,325	0,264	0,185	0,095
		w_2	0,095	0,185	0,264	0,325	0,361	0,368	0,338	0,268	0,150
	0,10	w_1	0,143	0,260	0,332	0,362	0,356	0,320	0,260	0,182	0,093
		w_2	0,093	0,182	0,260	0,320	0,356	0,362	0,332	0,260	0,143
	0,05	w_1	0,137	0,254	0,327	0,358	0,352	0,317	0,257	0,180	0,092
		w_2	0,092	0,180	0,257	0,317	0,352	0,358	0,327	0,254	0,137

Scanned with OKEN Scanner



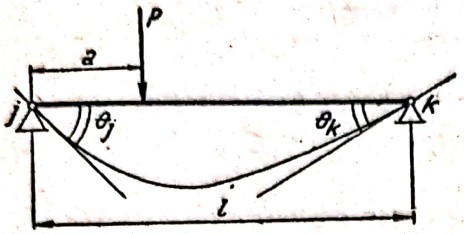
$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,00	1,00	v_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		v_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	v_1	0,109	0,181	0,229	0,252	0,252	0,230	0,189	0,137	0,070
		v_2	0,069	0,138	0,195	0,244	0,277	0,290	0,276	0,225	0,141
	0,20	v_1	0,053	0,094	0,121	0,137	0,140	0,131	0,112	0,082	0,043
		v_2	0,044	0,087	0,125	0,158	0,184	0,197	0,193	0,164	0,106
	0,10	v_1	0,032	0,056	0,075	0,086	0,089	0,085	0,073	0,055	0,029
		v_2	0,031	0,061	0,087	0,112	0,132	0,144	0,143	0,127	0,085
	0,05	v_1	0,019	0,034	0,046	0,053	0,056	0,055	0,049	0,037	0,020
		v_2	0,021	0,043	0,061	0,078	0,094	0,104	0,106	0,095	0,067
0,75	1,00	v_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		v_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	v_1	0,115	0,199	0,250	0,275	0,275	0,252	0,209	0,149	0,077
		v_2	0,077	0,152	0,224	0,280	0,318	0,332	0,316	0,261	0,157
	0,20	v_1	0,064	0,115	0,152	0,175	0,182	0,174	0,149	0,110	0,058
		v_2	0,059	0,116	0,169	0,217	0,253	0,274	0,271	0,230	0,142
	0,10	v_1	0,042	0,078	0,106	0,125	0,134	0,132	0,117	0,088	0,047
		v_2	0,048	0,095	0,140	0,182	0,216	0,239	0,242	0,211	0,133
	0,05	v_1	0,029	0,053	0,074	0,090	0,100	0,101	0,093	0,072	0,039
		v_2	0,040	0,079	0,118	0,154	0,186	0,209	0,218	0,195	0,124
0,50	1,00	v_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		v_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	v_1	0,127	0,225	0,287	0,317	0,318	0,289	0,236	0,169	0,088
		v_2	0,089	0,173	0,251	0,315	0,355	0,368	0,346	0,282	0,169
	0,20	v_1	0,086	0,159	0,215	0,250	0,262	0,245	0,205	0,147	0,076
		v_2	0,077	0,153	0,224	0,286	0,332	0,350	0,332	0,271	0,163
	0,10	v_1	0,068	0,128	0,178	0,214	0,231	0,221	0,187	0,134	0,070
		v_2	0,071	0,141	0,209	0,270	0,318	0,338	0,323	0,265	0,160
	0,05	v_1	0,055	0,106	0,151	0,187	0,207	0,202	0,172	0,125	0,065
		v_2	0,067	0,132	0,197	0,257	0,306	0,329	0,316	0,260	0,157
0,40	1,00	v_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		v_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	v_1	0,136	0,238	0,301	0,337	0,336	0,304	0,247	0,176	0,092
		v_2	0,094	0,180	0,258	0,322	0,365	0,375	0,350	0,285	0,170
	0,20	v_1	0,100	0,185	0,251	0,290	0,297	0,274	0,226	0,161	0,083
		v_2	0,084	0,167	0,244	0,310	0,353	0,367	0,344	0,279	0,167
	0,10	v_1	0,084	0,159	0,222	0,265	0,275	0,256	0,214	0,152	0,079
		v_2	0,080	0,159	0,235	0,301	0,346	0,361	0,340	0,277	0,165
	0,05	v_1	0,073	0,140	0,200	0,244	0,259	0,243	0,203	0,145	0,076
		v_2	0,077	0,153	0,227	0,293	0,340	0,356	0,336	0,274	0,164

Scanned with OKEN Scanner

DREPTE

$s''m_k$ pentru sarcini concentrate



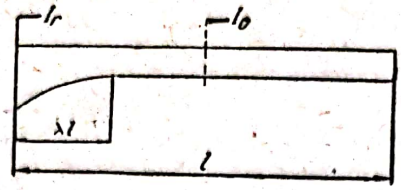
$$\theta_j = \frac{l}{6EI_0}\, s'm_j \; ; \qquad s'm_j = v_1 Pl$$

$$\theta_k = \frac{l}{6EI_0}\, s''m_k \; ; \qquad s''m_k = v_2 Pl$$

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,35	1,00	v_1	0,171	0,288	0,367	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		v_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	v_1	0,140	0,247	0,307	0,346	0,344	0,310	0,253	0,179	0,093
		v_2	0,095	0,184	0,263	0,326	0,368	0,378	0,353	0,286	0,170
	0,20	v_1	0,109	0,202	0,272	0,310	0,313	0,287	0,236	0,167	0,087
		v_2	0,088	0,173	0,253	0,318	0,361	0,373	0,349	0,283	0,169
	0,10	v_1	0,095	0,179	0,248	0,289	0,296	0,273	0,226	0,161	0,084
		v_2	0,085	0,168	0,246	0,312	0,355	0,368	0,346	0,281	0,168
	0,05	v_1	0,085	0,163	0,230	0,273	0,283	0,262	0,218	0,155	0,081
		v_2	0,082	0,163	0,241	0,307	0,351	0,365	0,343	0,279	0,167
0,30	1,00	v_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		v_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	v_1	0,143	0,256	0,323	0,355	0,352	0,316	0,259	0,182	0,094
		v_2	0,095	0,185	0,266	0,329	0,371	0,380	0,353	0,286	0,170
	0,20	v_1	0,117	0,217	0,292	0,328	0,328	0,299	0,245	0,173	0,089
		v_2	0,091	0,179	0,260	0,325	0,366	0,377	0,352	0,284	0,169
	0,10	v_1	0,104	0,198	0,273	0,312	0,315	0,288	0,237	0,168	0,087
		v_2	0,088	0,175	0,256	0,321	0,363	0,374	0,350	0,283	0,169
	0,05	v_1	0,095	0,184	0,259	0,299	0,305	0,280	0,237	0,164	0,085
		v_2	0,085	0,171	0,252	0,318	0,360	0,372	0,348	0,282	0,168
0,25	1,00	v_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		v_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	v_1	0,148	0,263	0,332	0,364	0,358	0,324	0,263	0,124	0,096
		v_2	0,097	0,188	0,269	0,332	0,373	0,382	0,355	0,287	0,170
	0,20	v_1	0,128	0,238	0,308	0,344	0,342	0,310	0,253	0,178	0,092
		v_2	0,094	0,184	0,265	0,329	0,370	0,380	0,354	0,286	0,170
	0,10	v_1	0,118	0,221	0,295	0,332	0,332	0,302	0,245	0,175	0,090
		v_2	0,092	0,181	0,263	0,327	0,368	0,379	0,353	0,286	0,170
	0,05	v_1	0,109	0,209	0,283	0,323	0,325	0,295	0,242	0,172	0,089
		v_2	0,091	0,179	0,260	0,325	0,367	0,377	0,352	0,284	0,169
0,20	1,00	v_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		v_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	v_1	0,154	0,274	0,341	0,371	0,364	0,326	0,266	0,188	0,097
		v_2	0,098	0,190	0,271	0,334	0,374	0,383	0,356	0,287	0,170
	0,20	v_1	0,138	0,253	0,326	0,358	0,353	0,318	0,260	0,183	0,095
		v_2	0,095	0,188	0,269	0,333	0,372	0,382	0,355	0,287	0,170
	0,10	v_1	0,129	0,242	0,317	0,350	0,346	0,313	0,256	0,181	0,094
		v_2	0,094	0,186	0,268	0,332	0,371	0,381	0,355	0,287	0,170
	0,05	v_1	0,122	0,235	0,310	0,344	0,341	0,309	0,253	0,179	0,092
		v_2	0,093	0,185	0,267	0,331	0,371	0,380	0,355	0,286	0,170

Scanned with OKEN Scanner

Caracteristicile de încărcare $s'm_i$, $s''m_i$



$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

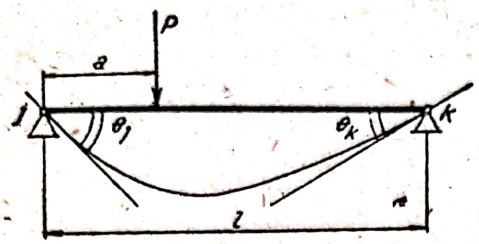
λ	n	$\frac{a}{l}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,00	1,00	w_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		w_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	w_1	0,115	0,203	0,259	0,268	0,287	0,261	0,215	0,157	0,080
		w_2	0,082	0,161	0,229	0,284	0,323	0,337	0,320	0,262	0,220
	0,20	w_1	0,071	0,128	0,170	0,194	0,200	0,189	0,160	0,116	0,061
		w_2	0,061	0,121	0,177	0,226	0,262	0,280	0,271	0,227	0,140
	0,10	w_1	0,049	0,089	0,122	0,143	0,151	0,146	0,125	0,092	0,049
		w_2	0,050	0,099	0,146	0,188	0,221	0,241	0,238	0,203	0,128
	0,05	w_1	0,033	0,062	0,086	0,104	0,113	0,111	0,098	0,074	0,040
		w_2	0,041	0,081	0,119	0,155	0,185	0,205	0,206	0,181	0,116
0,75	1,00	w_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		w_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	w_1	0,128	0,222	0,283	0,312	0,311	0,284	0,234	0,166	0,086
		w_2	0,088	0,172	0,246	0,307	0,347	0,361	0,339	0,277	0,165
	0,20	w_1	0,086	0,157	0,209	0,240	0,248	0,233	0,196	0,140	0,073
		w_2	0,074	0,146	0,214	0,272	0,314	0,332	0,317	0,262	0,158
	0,10	w_1	0,065	0,121	0,166	0,197	0,209	0,200	0,170	0,124	0,065
		w_2	0,066	0,130	0,192	0,247	0,290	0,312	0,269	0,251	0,153
	0,05	w_1	0,050	0,095	0,133	0,161	0,176	0,172	0,149	0,110	0,058
		w_2	0,059	0,117	0,173	0,226	0,268	0,292	0,287	0,241	0,148
0,50	1,00	w_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		w_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	w_1	0,141	0,247	0,314	0,346	0,343	0,310	0,254	0,181	0,095
		w_2	0,094	0,184	0,262	0,326	0,247	0,377	0,353	0,286	0,170
	0,20	w_1	0,109	0,200	0,267	0,304	0,308	0,282	0,233	0,165	0,086
		w_2	0,086	0,170	0,248	0,313	0,356	0,368	0,346	0,280	0,167
	0,10	w_1	0,092	0,173	0,238	0,277	0,286	0,265	0,219	0,156	0,081
		w_2	0,082	0,163	0,239	0,304	0,348	0,362	0,341	0,277	0,166
	0,05	w_1	0,070	0,152	0,213	0,254	0,266	0,249	0,208	0,149	0,077
		w_2	0,078	0,155	0,230	0,295	0,340	0,356	0,336	0,274	0,161
0,40	1,00	w_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		w_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	w_1	0,145	0,256	0,325	0,358	0,353	0,318	0,260	0,183	0,095
		w_2	0,098	0,188	0,266	0,329	0,371	0,380	0,355	0,286	0,170
	0,20	w_1	0,121	0,222	0,293	0,329	0,329	0,299	0,245	0,174	0,090
		w_2	0,091	0,179	0,259	0,324	0,365	0,376	0,351	0,284	0,169
	0,10	w_1	0,107	0,201	0,272	0,311	0,314	0,287	0,236	0,167	0,087
		w_2	0,088	0,174	0,254	0,319	0,361	0,373	0,349	0,283	0,168
	0,05	w_1	0,095	0,184	0,254	0,295	0,301	0,277	0,229	0,163	0,084
		w_2	0,085	0,169	0,250	0,315	0,358	0,370	0,346	0,281	0,167

Scanned with OKEN Scanner

PARABOLICE

pentru sarcini concentrate

Tabela 11

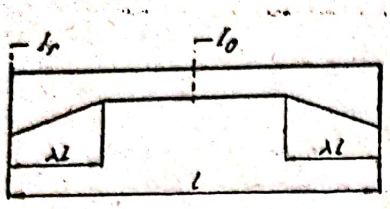


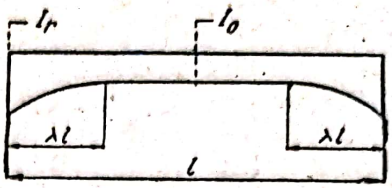
$$\theta_j = \frac{l}{6EI_0}\, s'm_j \; ; \qquad s'm_j = w_1 Pl$$

$$\theta_k = \frac{l}{6EI_0}\, s''m_k \; ; \qquad s''m_k = w_2 Pl$$

λ	n	$\frac{a}{l}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,35	1,00	w_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		w_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	w_1	0,149	0,261	0,333	0,364	0,358	0,322	0,263	0,185	0,094
		w_2	0,098	0,190	0,268	0,332	0,372	0,382	0,356	0,287	0,170
	0,20	w_1	0,127	0,234	0,307	0,342	0,339	0,308	0,251	0,178	0,091
		w_2	0,092	0,182	0,264	0,328	0,369	0,379	0,353	0,284	0,170
	0,10	w_1	0,116	0,217	0,290	0,328	0,328	0,298	0,244	0,173	0,088
		w_2	0,091	0,180	0,260	0,324	0,365	0,376	0,352	0,283	0,169
	0,05	w_1	0,105	0,200	0,275	0,314	0,317	0,289	0,238	0,168	0,086
		w_2	0,089	0,175	0,256	0,322	0,363	0,374	0,350	0,283	0,169
0,30	1,00	w_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,090
		w_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	w_1	0,154	0,266	0,340	0,370	0,362	0,325	0,265	0,188	0,097
		w_2	0,098	0,191	0,269	0,333	0,373	0,383	0,356	0,287	0,170
	0,20	w_1	0,135	0,245	0,319	0,352	0,348	0,314	0,257	0,181	0,094
		w_2	0,094	0,185	0,267	0,331	0,371	0,380	0,355	0,286	0,170
	0,10	w_1	0,124	0,232	0,307	0,341	0,339	0,307	0,251	0,178	0,092
		w_2	0,092	0,183	0,265	0,329	0,369	0,379	0,353	0,286	0,170
	0,05	w_1	0,115	0,220	0,295	0,331	0,331	0,301	0,247	0,175	0,090
		w_2	0,091	0,181	0,263	0,327	0,368	0,378	0,353	0,285	0,170
0,25	1,00	w_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099
		w_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	w_1	0,158	0,274	0,344	0,373	0,366	0,327	0,268	0,190	0,098
		w_2	0,098	0,191	0,271	0,335	0,374	0,383	0,357	0,287	0,171
	0,20	w_1	0,143	0,257	0,331	0,361	0,356	0,320	0,261	0,184	0,096
		w_2	0,096	0,188	0,269	0,333	0,373	0,382	0,355	0,287	0,171
	0,10	w_1	0,136	0,247	0,320	0,353	0,349	0,315	0,258	0,182	0,094
		w_2	0,095	0,186	0,268	0,330	0,372	0,381	0,355	0,286	0,170
	0,05	w_1	0,130	0,239	0,314	0,347	0,344	0,310	0,254	0,181	0,092
		w_2	0,192	0,184	0,267	0,329	0,371	0,380	0,354	0,286	0,170
0,20	1,00	w_1	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,090
		w_2	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,50	w_1	0,163	0,279	0,350	0,377	0,369	0,331	0,270	0,190	0,098
		w_2	0,098	0,191	0,272	0,336	0,374	0,384	0,357	0,288	0,171
	0,20	w_1	0,151	0,268	0,340	0,369	0,362	0,326	0,265	0,187	0,097
		w_2	0,097	0,190	0,271	0,335	0,374	0,383	0,356	0,287	0,171
	0,10	w_1	0,143	0,261	0,334	0,364	0,358	0,322	0,263	0,185	0,095
		w_2	0,097	0,189	0,271	0,334	0,373	0,383	0,356	0,287	0,170
	0,05	w_1	0,137	0,255	0,328	0,359	0,355	0,319	0,260	0,184	0,095
		w_2	0,096	0,188	0,270	0,334	0,373	0,382	0,356	0,287	0,170

Scanned with OKEN Scanner





$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ		n 1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
0,50	v	1,000	1,075	1,167	1,283	1,423	1,627	1,889	2,313	2,623	3,085	3,803
	w	1,000	1,055	1,127	1,207	1,312	1,454	1,628	1,894	2,080	2,347	2,733
0,45	v	1,000	1,068	1,162	1,262	1,390	1,575	1,823	2,200	2,496	2,888	3,510
	w	1,000	1,054	1,117	1,197	1,290	1,410	1,572	1,817	1,992	2,194	2,526
0,40	v	1,000	1,064	1,147	1,242	1,369	1,538	1,756	2,092	2,349	2,682	3,193
	w	1,000	1,048	1,109	1,180	1,294	1,375	1,517	1,721	1,861	2,055	2,323
0,35	v	1,000	1,060	1,137	1,220	1,338	1,482	1,674	1,964	2,178	2,449	2,832
	w	1 000	1,047	1,102	1,163	1,234	1,332	1,461	1,636	1,749	1,904	2,119
0,30	v	1,000	1,054	1,122	1,203	1,299	1,422	1,588	1,825	1,994	2,205	2,507
	w	1,000	1,042	1,088	1,142	1,209	1,292	1,394	1,537	1,628	1,754	1,918
0,25	v	1,000	1,047	1,108	1,177	1,258	1,351	1,491	1,679	1,801	1,944	2,168
	w	1,000	1,035	1,076	1,121	1,176	1,242	1,327	1,443	1,511	1,604	1,725
0,20	v	1,000	1,042	1,090	1,147	1,212	1,291	1,394	1,529	1,629	1,724	1,863
	w	1,000	1,030	1,063	1,000	1,145	1,193	1,263	1,347	1,406	1,467	1,542
0,15	v	1,000	1,035	1,070	1,113	1,161	1,221	1,288	1,385	1,450	1,512	1,593
	w	1,000	1,019	1,046	1,076	1,113	1,146	1,196	1,252	1,299	1,333	1,383
0,10	v	1,000	1,021	1,049	1,079	1,110	1,152	1,191	1,245	1,278	1,314	1,360
	w	1,000	1,001	1,033	1,052	1,076	1,097	1,129	1,166	1,189	1,213	1,243
0,05	v	1,000	1,012	1,025	1,037	1,055	1,075	1,093	1,117	1,131	1,146	1,163
	w	1,000	1,001	1,017	1,027	1,038	1,048	1,063	1,080	1,091	1,101	1,114
0,00	v	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	w	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Scanned with OKEN Scanner

DREPTE ŞI PARABOLICE

încastrate la ambele capete

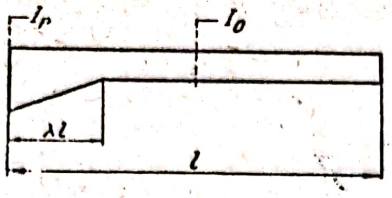
Tabela 12

Vute drepte $\rho_{jk}^{(j)} = \rho_{jk}^{(k)} = v\frac{I_0}{l}$

Vute parabolice $\rho_{jk}^{(j)} = \rho_{jk}^{(k)} = w\frac{I_0}{l}$

0.125	0.120	0.100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
4,339	4,464	5,077	5,998	7,428	8,522	10,083	12,507	17,075	29,810	50,500	v	0,50
3,007	3,067	3,379	3,803	4,420	4,870	5,469	6,379	7,888	11,228	16,557	w	
3,949	4,077	4,608	5,357	6,515	7,376	8,582	10,502	13,777	22,060	35,102	v	0,45
2,756	2,833	3,049	3,374	3,869	4,185	4,696	5,357	6,550	8,477	11,151	w	
3,564	3,655	4,071	4,658	5,519	6,154	7,029	8,265	10,430	15, 112	21,252	v	0,40
2,505	2,552	2,751	3,013	3,385	3,637	3,972	4,433	5,164	6,513	8,419	w	
3,151	3,208	3,514	3,957	4,543	4,990	5,541	6,295	7,540	9,825	12,362	v	0,35
2,850	2,292	2,462	2,623	2,956	3,072	3,332	3,645	4,133	4,949	5,949	w	
2,711	2,761	2,981	3,262	3,655	3,907	4,242	4,688	5,305	6,392	7,435	v	0,30
2,024	2,035	2,159	2,299	2,487	2,610	2,762	2,969	3,257	3,720	4,353	w	
2,308	2,349	2,492	2,655	2,893	3,060	3,226	3,464	3,785	4,296	4,730	v	0,25
1,787	1,822	1,903	1,993	2,117	2,201	2,295	2,427	2,618	2,934	3,173	w	
1,953	1,979	2,061	2,165	2,300	2,380	2,477	2,599	2,755	2,988	3,183	v	0,20
1,604	1,609	1,668	1,730	1,812	1,861	1,921	2,007	2,095	2,263	2,397	w	
1,643	1,653	1,716	1,769	1,826	1,885	1,928	1,995	2,059	2,176	2,266	v	0,15
1,424	1,437	1,461	1,500	1,549	1,576	1,606	1,665	1,715	1,804	1,883	w	
1,385	1,392	1,416	1,445	1,479	1,498	1,521	1,547	1,580	1,619	1,658	v	0,10
1.263	1,267	1,284	1,306	1,331	1,346	1,364	1,386	1,414	1,458	1,495	w	
1,174	1,176	1,185	1,196	1,208	1,214	1,223	1,232	1,243	1,257	1,267	v	0,05
1,122	1,124	1,131	1,140	1,150	1,156	1,163	1,171	1,182	1,195	1,210	w	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	v	0,00
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	w	

Scanned with OKEN Scanner



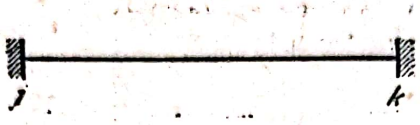
$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ	n	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
1,00	v_k	1,000	1,020	1,060	1,091	1,189	1,214	1,264	1,358	1,446	1,522	1,633
	v_j	1,000	1,073	1,183	1,305	1,470	1,716	1,997	2,484	2,783	3,390	4,225
0,75	v_k	1,000	1,012	1,030	1,046	1,068	1,094	1,124	1,171	1,197	1,233	1,280
	v_j	1,000	1,074	1,168	1,279	1,423	1,617	1,881	2,295	2,602	3,021	3,683
0,50	v_k	1,000	1,011	1,022	1,033	1,051	1,067	1,098	1,130	1,164	1,184	1,244
	v_j	1,000	1,064	1,140	1,231	1,346	1,499	1,691	1,978	2,231	2,445	2,819
0,45	v_k	1,000	1,010	1,021	1,032	1,045	1,071	1,091	1,125	1,148	1,176	1,216
	v_j	1,000	1,059	1,132	1,218	1,322	1,459	1,639	1,886	2,066	2,286	2,621
0,40	v_k	1,000	1,009	1,020	1,035	1,049	1,067	1,090	1,121	1,144	1,165	1,198
	v_j	1,000	1,055	1,123	1,202	1,299	1,420	1,581	1,800	1,952	2,139	2,395
0,35	v_k	1,000	1,009	1,019	1,032	1,046	1,062	1,085	1,111	1,128	1,154	1,184
	v_j	1,000	1,052	1,110	1,186	1,271	1,378	1,517	1,694	1,819	1,971	2,181
0,30	v_k	1,000	1,008	1,019	1,028	1,043	1,059	1,079	1,104	1,118	1,138	1,163
	v_j	1,000	1,046	1,102	1,163	1,240	1,331	1,446	1,600	1,694	1,819	1,975
0,25	v_k	1,000	1,008	1,018	1,029	1,035	1,049	1,074	1,090	1,103	1,115	1,142
	v_j	1,000	1,041	1,091	1,147	1,201	1,277	1,376	1,500	1,566	1,661	1,783
0,20	v_k	1,000	1,007	1,015	1,025	1,034	1,045	1,060	1,077	1,090	1,100	1,115
	v_j	1,000	1,036	1,070	1,119	1,168	1,231	1,300	1,390	1,453	1,514	1,594
0,15	v_k	1,000	1,006	1,013	1,023	1,028	1,039	1,048	1,060	1,067	1,074	1,085
	v_j	1,000	1,029	1,058	1,096	1,130	1,173	1,224	1,289	1,326	1,365	1,428
0,10	v_k	1,000	1,004	1,008	1,015	1,020	1,026	1,034	1,043	1,047	1,052	1,060
	v_j	1,000	1,017	1,040	1,062	1,088	1,114	1,149	1,188	1,210	1,236	1,268
0,05	v_k	1,000	1,002	1,005	1,007	1,008	1,015	1,018	1,023	1,024	1,028	1,030
	v_j	1,000	1,010	1,021	1,030	1,044	1,060	1,074	1,092	1,102	1,114	1,126
0,00	v_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	v_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Scanned with OKEN Scanner

DREPTE

Încastrate la ambele capete

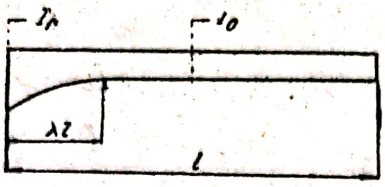


$$\rho_{jk}^{(j)} = v_j \frac{I_0}{l}$$

$$\rho^{(k)} = v_k \frac{I_0}{l}$$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
1,719	1,735	1,836	1,939	2,133	2,243	2,403	2,643	2,857	3,462	4,310	v_k	1,00
4,876	5,018	5,821	6,882	8,595	10,108	11,803	14,791	20,380	35,392	61,825	v_j	
1,313	1,333	1,366	1,400	1,465	1,508	1,556	1,625	1,727	1,964	2,192	v_k	0,75
4,155	4,266	4,843	5,608	6,821	7,705	8,869	10,655	13,704	20,625	31,038	v_j	
1,248	1,261	1,285	1,315	1,362	1,386	1,427	1,464	1,526	1,640	1,726	v_k	0,50
3,072	3,155	3,417	3,762	4,254	4,565	4,987	5,496	6,270	7,582	8,815	v_j	
1,237	1,241	1,260	1,292	1,333	1,350	1,393	1,412	1,473	1,548	1,601	v_k	0,45
2,809	2,867	3,087	3,351	3,738	3,983	4,280	4,662	5,217	6,083	6,860	v_j	
1,218	1,222	1,242	1,271	1,305	1,325	1,348	1,379	1,417	1,472	1,520	v_k	0,40
2,558	2,589	2,780	2,990	3,273	3,451	3,664	3,944	4,316	4,877	5,355	v_j	
1,199	1,202	1,206	1,240	1,267	1,291	1,313	1,327	1,348	1,402	1,441	v_k	0,35
2,303	2,356	2,477	2,646	2,830	2,976	3,137	3,316	3,555	3,939	4,259	v_j	
1,178	1,183	1,196	1,210	1,232	1,245	1,264	1,279	1,302	1,333	1,353	v_k	0,30
2,075	2,100	2,195	2,310	2,452	2,542	2,654	2,778	2,923	3,181	3,368	v_j	
1,146	1,151	1,164	1,180	1,191	1,207	1,220	1,231	1,244	1,266	1,291	v_k	0,25
1,835	1,855	1,929	2,018	2,111	2,180	2,260	2,330	2,433	2,584	2,724	v_j	
1,125	1,126	1,135	1,144	1,155	1,160	1,170	1,179	1,190	1,208	1,217	v_k	0,20
1,645	1,654	1,701	1,755	1,820	1,856	1,903	1,956	2,022	2,116	2,189	v_j	
1,091	1,094	1,100	1,108	1,112	1,117	1,124	1,131	1,136	1,148	1,156	v_k	0,15
1,450	1,463	1,489	1,525	1,562	1,583	1,613	1,645	1,689	1,738	1,777	v_j	
1,063	1,064	1,068	1,072	1,076	1,078	1,082	1,085	1,088	1,095	1,100	v_k	0,10
1,285	1,289	1,306	1,324	1,346	1,357	1,372	1,388	1,407	1,436	1,461	v_j	
1,032	1,032	1,034	1,035	1,038	1,039	1,039	1,039	1,043	1,046	1,048	v_k	0,05
1,134	0,135	1,143	1,149	1,159	1,164	1,169	1,174	1,184	1,194	1,204	v_j	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	v_k	0,00
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	v_j	

Scanned with OKEN Scanner

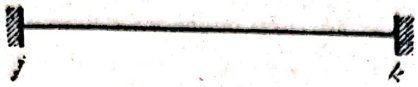


$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ		n 1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
1,00	w_k	1,000	1,015	1,030	1,049	1,072	1,094	1,134	1,183	1,217	1,253	1,311
	w_j	1,000	1,077	1,152	1,256	1,381	1,540	1,781	2,133	2,401	2,742	3,272
0,75	w_k	1,000	1,012	1,022	1,042	1,052	1,072	1,097	1,131	1,150	1,178	1,216
	w_j	1,000	1,059	1,134	1,223	1,330	1,474	1,660	1,937	2,135	2,390	2,769
0,50	w_k	1,000	1,009	1,018	1,030	1,042	1,060	1,079	1,104	1,133	1,144	1,171
	w_j	1,000	1,050	1,105	1,176	1,253	1,366	1,485	1,662	1,806	1,941	2,149
0,45	w_k	1,000	1,011	1,016	1,026	1,040	1,050	1,069	1,094	1,111	1,131	1,149
	w_j	1,000	1,046	1,091	1,147	1,225	1,320	1,440	1,600	1,639	1,840	2,015
0,40	w_k	1,000	1,010	1,017	1,028	1,040	1,050	1,070	1,092	1,107	1,124	1,148
	w_j	1,000	1,045	1,091	1,147	1,214	1,290	1,397	1,534	1,629	1,737	1,889
0,35	w_k	1,000	1,009	1,016	1,028	1,035	1,050	1,062	1,084	1,098	1,112	1,133
	w_j	1,000	1,041	1,081	1,137	1,191	1,264	1,345	1,467	1,548	1,642	1,761
0,30	w_k	1,000	1,007	1,014	1,023	1,033	1,042	1,058	1,077	1,087	1,102	1,118
	w_j	1,000	1,032	1,072	1,117	1,167	1,225	1,303	1,401	1,464	1,539	1,636
0,25	w_k	1,000	1,006	1,012	1,020	1,027	1,040	1,054	1,065	1,076	1,087	1,099
	w_j	1,000	1,028	1,040	1,100	1,140	1,196	1,256	1,336	1,385	1,438	1,508
0,20	w_k	1,000	1,005	1,011	1,016	1,024	1,032	1,042	1,055	1,063	1,071	1,081
	w_j	1,000	1,024	1,051	1,079	1,115	1,155	1,203	1,263	1,304	1,344	1,397
0,15	w_k	1,000	1,004	1,008	1,014	1,020	1,026	1,032	1,042	1,047	1,054	1,062
	w_j	1,000	1,021	1,037	1,062	1,089	1,117	1,151	1,195	1,221	1,249	1,286
0,10	w_k	1,000	1,003	1,006	1,010	1,014	1,018	1,024	1,029	1,033	1,037	1,042
	w_j	1,000	1,013	1,027	1,042	1,060	1,077	1,102	1,128	1,145	1,163	1,185
0,05	w_k	1,000	1,002	1,003	1,005	1,009	1,010	1,012	1,012	1,017	1,019	1,021
	w_j	1,000	1,006	1,014	1,022	1,034	1,041	1,012	1,063	1,071	1,079	1,096
0,00	w_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	w_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Scanned with OKEN Scanner

PARABOLICE
la ambele capete



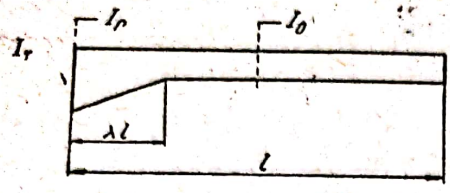
$$\rho_{jk}^{(j)} = w_j \frac{I_0}{l}$$

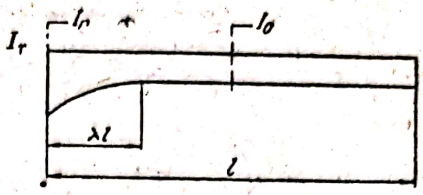
$$\rho_{jk}^{(k)} = w_k \frac{I_0}{l}$$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
1,341	1,342	1,386	1,435	1,495	1,541	1,597	1,667	1,776	1,985	2,220	w_k	1,00
3,655	3,751	4,189	4,807	5,714	6,390	7,309	8,675	11,040	16,610	24,847	w_j	
1,240	1,246	1,271	1,303	1,346	1,374	1,483	1,456	1,529	1,645	1,766	w_k	0,75
3,033	3,010	3,392	3,777	4,340	4,722	5,514	5,968	7,145	9,362	12,182	w_j	
1,187	1,195	1,210	1,232	1,259	1,279	1,300	1,328	1,367	1,437	1,488	w_k	0,50
2,285	2,325	2,463	2,645	2,888	3,054	3,251	3,513	3,894	4,560	5,235	w_j	
1,173	1,175	1,196	1,215	1,242	1,250	1,278	1,296	1,324	1,383	1,433	w_k	0,45
2,115	2,157	2,287	2,431	2,621	2,745	2,916	3,109	3,394	3,897	4,382	w_j	
1,160	1,167	1,177	1,194	1,215	1,229	1,246	1,265	1,292	1,338	1,373	w_k	0,40
1,982	2,010	2,101	2,219	2,376	2,475	2,598	2,753	2,969	3,330	3,675	w_j	
1,143	1,145	1,157	1,172	1,192	1,202	1,215	1,231	1,254	1,290	1,320	w_k	0,35
1,830	1,849	1,939	2,036	2,144	2,226	2,310	2,425	2,587	2,845	3,058	w_j	
1,127	1,130	1,139	1,151	1,164	1,175	1,185	1,198	1,215	1,242	1,265	w_k	0,30
1,693	1,710	1,766	1,838	1,927	1,985	2,053	2,136	2,251	2,430	2,602	w_j	
1,108	1,111	1,119	1,129	1,145	1,147	1,156	1,165	1,178	1,198	1,211	w_k	0,25
1,555	1,571	1,613	1,669	1,757	1,776	1,822	1,879	1,961	2,085	2,195	w_j	
1,088	1,089	1,095	1,102	1,112	1,117	1,123	1,130	1,139	1,153	1,165	w_k	0,20
1,430	1,437	1,469	1,506	1,554	1,581	1,614	1,654	1,707	1,789	1,860	w_j	
1,068	1,069	1,071	1,076	1,086	1,090	1,092	1,096	1,105	1,114	1,137	w_k	0,15
1,309	1,318	1,335	1,357	1,396	1,411	1,427	1,453	1,487	1,543	1,582	w_j	
1,045	1,046	1,048	1,051	1,055	1,058	1,061	1,063	1,068	1,074	1,081	w_k	0,10
1,198	1,202	1,214	1,228	1,246	1,256	1,268	1,283	1,302	1,331	1,359	w_j	
1,023	1,024	1,025	1,026	1,028	1,029	1,030	1,031	1,033	1,035	1,038	w_k	0,05
1,095	1,098	1,103	1,109	1,116	1,120	1,125	1,131	1,139	1,150	1,161	w_j	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	w_k	0,00
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	w_j	

Scanned with OKEN Scanner

Rigidităţi pentru bare încastrate la un





λ	n	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
1,00	v	0,750	0,809	0,886	0,980	1,101	1,280	1,499	1,867	2,128	2,551	3,174
	w	0,750	0,799	0,857	0,929	1,018	1,131	1,293	1,532	1,712	1,941	2,291
0,75	v	0,750	0,805	0,870	0,953	1,053	1,190	1,374	1,657	1,870	2,148	2,575
	w	0,750	0,792	0,840	0,899	0,969	1,062	1,180	1,351	1,477	1,628	1,849
0,50	v	0,750	0,794	0,843	0,903	0,976	1,064	1,188	1,356	1,495	1,617	1,817
	w	0,750	0,781	0,817	0,859	0,907	0,975	1,043	1,146	1,218	1,297	1,408
0,45	v	0,750	0,789	0,836	0,890	0,958	1,037	1,147	1,289	1,389	1,506	1,678
	w	0,750	0,779	0,812	0,848	0,894	0,948	1,016	1,106	1,163	1,232	1,330
0,40	v	0,750	0,786	0,829	0,877	0,937	1,008	1,102	1,225	1,309	1,406	1,537
	w	0,750	0,776	0,805	0,839	0,879	0,926	0,985	1,062	1,114	1,171	1,249
0,35	v	0,750	0,784	0,820	0,865	0,916	0,980	1,055	1,157	1,225	1,302	1,404
	w	0,750	0,774	0,799	0,831	0,865	0,906	0,954	1,020	1,064	1,111	1,174
0,30	v	0,750	0,779	0,812	0,850	0,894	0,947	1,012	1,095	1,146	1,214	1,289
	w	0,750	0,769	0,793	0,820	0,849	0,883	0,926	0,979	1,014	1,052	1,102
0,25	v	0,750	0,774	0,804	0,836	0,871	0,914	0,965	1,033	1,069	1,121	1,179
	w	0,750	0,767	0,786	0,809	0,833	0,864	0,896	0,940	0,967	0,996	1,032
0,20	v	0,750	0,772	0,794	0,820	0,848	0,884	0,921	0,970	1,003	1,035	1,076
	w	0,750	0,765	0,780	0,796	0,817	0,843	0,866	0,899	0,921	0,942	0,970
0,15	v	0,750	0,767	0,784	0,804	0,825	0,847	0,877	0,912	0,933	0,954	0,984
	w	0,750	0,760	0,772	0,786	0,801	0,817	0,836	0,859	0,874	0,890	0,909
0,10	v	0,750	0,760	0,773	0,786	0,800	0,814	0,833	0,855	0,868	0,881	0,897
	w	0,750	0,758	0,765	0,774	0,784	0,794	0,807	0,822	0,831	0,841	0,853
0,05	v	0,750	0,755	0,761	0,767	0,775	0,784	0,791	0,801	0,807	0,813	0,820
	w	0,750	0,753	0,758	0,762	0,770	0,773	0,778	0,785	0,790	0,794	0,800
0,00	v	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750
	w	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750

Scanned with OKEN Scanner

DREPTE ŞI PARABOLICE *Tabela 15*

capăt şi articulate la celălalt capăt

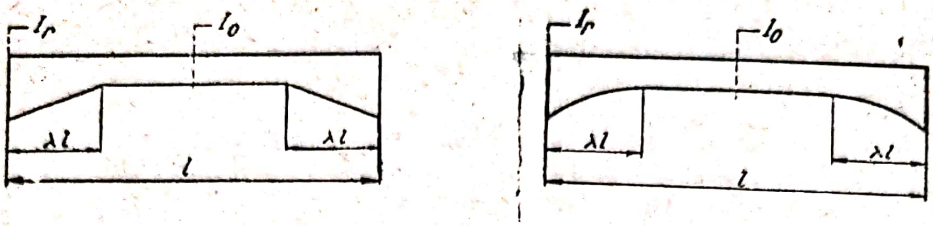
Vute drepte $\rho_{jk}^{(j)} = v\frac{I_0}{l}$

$n = \frac{I_0}{I_r}$

Vute parabolice $\rho_{jk}^{(j)} = w\frac{I_0}{l}$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
3,671	3,788	4,366	5,200	6,510	7,530	8,961	11,261	15,625	27,777	50,000	v	1,00
2,546	2,604	2,894	3,289	3,876	4,296	4,873	5,721	7,163	10,416	15,625	w	
2,884	2,931	3,307	3,782	4,488	4,990	5,656	6,631	8,224	11,363	15,151	v	0,75
2,002	2,039	2,203	2,415	2,717	2,921	3,185	3,551	4,112	5,155	6,410	w	
1,949	1,984	2,115	2,285	2,508	2,651	2,825	3,049	3,356	3,846	4,310	v	0,50
1,480	1,497	1,569	1,660	1,778	1,855	1,947	2,066	2,234	2,525	2,778	w	
1,773	1,799	1,908	2,033	2,214	2,315	2,451	2,604	2,809	3,165	3,425	v	0,45
1,378	1,397	1,462	1,534	1,625	1,689	1,761	1,852	1,984	2,193	2,404	w	
1,619	1,634	1,721	1,821	1,947	2,024	2,117	2,232	2,383	2,604	2,778	v	0,40
1,297	1,309	1,357	1,416	1,491	1,538	1,594	1,666	1,763	1,923	2,066	w	
1,469	1,488	1,553	1,623	1,712	1,773	1,838	1,923	2,016	2,174	2,294	v	0,35
1,211	1,220	1,263	1,309	1,367	1,404	1,445	1,497	1,572	1,689	1,786	w	
1,337	1,348	1,394	1,448	1,514	1,555	1,600	1,657	1,739	1,825	1,908	v	0,30
1,133	1,142	1,170	1,205	1,250	1,277	1,310	1,349	1,403	1,488	1,563	w	
1,209	1,217	1,252	1,292	1,339	1,377	1,402	1,435	1,482	1,553	1,603	v	0,25
1,056	1,064	1,086	1,114	1,156	1,167	1,189	1,220	1,256	1,316	1,366	w	
1,100	1,106	1,129	1,155	1,187	1,205	1,225	1,250	1,281	1,323	1,359	v	0,20
0,987	0,991	1,008	1,027	1,050	1,064	1,081	1,101	1,127	1,168	1,202	w	
0,998	1,004	1,016	1,033	1,055	1,064	1,078	1,092	1,116	1,136	1,157	v	0,15
0,921	0,926	0,936	0,947	0,965	0,973	0,984	0,996	1,012	1,042	1,059	w	
0,907	0,909	0,917	0,927	0,938	0,944	0,952	0,960	0,970	0,984	0,996	v	0,10
0,860	0,862	0,869	0,876	0,886	0,891	0,897	0,905	0,915	0,929	0,943	w	
0,824	0,825	0,829	0,833	0,838	0,840	0,844	0,847	0,851	0,856	0,862	v	0,05
0,803	0,805	0,807	0,810	0,815	0,817	0,820	0,823	0,827	0,833	0,839	w	
0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	v	0,00
0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	w	

Scanned with OKEN Scanner



λ	n	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
0,50	v	0,500	0,510	0,521	0,534	0,548	0,568	0,586	0,613	0,629	0,650	0,677
	w	0,500	0,510	0,522	0,534	0,551	0,570	0,590	0,618	0,633	0,654	0,680
0,45	v	0,500	0,510	0,523	0,536	0,552	0,572	0,594	0,624	0,642	0,665	0,696
	w	0,500	0,511	0,523	0,536	0,550	0,569	0,590	0,619	0,632	0,652	0,678
0,40	v	0,500	0,511	0,525	0,537	0,555	0,577	0,600	0,631	0,650	0,673	0,702
	w	0,500	0,510	0,523	0,536	0,549	0,567	0,588	0,614	0,629	0,649	0,672
0,35	v	0,500	0,511	0,526	0,538	0,557	0,577	0,601	0,632	0,652	0,674	0,699
	w	0,500	0,510	0,522	0,534	0,547	0,564	0,585	0,609	0,623	0,641	0,662
0,30	v	0,500	0,511	0,525	0,539	0,556	0,575	0,598	0,627	0,645	0,665	0,690
	w	0,500	0,510	0,520	0,532	0,544	0,560	0,578	0,600	0,612	0,629	0,649
0,25	v	0,500	0,510	0,524	0,538	0,552	0,571	0,590	0,618	0,633	0,649	0,671
	w	0,500	0,509	0,519	0,528	0,540	0,554	0,570	0,590	0,600	0,614	0,631
0,20	v	0,500	0,509	0,521	0,534	0,547	0,562	0,581	0,603	0,618	0,632	0,649
	w	0,500	0,508	0,517	0,525	0,535	0,548	0,560	0,578	0,587	0,598	0,611
0,15	v	0,500	0,509	0,517	0,527	0,539	0,551	0,565	0,584	0,594	0,605	0,618
	w	0,500	0,506	0,514	0,519	0,529	0,536	0,548	0,560	0,568	0,577	0,586
0,10	v	0,500	0,505	0,513	0,520	0,529	0,539	0,548	0,560	0,566	0,574	0,583
	w	0,500	0,504	0,509	0,514	0,521	0,526	0,534	0,543	0,548	0,554	0,560
0,05	v	0,500	0,503	0,507	0,512	0,516	0,521	0,526	0,531	0,536	0,539	0,543
	w	0,500	0,502	0,505	0,508	0,511	0,514	0,518	0,524	0,526	0,528	0,531
0,00	v	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
	w	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500

Scanned with OKEN Scanner

DREPTE ŞI PARABOLICE

în metoda repartizării momentelor

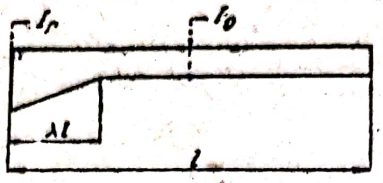
Vute drepte : $t_{j \to k} = t_{k \to j} = v$

Vute parabolice : $t_{j \to k} = t_{k \to j} = w$

$$I = \frac{J}{I_r}$$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
0,692	0,697	0,711	0,730	0,753	0,767	0,784	0,804	0,830	0,870	0,900	v	0,50
0,695	0,698	0,713	0,730	0,751	0,764	0,779	0,798	0,821	0,855	0,885	w	
0,710	0,714	0,735	0,753	0,777	0,791	0,812	0,831	0,855	0,896	0,925	v	0,45
0,692	0,695	0,709	0,725	0,747	0,760	0,774	0,792	0,815	0,847	0,875	w	
0,719	0,722	0,740	0,760	0,783	0,798	0,815	0,833	0,856	0,890	0,917	v	0,40
0,686	0,690	0,703	0,720	0,737	0,749	0,763	0,779	0,800	0,828	0,855	w	
0,717	0,719	0,736	0,755	0,775	0,789	0,805	0,820	0,842	0,870	0,892	v	0,35
0,675	0,678	0,692	0,704	0,722	0,732	0,746	0,759	0,779	0,805	0,828	w	
0,705	0,709	0,722	0,738	0,757	0,768	0,781	0,796	0,813	0,839	0,855	v	0,30
0,659	0,663	0,675	0,687	0,701	0,710	0,721	0,734	0,750	0,774	0,793	w	
0,685	0,690	0,701	0,712	0,728	0,739	0,750	0,760	0,776	0,791	0,809	v	0,25
0,641	0,644	0,653	0,664	0,675	0,683	0,692	0,703	0,717	0,735	0,751	w	
0,659	0,662	0,670	0,681	0,693	0,700	0,708	0,718	0,729	0,743	0,754	v	0,20
0,617	0,619	0,628	0,637	0,648	0,653	0,660	0,668	0,679	0,695	0,706	w	
0,625	0,627	0,637	0,643	0,650	0,658	0,662	0,671	0,679	0,689	0,698	v	0,15
0,592	0,596	0,599	0,606	0,614	0,619	0,623	0,630	0,638	0,650	0,660	w	
0,587	0,589	0,593	0,598	0,604	0,608	0,611	0,616	0,621	0,626	0,632	v	0,10
0,564	0,565	0,569	0,573	0,578	0,581	0,585	0,589	0,594	0,602	0,608	w	
0,545	0,546	0,548	0,551	0,554	0,555	0,557	0,559	0,562	0,565	0,568	v	0,05
0,534	0,534	0,536	0,538	0,540	0,542	0,543	0,545	0,548	0,552	0,554	w	
0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	v	0,00
0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	w	

Scanned with OKEN Scanner



$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ	n	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
1,00	v_1	0,500	0,484	0,472	0,456	0,440	0,420	0,397	0,369	0,351	0,333	0,309
	v_2	0,500	0,511	0,529	0,545	0,568	0,596	0,628	0,674	0,695	0,745	0,799
0,75	v_1	0,500	0,487	0,475	0,460	0,442	0,423	0,401	0,376	0,360	0,343	0,323
	v_2	0,500	0,517	0,537	0,560	0,589	0,624	0,671	0,737	0,782	0,840	0,925
0,50	v_1	0,500	0,491	0,483	0,474	0,464	0,451	0,439	0,423	0,416	0,405	0,393
	v_2	0,500	0,518	0,540	0,563	0,594	0,631	0,677	0,740	0,794	0,834	0,904
0,45	v_1	0,500	0,493	0,485	0,478	0,467	0,459	0,447	0,435	0,426	0,418	0,408
	v_2	0,500	0,517	0,539	0,562	0,590	0,627	0,670	0,732	0,767	0,813	0,879
0,40	v_1	0,500	0,494	0,488	0,483	0,473	0,467	0,456	0,445	0,438	0,430	0,422
	v_2	0,500	0,517	0,537	0,560	0,587	0,621	0,662	0,717	0,749	0,791	0,845
0,35	v_1	0,500	0,495	0,490	0,485	0,479	0,473	0,465	0,455	0,450	0,445	0,439
	v_2	0,500	0,516	0,534	0,557	0,582	0,612	0,648	0,697	0,726	0,765	0,809
0,30	v_1	0,500	0,497	0,493	0,488	0,484	0,479	0,473	0,466	0,461	0,458	0,452
	v_2	0,500	0,515	0,532	0,552	0,575	0,602	0,635	0,675	0,699	0,731	0,769
0,25	v_1	0,500	0,498	0,495	0,491	0,488	0,485	0,482	0,476	0,472	0,469	0,465
	v_2	0,500	0,514	0,528	0,546	0,565	0,588	0,618	0,653	0,670	0,695	0,726
0,20	v_1	0,500	0,499	0,497	0,493	0,492	0,489	0,486	0,482	0,480	0,479	0,477
	v_2	0,500	0,512	0,525	0,541	0,557	0,575	0,598	0,624	0,642	0,660	0,682
0,15	v_1	0,500	0,499	0,498	0,497	0,495	0,494	0,493	0,490	0,488	0,487	0,487
	v_2	0,500	0,510	0,520	0,532	0,545	0,560	0,575	0,595	0,606	0,620	0,638
0,10	v_1	0,500	0,500	0,499	0,499	0,498	0,497	0,496	0,496	0,495	0,494	0,494
	v_2	0,500	0,508	0,514	0,522	0,531	0,542	0,552	0,565	0,573	0,581	0,591
0,05	v_1	0,500	0,500	0,500	0,500	0,499	0,499	0,499	0,499	0,499	0,499	0,498
	v_2	0,500	0,504	0,508	0,511	0,516	0,522	0,526	0,533	0,536	0,540	0,545
0,00	v_1	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
	v_2	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500

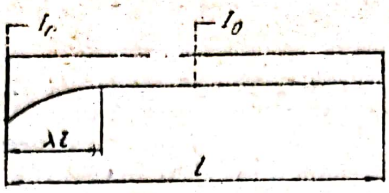
Scanned with OKEN Scanner

$l_1 \rightarrow k = v_1$

$l_k \rightarrow j = v_2$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
0,295	0,292	0,278	0,262	0,243	0,231	0,218	0,202	0,181	0,149	0,123	v_1	1,00
0,834	0,849	0,880	0,929	0,995	1,043	1,097	1,178	1,300	1,531	1,800	v_2	
0,311	0,308	0,297	0,284	0,269	0,260	0,250	0,238	0,224	0,206	0,190	v_1	0,75
0,983	0,990	1,058	1,138	1,251	1,325	1,425	1,562	1,773	2,159	2,576	v_2	
0,386	0,384	0,377	0,370	0,362	0,357	0,351	0,344	0,336	0,324	0,315	v_1	0,50
0,949	0,961	1,003	1,059	1,129	1,174	1,226	1,293	1,381	1,515	1,628	v_2	
0,402	0,400	0,394	0,389	0,382	0,375	0,371	0,363	0,358	0,351	0,342	v_1	0,45
0,914	0,925	0,962	1,010	1,071	1,102	1,150	1,204	1,274	1,377	1,458	v_2	
0,418	0,417	0,413	0,407	0,401	0,398	0,394	0,389	0,383	0,374	0,369	v_1	0,40
0,878	0,888	0,919	0,958	1,006	1,036	1,070	1,113	1,166	1,245	1,304	v_2	
0,435	0,434	0,428	0,426	0,420	0,419	0,415	0,409	0,404	0,399	0,394	v_1	0,35
0,834	0,845	0,869	0,903	0,942	0,965	0,990	1,023	1,063	1,122	1,165	v_2	
0,449	0,449	0,446	0,442	0,438	0,436	0,434	0,431	0,427	0,422	0,417	v_1	0,30
0,791	0,796	0,818	0,842	0,872	0,891	0,911	0,936	0,966	1,007	1,041	v_2	
0,462	0,461	0,460	0,458	0,454	0,453	0,452	0,449	0,446	0,442	0,439	v_1	0,25
0,745	0,749	0,763	0,783	0,805	0,820	0,834	0,851	0,873	0,907	0,927	v_2	
0,475	0,475	0,473	0,472	0,470	0,469	0,468	0,466	0,464	0,462	0,459	v_1	0,20
0,695	0,698	0,710	0,723	0,740	0,749	0,760	0,773	0,788	0,810	0,826	v_2	
0,484	0,484	0,482	0,481	0,481	0,480	0,479	0,478	0,478	0,477	0,476	v_1	0,15
0,644	0,645	0,654	0,665	0,675	0,682	0,690	0,699	0,710	0,723	0,732	v_2	
0,493	0,493	0,493	0,493	0,492	0,492	0,491	0,491	0,490	0,490	0,490	v_1	0,10
0,597	0,598	0,602	0,608	0,614	0,619	0,623	0,627	0,633	0,642	0,649	v_2	
0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,497	0,497	0,497	v_1	0,05
0,547	0,548	0,551	0,555	0,557	0,559	0,561	0,562	0,564	0,567	0,571	v_2	
0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	v_1	0,00
0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	v_2	

Scanned with OKEN Scanner

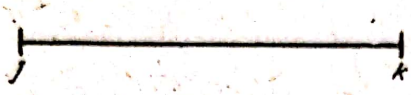


$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ	n	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
1,00	w_1	0,500	0,488	0,478	0,466	0,452	0,434	0,417	0,395	0,380	0,365	0,346
	w_2	0,500	0,514	0,535	0,555	0,582	0,613	0,655	0,712	0,751	0,799	0,865
0,75	w_1	0,500	0,492	0,483	0,474	0,462	0,450	0,436	0,419	0,407	0,396	0,382
	w_2	0,500	0,517	0,536	0,559	0,585	0,619	0,660	0,718	0,756	0,804	0,869
0,50	w_1	0,500	0,495	0,490	0,485	0,479	0,471	0,464	0,454	0,449	0,441	0,433
	w_2	0,500	0,517	0,532	0,553	0,576	0,603	0,638	0,684	0,719	0,749	0,795
0,45	w_1	0,500	0,497	0,492	0,487	0,483	0,479	0,470	0,461	0,456	0,450	0,443
	w_2	0,500	0,516	0,531	0,550	0,572	0,597	0,630	0,672	0,696	0,731	0,770
0,40	w_1	0,500	0,498	0,493	0,490	0,486	0,481	0,475	0,468	0,464	0,460	0,453
	w_2	0,500	0,515	0,529	0,547	0,567	0,592	0,620	0,658	0,682	0,710	0,746
0,35	w_1	0,500	0,498	0,495	0,492	0,487	0,485	0,480	0,474	0,471	0,468	0,462
	w_2	0,500	0,513	0,527	0,545	0,561	0,583	0,607	0,643	0,664	0,689	0,718
0,30	w_1	0,500	0,498	0,496	0,493	0,491	0,487	0,485	0,481	0,478	0,475	0,472
	w_2	0,500	0,511	0,524	0,539	0,555	0,572	0,597	0,625	0,643	0,664	0,695
0,25	w_1	0,500	0,499	0,497	0,495	0,493	0,491	0,489	0,486	0,484	0,482	0,480
	w_2	0,500	0,509	0,521	0,534	0,547	0,565	0,584	0,609	0,623	0,638	0,658
0,20	w_1	0,500	0,499	0,498	0,497	0,496	0,494	0,493	0,491	0,490	0,488	0,486
	w_2	0,500	0,508	0,518	0,527	0,540	0,554	0,568	0,587	0,600	0,612	0,628
0,15	w_1	0,500	0,499	0,499	0,498	0,498	0,497	0,496	0,494	0,493	0,493	0,492
	w_2	0,500	0,506	0,513	0,522	0,531	0,541	0,554	0,566	0,575	0,584	0,596
0,10	w_1	0,500	0,500	0,499	0,499	0,499	0,498	0,498	0,497	0,497	0,497	0,496
	w_2	0,500	0,504	0,510	0,515	0,521	0,528	0,536	0,545	0,551	0,557	0,565
0,05	w_1	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,499	0,499	0,499	0,499
	w_2	0,500	0,502	0,505	0,508	0,512	0,515	0,518	0,523	0,526	0,529	0,532
0,00	w_1	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
	w_2	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500

Scanned with OKEN Scanner

PARABOLICE
metoda repartizării momentelor

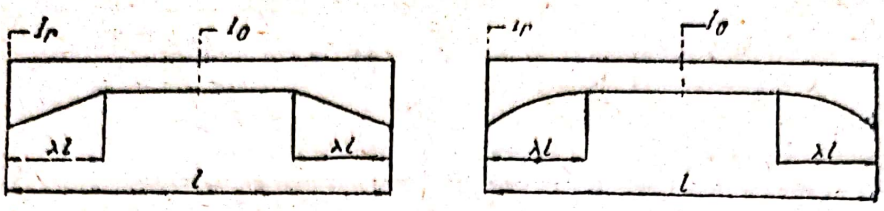


$l_{j \to k} = w_1$
$l_{k \to j} = w_2$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
0,334	0,330	0,320	0,307	0,291	0,281	0,270	0,256	0,237	0,211	0,186	w_1	1,00
0,909	0,917	0,966	1,028	1,110	1,165	1,236	1,330	1,473	1,750	2,069	w_2	
0,373	0,371	0,363	0,353	0,340	0,333	0,324	0,314	0,299	0,280	0,262	w_1	0,75
0,912	0,922	0,967	1,022	1,098	1,146	1,210	1,288	1,405	1,598	1,830	w_2	
0,428	0,427	0,422	0,416	0,409	0,406	0,400	0,395	0,387	0,375	0,365	w_1	0,50
0,824	0,832	0,859	0,894	0,939	0,968	1,001	1,044	1,102	1,195	1,278	w_2	
0,439	0,437	0,434	0,429	0,425	0,419	0,417	0,411	0,403	0,393	0,384	w_1	0,45
0,793	0,803	0,830	0,859	0,896	0,919	0,951	0,985	1,032	1,105	1,182	w_2	
0,450	0,449	0,445	0,441	0,437	0,434	0,430	0,426	0,420	0,412	0,404	w_1	0,40
0,768	0,775	0,795	0,821	0,853	0,873	0,897	0,927	0,966	1,031	1,083	w_2	
0,460	0,459	0,458	0,455	0,449	0,447	0,444	0,441	0,436	0,430	0,422	w_1	0,35
0,737	0,742	0,762	0,785	0,809	0,826	0,844	0,868	0,899	0,953	0,992	w_2	
0,469	0,469	0,467	0,464	0,461	0,460	0,457	0,455	0,451	0,445	0,441	w_1	0,30
0,705	0,710	0,725	0,741	0,763	0,776	0,792	0,811	0,835	0,875	0,906	w_2	
0,478	0,478	0,477	0,474	0,472	0,471	0,470	0,468	0,465	0,462	0,456	w_1	0,25
0,671	0,675	0,687	0,702	0,717	0,729	0,740	0,754	0,774	0,805	0,825	w_2	
0,485	0,485	0,484	0,483	0,481	0,481	0,479	0,478	0,476	0,473	0,473	w_1	0,20
0,638	0,640	0,649	0,660	0,673	0,680	0,689	0,700	0,714	0,734	0,755	w_2	
0,491	0,491	0,490	0,489	0,489	0,488	0,487	0,487	0,485	0,484	0,484	w_1	0,15
0,603	0,605	0,611	0,620	0,629	0,634	0,638	0,645	0,656	0,671	0,682	w_2	
0,496	0,496	0,496	0,495	0,495	0,495	0,494	0,494	0,494	0,493	0,493	w_1	0,10
0,569	0,570	0,574	0,579	0,584	0,587	0,592	0,596	0,602	0,610	0,618	w_2	
0,499	0,499	0,499	0,499	0,499	0,499	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	w_1	0,05
0,534	0,535	0,537	0,539	0,542	0,543	0,545	0,547	0,550	0,553	0,557	w_2	
0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	w_1	0,00
0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	w_2	

Scanned with OKEN Scanner

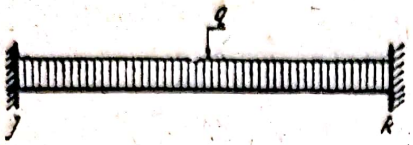
Momente de încastrare perfectă din sarcină uniformă



λ	n	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
0,50	v	0,083	0,084	0,086	0,087	0,089	0,090	0,093	0,095	0,097	0,098	0,101
	w	0,083	0,085	0,086	0,087	0,089	0,091	0,093	0,095	0,097	0,099	0,101
0,45	v	0,083	0,084	0,086	0,087	0,089	0,091	0,093	0,096	0,098	0,100	0,102
	w	0,083	0,084	0,086	0,087	0,089	0,091	0,093	0,095	0,097	0,099	0,101
0,40	v	0,083	0,085	0,086	0,088	0,089	0,091	0,094	0,097	0,099	0,101	0,103
	w	0,083	0,085	0,086	0,087	0,089	0,091	0,093	0,095	0,097	0,098	0,100
0,35	v	0,083	0,085	0,086	0,088	0,089	0,091	0,094	0,097	0,100	0,100	0,103
	w	0,083	0,084	0,086	0,087	0,088	0,090	0,092	0,095	0,097	0,098	0,100
0,30	v	0,083	0,085	0,086	0,088	0,089	0,091	0,094	0,096	0,098	0,100	0,102
	w	0,083	0,085	0,085	0,087	0,088	0,090	0,092	0,094	0,095	0,097	0,098
0,25	v	0,083	0,085	0,086	0,087	0,089	0,091	0,093	0,095	0,097	0,099	0,101
	w	0,083	0,084	0,085	0,087	0,088	0,089	0,091	0,093	0,094	0,095	0,097
0,20	v	0,083	0,084	0,086	0,087	0,089	0,090	0,092	0,094	0,096	0,097	0,098
	w	0,083	0,084	0,085	0,086	0,087	0,088	0,090	0,091	0,092	0,094	0,095
0,15	v	0,083	0,084	0,085	0,087	0,088	0,089	0,090	0,092	0,093	0,094	0,095
	w	0,083	0,084	0,085	0,086	0,087	0,087	0,088	0,090	0,091	0,091	0,092
0,10	v	0,083	0,084	0,085	0,086	0,087	0,088	0,088	0,090	0,090	0,091	0,092
	w	0,083	0,084	0,084	0,085	0,086	0,086	0,087	0,088	0,089	0,089	0,090
0,05	v	0,083	0,084	0,084	0,085	0,086	0,086	0,086	0,087	0,087	0,088	0,088
	w	0,083	0,084	0,084	0,084	0,085	0,085	0,085	0,086	0,086	0,086	0,087
0,00	v	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083
	w	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083

Scanned with OKEN Scanner

DREPTE ŞI PARABOLICE
distribuită, pentru bare încastrate la ambele capete



Vute drepte $\overline{M}_j = -\overline{M}_k = vql^2$

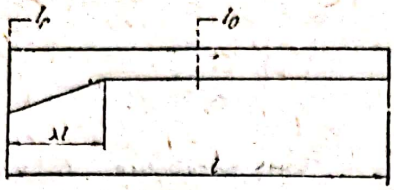
Vute parabolice $\overline{M}_j = -\overline{M}_k = wql^2$

$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
0,102	0,103	0,104	0,106	0,107	0,109	0,110	0,111	0,114	0,116	0,119	v	0,50
0,103	0,103	0,104	0,106	0,107	0,109	0,109	0,111	0,113	0,115	0,116	w	
0,104	0,104	0,106	0,107	0,109	0,111	0,112	0,114	0,115	0,118	0,120	v	0,45
0,102	0,103	0,104	0,105	0,107	0,108	0,108	0,111	0,112	0,114	0,116	w	
0,105	0,105	0,106	0,108	0,110	0,111	0,112	0,114	0,115	0,118	0,119	v	0,40
0,102	0,102	0,103	0,105	0,106	0,107	0,108	0,110	0,111	0,113	0,116	w	
0,105	0,105	0,106	0,107	0,109	0,111	0,111	0,113	0,114	0,116	0,118	v	0,35
0,101	0,101	0,102	0,103	0,105	0,105	0,106	0,108	0,110	0,111	0,113	w	
0,103	0,104	0,105	0,106	0,108	0,109	0,110	0,111	0,112	0,114	0,115	v	0,30
0,099	0,099	0,101	0,102	0,103	0,104	0,104	0,106	0,107	0,109	0,110	w	
0,102	0,102	0,103	0,104	0,105	0,106	0,107	0,108	0,109	0,111	0,112	v	0,25
0,097	0,098	0,099	0,100	0,101	0,102	0,102	0,103	0,104	0,106	0,107	w	
0,099	0,099	0,100	0,101	0,102	0,103	0,104	0,105	0,106	0,107	0,108	v	0,20
0,096	0,096	0,096	0,097	0,098	0,099	0,099	0,100	0,101	0,103	0,104	w	
0,096	0,097	0,097	0,098	0,099	0,099	0,100	0,100	0,101	0,102	0,103	v	0,15
0,093	0,093	0,094	0,094	0,095	0,095	0,096	0,097	0,098	0,099	0,099	w	
0,093	0,093	0,093	0,094	0,094	0,095	0,095	0,095	0,096	0,096	0,097	v	0,10
0,090	0,090	0,091	0,091	0,092	0,092	0,092	0,093	0,093	0,094	0,095	w	
0,088	0,088	0,089	0,089	0,089	0,089	0,090	0,090	0,090	0,090	0,091	v	0,05
0,087	0,087	0,087	0,088	0,088	0,088	0,088	0,088	0,089	0,089	0,089	w	
0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	v	0,00
0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	w	

Scanned with OKEN Scanner

Momente de încastrare perfectă din sarcină uniform



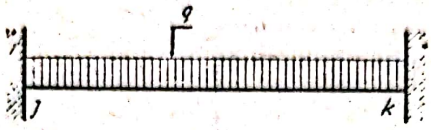
$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ		n 1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
1,00	v_j	0,083	0,085	0,087	0,090	0,092	0,096	0,099	0,105	0,108	0,112	0,118
	v_k	0,083	0,082	0,080	0,078	0,075	0,073	0,069	0,065	0,062	0,060	0,055
0,75	v_j	0,083	0,086	0,088	0,090	0,094	0,098	0,103	0,109	0,113	0,118	0,121
	v_k	0,083	0,082	0,080	0,078	0,076	0,073	0,070	0,067	0,064	0,062	0,059
0,50	v_j	0,083	0,086	0,088	0,091	0,095	0,100	0,102	0,108	0,112	0,117	0,123
	v_k	0,083	0,082	0,080	0,080	0,077	0,076	0,070	0,070	0,066	0,065	0,057
0,45	v_j	0,083	0,086	0,088	0,091	0,096	0,099	0,106	0,111	0,119	0,125	0,134
	v_k	0,083	0,082	0,081	0,080	0,077	0,076	0,073	0,070	0,068	0,066	0,063
0,40	v_j	0,083	0,086	0,089	0,091	0,096	0,100	0,106	0,114	0,119	0,125	0,133
	v_k	0,083	0,082	0,080	0,080	0,078	0,076	0,074	0,070	0,068	0,066	0.063
0,35	v_j	0,083	0,086	0,089	0,091	0,095	0,100	0,106	0,113	0,117	0,123	0,130
	v_k	0,083	0,082	0,081	0,080	0,078	0,076	0,074	0,070	0,069	0,067	0,063
0,30	v_j	0,083	0,086	0,088	0,091	0,095	0,099	0,104	0,111	0,116	0,121	0,128
	v_k	0,083	0,082	0,081	0,080	0,078	0,076	0,074	0,071	0,069	0,067	0,064
0,25	v_j	0,083	0,085	0,088	0,091	0,094	0,098	0,103	0,110	0,113	0,118	0,123
	v_k	0,083	0,082	0,080	0,080	0,078	0,077	0,075	0,071	0,070	0,068	0,066
0,20	v_j	0,083	0,086	0,088	0,090	0,093	0,097	0,101	0,106	0,110	0,113	0,117
	v_k	0,083	0,082	0,081	0,080	0,079	0,077	0,075	0,073	0,071	0,070	0,068
0,15	v_j	0,083	0,085	0,088	0,090	0,092	0,094	0,098	0,102	0,104	0,107	0,110
	v_k	0,083	0,082	0,081	0,080	0,079	0,078	0,077	0,075	0,076	0,073	0,071
0,10	v_j	0,083	0,085	0,086	0,088	0,090	0,091	0,094	0,096	0,098	0,100	0,102
	v_k	0,083	0,082	0,082	0,081	0,080	0,079	0,078	0,077	0,076	0,076	0,075
0,05	v_j	0,083	0,084	0,085	0,086	0,087	0,088	0,089	0,090	0,091	0,092	0,093
	v_k	0,083	0,083	0,083	0,082	0,082	0,081	0,080	0,080	0,080	0,080	0,079
0,00	v_j	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083
	v_k	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083

Scanned with OKEN Scanner

DREPTE

distribuită, pentru bare încastrate la ambele capete



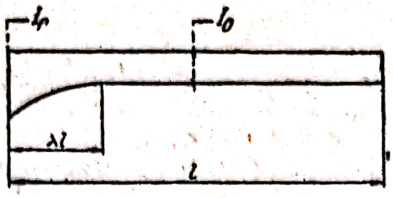
$$\overline{M}_j = + v_j\, ql^2$$

$$\overline{M}_k = - v_k\, ql^2$$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
0,122	0,122	0,126	0,131	0,139	0,142	0,145	0,151	0,160	0,168	0,189	v_j	1,00
0,052	0,052	0,050	0,047	0,045	0,044	0,040	0,039	0,033	0,026	0,023	v_k	
0,125	0,126	0,131	0,136	0,143	0,147	0,153	0,160	0,170	0,188	0,208	v_j	0,75
0,052	0,052	0,052	0,047	0,044	0,042	0,040	0,037	0,034	0,031	0,025	v_k	
0,139	0,130	0,134	0,140	0,148	0,153	0,159	0,168	0,181	0,204	0,229	v_j	0,50
0,059	0,055	0,053	0,050	0,047	0,045	0,043	0,041	0,037	0,031	0,026	v_k	
0,139	0,140	0,145	0,152	0,160	0,166	0,173	0,179	0,189	0,208	0,216	v_j	0,45
0,060	0,060	0,058	0,056	0,053	0,051	0,048	0,047	0,044	0,040	0,035	v_k	
0,136	0,138	0,144	0,150	0,158	0,162	0,166	0,174	0,183	0,195	0,203	v_j	0,40
0,060	0,060	0,059	0,056	0,053	0,052	0,051	0,048	0,045	0,041	0,038	v_k	
0,135	0,137	0,140	0,146	0,152	0,157	0,161	0,167	0,172	0,183	0,191	v_j	0,35
0,062	0,060	0,060	0,058	0,058	0,053	0,052	0,050	0,048	0,044	0,042	v_k	
0,131	0,132	0,136	0,140	0,145	0,148	0,153	0,157	0,163	0,169	0,175	v_j	0,30
0,063	0,063	0,061	0,059	0,058	0,056	0,055	0,053	0,050	0,048	0,046	v_k	
0,125	0,126	0,129	0,133	0,138	0,141	0,143	0,146	0,150	0,156	0,161	v_j	0,25
0,065	0,065	0,063	0,062	0,060	0,059	0,058	0,057	0,055	0,052	0,051	v_k	
0,119	0,120	0,122	0,125	0,128	0,130	0,132	0,135	0,138	0,142	0,145	v_j	0,20
0,068	0,067	0,066	0,065	0,063	0,063	0,062	0,061	0,060	0,058	0,057	v_k	
0,111	0,113	0,113	0,116	0,118	0,119	0,121	0,122	0,126	0,128	0,129	v_j	0,15
0,070	0,070	0,070	0,068	0,068	0,067	0,066	0,066	0,064	0,064	0,063	v_k	
0,103	0,104	0,105	0,106	0,107	0,107	0,108	0,109	0,110	0,112	0,114	v_j	0,10
0,074	0,074	0,074	0,073	0,072	0,072	0,072	0,071	0,071	0,070	0,069	v_k	
0,094	0,094	0,094	0,095	0,095	0,096	0,096	0,097	0,097	0,098	0,099	v_j	0,05
0,079	0,079	0,078	0,078	0,078	0,078	0,077	0,077	0,077	0,076	0,076	v_k	
0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	v_j	0,00
0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	v_k	

Scanned with OKEN Scanner

Momente de încastrare perfectă din sarcină uniformă



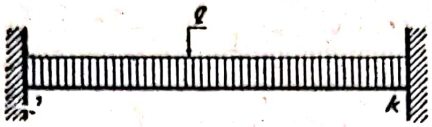
$$n = \frac{I_o}{I_r}$$

λ	n	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
1,00	w_j	0,083	0,085	0,088	0,091	0,093	0,097	0,103	0,109	0,114	0,119	0,125
	w_k	0,083	0,081	0,080	0,078	0,077	0,074	0,071	0,068	0,065	0,062	0,059
0,75	w_j	0,083	0,086	0,088	0,091	0,094	0,099	0,104	0,111	0,116	0,121	0,128
	w_k	0,083	0,082	0,080	0,079	0,078	0,075	0,073	0,070	0,068	0,065	0,062
0,50	w_j	0,083	0,086	0,088	0,091	0,094	0,100	0,104	0,110	0,115	0,119	0,127
	w_k	0,083	0,082	0,081	0,080	0,078	0,076	0,074	0,071	0,069	0,067	0,065
0,45	w_j	0,083	0,085	0,087	0,089	0,092	0,098	0,103	0,110	0,114	0,119	0,125
	w_k	0,083	0,083	0,082	0,080	0,079	0,078	0,076	0,073	0,072	0,070	0,069
0,40	w_j	0,083	0,086	0,088	0,091	0,094	0,098	0,103	0,108	0,113	0,117	0,123
	w_k	0,083	0,082	0,081	0,080	0,078	0,077	0,075	0,072	0,071	0,069	0,066
0,35	w_j	0,083	0,086	0,088	0,091	0,094	0,097	0,101	0,107	0,111	0,115	0,121
	w_k	0,083	0,082	0,081	0,080	0,079	0,077	0,075	0,073	0,071	0,070	0,067
0,30	w_j	0,083	0,085	0,087	0,090	0,093	0,096	0,100	0,105	0,108	0,113	0,117
	w_k	0,083	0,082	0,082	0,081	0,079	0,078	0,075	0,073	0,072	0,071	0,069
0,25	w_j	0,083	0,085	0,087	0,090	0,092	0,095	0,098	0,103	0,106	0,109	0,112
	w_k	0,083	0,082	0,082	0,080	0,080	0,078	0,077	0,074	0,073	0,072	0,071
0,20	w_j	0,083	0,085	0,087	0,089	0,091	0,094	0,096	0,100	0,103	0,105	0,108
	w_k	0,083	0,082	0,082	0,081	0,080	0,078	0,078	0,076	0,074	0,074	0,072
0,15	w_j	0,083	0,085	0,086	0,088	0,090	0,091	0,094	0,096	0,099	0,100	0,103
	w_k	0,083	0,083	0,082	0,081	0,080	0,080	0,078	0,077	0,076	0,076	0,075
0,10	w_j	0,083	0,085	0,085	0,087	0,088	0,089	0,091	0,093	0,094	0,095	0,097
	w_k	0,083	0,083	0,083	0,082	0,081	0,081	0,080	0,079	0,078	0,078	0,077
0,05	w_j	0,083	0,084	0,084	0,085	0,086	0,086	0,087	0,088	0,089	0,089	0,091
	w_k	0,083	0,083	0,083	0,083	0,082	0,082	0,082	0,081	0,081	0,081	0,080
0,00	w_j	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083
	w_k	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0l083

Scanned with OKEN Scanner

PARABOLICE

distribuită, pentru bare încastrate la ambele capete



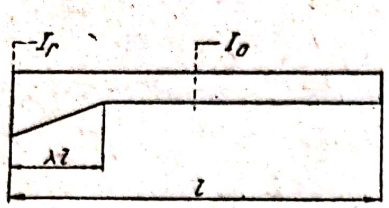
$$\overline{M_j} = + w_j\, ql^2$$

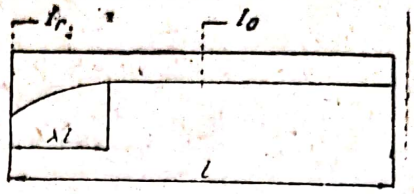
$$\overline{M_k} = - w_k\, ql^2$$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
0,130	0,130	0,137	0,141	0,149	0,156	0,160	0,168	0,180	0,200	0,226	w_j	1,00
0,057	0,057	0,054	0,052	0,049	0,048	0,045	0,042	0,039	0,033	0,026	w_k	
0,134	0,134	0,139	0,146	0,153	0,158	0,164	0,174	0,186	0,205	0,223	w_j	0,75
0,060	0,060	0,058	0,055	0,053	0,051	0,050	0,046	0,042	0,037	0,033	w_k	
0,131	0,132	0,136	0,142	0,148	0,152	0,157	0,163	0,171	0,185	0,196	w_j	0,50
0,063	0,062	0,061	0,059	0,057	0,055	0,053	0,051	0,048	0,043	0,040	w_k	
0,129	0,129	0,134	0,139	0,144	0,149	0,153	0,158	0,166	0,177	0,187	w_j	0,45
0,064	0,063	0,062	0,060	0,058	0,056	0,054	0,053	0,050	0,047	0,043	w_k	
0,127	0,128	0,131	0,136	0,141	0,144	0,148	0,152	0,159	0,170	0,177	w_j	0,40
0,065	0,064	0,063	0,061	0,059	0,058	0,056	0,055	0,052	0,048	0,046	w_k	
0,124	0,124	0,128	0,132	0,136	0,139	0,142	0,146	0,152	0,160	0,166	w_j	0,35
0,065	0,065	0,064	0,062	0,061	0,060	0,059	0,057	0,055	0,051	0,049	w_k	
0,120	0,121	0,123	0,126	0,130	0,133	0,135	0,138	0,143	0,149	0,156	w_j	0,30
0,067	0,067	0,066	0,065	0,063	0,062	0,061	0,060	0,058	0,054	0,053	w_k	
0,115	0,116	0,118	0,121	0,125	0,126	0,128	0,130	0,134	0,140	0,144	w_j	0,25
0,069	0,069	0,068	0,067	0,065	0,064	0,064	0,063	0,061	0,059	0,057	w_k	
0,110	0,111	0,112	0,114	0,117	0,118	0,120	0,122	0,125	0,129	0,133	w_j	0,20
0,071	0,071	0,070	0,069	0,068	0,068	0,066	0,066	0,065	0,063	0,062	w_k	
0,104	0,104	0,106	0,107	0,109	0,110	0,113	0,113	0,114	0,118	0,120	w_j	0,15
0,074	0,074	0,073	0,072	0,071	0,071	0,071	0,070	0,069	0,068	0,066	w_k	
0,098	0,098	0,099	0,100	0,101	0,102	0,103	0,103	0,104	0,106	0,108	w_j	0,10
0,076	0,076	0,076	0,075	0,075	0,075	0,074	0,074	0,073	0,072	0,072	w_k	
0,091	0,091	0,091	0,092	0,092	0,092	0,093	0,093	0,094	0,095	0,095	w_j	0,05
0,080	0,080	0,080	0,079	0,079	0,079	0,079	0,079	0,078	0,078	0,078	w_k	
0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	w_j	0,00
0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	w_k	

Scanned with OKEN Scanner

Momente de încastrare perfectă din sarcină uniform distribuită,





$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ	n	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150
1,00	v	0,125	0,127	0,129	0,133	0,135	0,140	0,143	0,148	0,150	0,156	0,160
	w	0,125	0,127	0,131	0,134	0,138	0,143	0,149	0,157	0,162	0,169	0,176
0,75	v	0,125	0,128	0,131	0,134	0,138	0,143	0,150	0,158	0,163	0,170	0,179
	w	0,125	0,128	0,131	0,135	0,140	0,145	0,152	0,161	0,166	0,173	0,182
0,50	v	0,125	0,129	0,132	0,136	0,141	0,147	0,155	0,165	0,174	0,179	0,189
	w	0,125	0,128	0,131	0,135	0,139	0,146	0,151	0,159	0,165	0,170	0,178
0,45	v	0,125	0,129	0,132	0,136	0,141	0,147	0,155	0,164	0,171	0,178	0,189
	w	0,125	0,128	0,131	0,135	0,139	0,145	0,150	0,159	0,163	0,167	0,176
0,40	v	0,125	0,128	0,132	0,136	0,141	0,147	0,154	0,164	0,170	0,177	0,186
	w	0,125	0,128	0,131	0,135	0,139	0,143	0,149	0,159	0,161	0,166	0,172
0,35	v	0,125	0,128	0,132	0,136	0,141	0,147	0,153	0,162	0,167	0,173	0,182
	w	0,125	0,128	0,131	0,134	0,138	0,142	0,147	0,154	0,158	0,163	0,169
0,30	v	0,125	0,128	0,132	0,135	0,140	0,145	0,151	0,159	0,164	0,170	0,177
	w	0,125	0,127	0,130	0,133	0,137	0,141	0,146	0,151	0,155	0,159	0,164
0,25	v	0,125	0,128	0,131	0,134	0,139	0,143	0,149	0,156	0,160	0,165	0,171
	w	0,125	0,127	0,130	0,133	0,135	0,140	0,143	0,148	0,151	0,155	0,159
0,20	v	0,125	0,128	0,130	0,134	0,137	0,142	0,146	0,151	0,156	0,159	0,164
	w	0,125	0,127	0,129	0,131	0,134	0,138	0,140	0,145	0,147	0,150	0,153
0,15	v	0,125	0,127	0,130	0,133	0,135	0,138	0,142	0,146	0,149	0,152	0,155
	w	0,125	0,126	0,128	0,130	0,132	0,134	0,137	0,140	0,142	0,144	0,147
0,10	v	0,125	0,126	0,128	0,130	0,132	0,134	0,137	0,140	0,142	0,144	0,146
	w	0,125	0,126	0,127	0,129	0,130	0,132	0,133	0,136	0,137	0,138	0,140
0,05	v	0,125	0,126	0,127	0,128	0,129	0,130	0,131	0,133	0,134	0,135	0,136
	w	0,125	0,126	0,126	0,127	0,128	0,129	0,130	0,131	0,131	0,132	0,133
0,00	v	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
	w	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125

Scanned with OKEN Scanner

DREPTE ŞI PARABOLICE *Tabela 22*

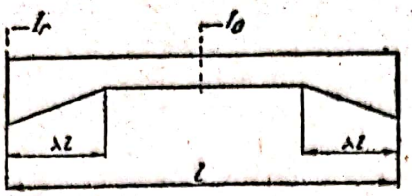
pentru bare încastrate la un capăt şi articulate la celălalt capăt

Vute drepte $\bar{M}_j = + vql^2$

Vute parabolice $\bar{M}_j = + wql^2$

0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	n	λ
0,166	0,167	0,171	0,177	0,182	0,184	0,190	0,194	0,206	0,222	0,240	v	1,00
0,181	0,182	0,189	0,195	0,203	0,208	0,214	0,224	0,235	0,254	0,281	w	
0,186	0,186	0,193	0,201	0,212	0,218	0,226	0,239	0,253	0,286	0,315	v	0,75
0,187	0,189	0,195	0,202	0,211	0,216	0,223	0,233	0,245	0,264	0,282	w	
0,196	0,198	0,203	0,211	0,221	0,226	0,233	0,242	0,252	0,268	0,283	v	0,50
0,183	0,184	0,188	0,194	0,201	0,206	0,210	0,217	0,224	0,237	0,247	w	
0,194	0,195	0,201	0,207	0,217	0,221	0,228	0,234	0,243	0,258	0,266	v	0,45
0,180	0,180	0,185	0,190	0,196	0,201	0,205	0,210	0,218	0,228	0,239	w	
0,190	0,192	0,198	0,203	0,211	0,215	0,220	0,227	0,235	0,245	0,252	v	0,40
0,176	0,178	0,181	0,186	0,191	0,194	0,198	0,203	0,209	0,219	0,226	w	
0,186	0,188	0,193	0,197	0,203	0,208	0,212	0,218	0,223	0,232	0,239	v	0,35
0,172	0,173	0,177	0,181	0,185	0,188	0,191	0,195	0,201	0,209	0,215	w	
0,181	0,182	0,186	0,190	0,195	0,198	0,202	0,206	0,211	0,218	0,223	v	0,30
0,167	0,168	0,171	0,174	0,178	0,181	0,183	0,187	0,191	0,198	0,204	w	
0,173	0,174	0,178	0,181	0,186	0,189	0,191	0,194	0,198	0,204	0,208	v	0,25
0,161	0,162	0,165	0,168	0,172	0,173	0,175	0,178	0,181	0,187	0,191	w	
0,166	0,167	0,169	0,172	0,175	0,177	0,179	0,182	0,185	0,188	0,192	v	0,20
0,155	0,156	0,158	0,160	0,163	0,164	0,166	0,168	0,171	0,175	0,178	w	
0,157	0,158	0,159	0,161	0,164	0,165	0,166	0,168	0,171	0,173	0,175	v	0,15
0,148	0,149	0,151	0,152	0,154	0,155	0,156	0,158	0,160	0,163	0,165	w	
0,147	0,147	0,149	0,150	0,151	0,152	0,153	0,154	0,156	0,157	0,159	v	0,10
0,141	0,141	0,143	0,143	0,145	0,145	0,146	0,147	0,149	0,151	0,153	w	
0,137	0,137	0,137	0,138	0,138	0,139	0,139	0,140	0,140	0,141	0,142	v	0,05
0,133	0,134	0,134	0,135	0,135	0,135	0,136	0,136	0,137	0,138	0,139	w	
0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	v	0,00
0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	w	

Scanned with OKEN Scanner



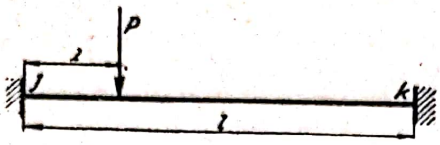
$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,50	1,00	v_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		v_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	v_j	0,078	0,135	0,161	0,159	0,139	0,108	0,070	0,035	0,013
		v_k	0,013	0,035	0,070	0,108	0,139	0,159	0,161	0,135	0,078
	0,20	v_j	0,088	0,149	0,181	0,175	0,158	0,115	0,069	0,032	0,008
		v_k	0,008	0,032	0,069	0,115	0,158	0,175	0,181	0,149	0,088
	0,10	v_j	0,092	0,158	0,194	0,202	0,171	0,120	0,070	0,030	0,007
		v_k	0,007	0,030	0,070	0,120	0,171	0,202	0,194	0,158	0,092
	0,05	v_j	0,096	0,168	0,211	0,223	0,191	0,128	0,073	0,029	0,008
		v_k	0,007	0,029	0,073	0,128	0,191	0,223	0,211	0,168	0,096
0,40	1,00	v_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		v_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	v_j	0,097	0,156	0,188	0,186	0,141	0,121	0,076	0,039	0,003
		v_k	0,003	0,039	0,076	0,121	0,141	0,186	0,188	0,156	0,097
	0,20	v_j	0,090	0,124	0,189	0,191	0,161	0,115	0,067	0,030	0,007
		v_k	0,007	0,030	0,067	0,115	0,161	0,191	0,189	0,124	0,090
	0,10	v_j	0,092	0,161	0,204	0,211	0,174	0,117	0,065	0,028	0,006
		v_k	0,006	0,028	0,065	0,117	0,174	0,211	0,204	0,161	0,092
	0,05	v_j	0,094	0,171	0,221	0,232	0,186	0,116	0,060	0,024	0,005
		v_k	0,005	0,024	0,060	0,116	0,186	0,232	0,221	0,171	0,094
0,35	1,00	v_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		v_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	v_j	0,085	0,140	0,167	0,165	0,141	0,104	0,065	0,033	0,009
		v_k	0,009	0,033	0,065	0,104	0,141	0,165	0,167	0,140	0,085
	0,20	v_j	0,090	0,154	0,189	0,191	0,160	0,112	0,067	0,029	0,008
		v_k	0,008	0,029	0,067	0,112	0,160	0,191	0,189	0,154	0,090
	0,10	v_j	0,091	0,162	0,208	0,210	0,172	0,114	0,063	0,028	0,008
		v_k	0,008	0,028	0,063	0,114	0,172	0,210	0,208	0,162	0,091
	0,05	v_j	0,093	0,171	0,222	0,229	0,181	0,111	0,057	0,021	0,005
		v_k	0,005	0,021	0,057	0,111	0,181	0,229	0,222	0,171	0,093

Scanned with OKEN Scanner

DREPTE

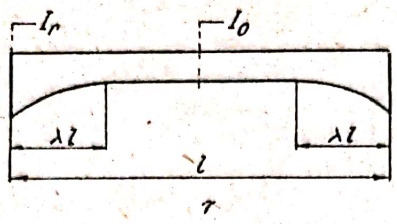
concentrate, pentru bare încastrate la ambele capete



$$\bar{M}_j = + v_j \, Pl$$
$$\bar{M}_k = - v_k \, Pl$$

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,30	1,00	v_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		v_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	v_j	0,085	0,140	0,167	0,163	0,140	0,104	0,063	0,032	0,009
		v_k	0,009	0,032	0,063	0,104	0,140	0,163	0,167	0,139	0,085
	0,20	v_j	0,090	0,157	0,194	0,190	0,157	0,109	0,062	0,027	0,006
		v_k	0,006	0,027	0,062	0,109	0,157	0,190	0,194	0,157	0,090
	0,10	v_j	0,093	0,168	0,213	0,209	0,167	0,109	0,055	0,022	0,005
		v_k	0,005	0,022	0,055	0,109	0,167	0,209	0,213	0,168	0,093
	0,05	v_j	0,096	0,178	0,232	0,227	0,175	0,107	0,048	0,017	0,004
		v_k	0,004	0,017	0,048	0,107	0,175	0,227	0,232	0,178	0,096
0,25	1,00	v_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		v_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	v_j	0,086	0,140	0,164	0,162	0,139	0,102	0,063	0,030	0,008
		v_k	0,008	0,030	0,063	0,102	0,139	0,162	0,164	0,140	0,086
	0,20	v_j	0,092	0,157	0,188	0,184	0,153	0,108	0,061	0,025	0,006
		v_k	0,006	0,025	0,061	0,108	0,153	0,184	0,188	0,157	0,092
	0,10	v_j	0,093	0,170	0,205	0,198	0,162	0,108	0,054	0,020	0,005
		v_k	0,005	0,020	0,054	0,108	0,162	0,198	0,205	0,170	0,093
	0,05	v_j	0,097	0,176	0,225	0,218	0,168	0,104	0,049	0,017	0,004
		v_k	0,004	0,017	0,049	0,104	0,168	0,218	0,225	0,176	0,097
0,20	1,00	v_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		v_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	v_j	0,087	0,140	0,164	0,161	0,137	0,101	0,064	0,030	0,008
		v_k	0,008	0,030	0,064	0,101	0,137	0,161	0,164	0,140	0,087
	0,20	v_j	0,092	0,159	0,188	0,180	0,149	0,105	0,058	0,023	0,005
		v_k	0,005	0,023	0,058	0,105	0,149	0,180	0,188	0,159	0,092
	0,10	v_j	0,095	0,171	0,202	0,192	0,155	0,105	0,054	0,018	0,003
		v_k	0,003	0,018	0,054	0,105	0,155	0,192	0,202	0,171	0,095
	0,05	v_j	0,097	0,179	0,214	0,202	0,160	0,105	0,050	0,014	0,002
		v_k	0,002	0,014	0,050	0,105	0,160	0,202	0,214	0,179	0,097

Scanned with OKEN Scanner



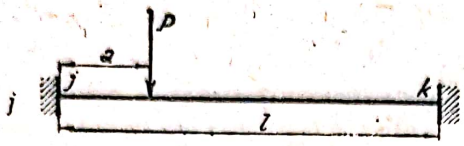
$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,50	1,00	w_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_j	0,087	0,138	0,167	0,162	0,139	0,104	0,064	0,032	0,007
		w_k	0,007	0,032	0,064	0,104	0,139	0,162	0,167	0,138	0,087
	0,20	w_j	0,090	0,154	0,186	0,186	0,156	0,111	0,065	0,028	0,006
		w_k	0,006	0,028	0,065	0,111	0,156	0,186	0,186	0,154	0,090
	0,10	w_j	0,092	0,163	0,202	0,203	0,168	0,113	0,061	0,024	0,006
		w_k	0,006	0,024	0,061	0,113	0,168	0,203	0,202	0,163	0,092
	0,05	w_j	0,094	0,171	0,217	0,221	0,178	0,114	0,058	0,022	0,005
		w_k	0,005	0,022	0,058	0,114	0,178	0,221	0,217	0,171	0,094
0,40	1,00	w_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_j	0,087	0,138	0,164	0,162	0,138	0,103	0,064	0,031	0,007
		w_k	0,007	0,031	0,064	0,103	0,138	0,162	0,164	0,138	0,087
	0,20	w_j	0,090	0,156	0,188	0,185	0,154	0,109	0,063	0,027	0,006
		w_k	0,006	0,027	0,063	0,109	0,154	0,185	0,188	0,156	0,090
	0,10	w_j	0,093	0,166	0,205	0,202	0,164	0,110	0,059	0,022	0,005
		w_k	0,005	0,022	0,059	0,110	0,164	0,202	0,205	0,166	0,093
	0,05	w_j	0,096	0,175	0,220	0,219	0,173	0,109	0,054	0,019	0,003
		w_k	0,003	0,019	0,054	0,109	0,173	0,219	0,220	0,175	0,096
0,35	1,00	w_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_j	0,086	0,140	0,166	0,161	0,137	0,103	0,063	0,029	0,007
		w_k	0,007	0,029	0,063	0,103	0,137	0,161	0,166	0,140	0,086
	0,20	w_j	0,091	0,156	0,184	0,182	0,152	0,107	0,062	0,027	0,006
		w_k	0,006	0,027	0,062	0,107	0,152	0,182	0,184	0,156	0,091
	0,10	w_j	0,093	0,164	0,199	0,195	0,161	0,110	0,057	0,024	0,005
		w_k	0,005	0,024	0,057	0,110	0,161	0,195	0,199	0,164	0,093
	0,05	w_j	0,097	0,172	0,216	0,210	0,168	0,110	0,054	0,020	0,004
		w_k	0,004	0,020	0,054	0,110	0,168	0,210	0,216	0,172	0,097

Scanned with OKEN Scanner

PARABOLICE

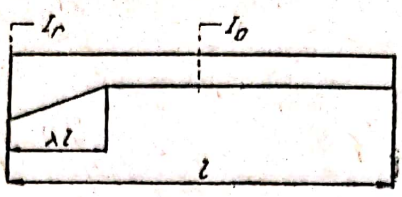
concentrate, pentru bare încastrate la ambele capete



$$\overline{M_j} = + w_j Pl$$
$$\overline{M_k} = - w_k Pl$$

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,30	1,00	w_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_j	0,086	0,140	0,165	0,160	0,136	0,103	0,064	0,030	0,008
		w_k	0,008	0,030	0,064	0,103	0,136	0,160	0,165	0,140	0,086
	0,20	w_j	0,091	0,157	0,186	0,180	0,149	0,106	0,060	0,024	0,005
		w_k	0,005	0,024	0,060	0,106	0,149	0,180	0,186	0,157	0,091
	0,10	w_j	0,094	0,167	0,201	0,193	0,157	0,106	0,056	0,020	0,003
		w_k	0,003	0,020	0,056	0,106	0,157	0,193	0,201	0,167	0,094
	0,05	w_j	0,096	0,175	0,215	0,206	0,163	0,106	0,051	0,016	0,003
		w_k	0,003	0,016	0,051	0,106	0,163	0,206	0,215	0,175	0,096
0,25	1,00	w_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_j	0,086	0,138	0,162	0,159	0,135	0,101	0,064	0,030	0,008
		w_k	0,008	0,030	0,064	0,101	0,135	0,159	0,162	0,138	0,086
	0,20	w_j	0,090	0,155	0,178	0,174	0,146	0,105	0,061	0,025	0,005
		w_k	0,005	0,025	0,061	0,105	0,146	0,174	0,178	0,155	0,090
	0,10	w_j	0,092	0,165	0,193	0,187	0,153	0,105	0,058	0,021	0,004
		w_k	0,004	0,021	0,058	0,105	0,153	0,187	0,193	0,165	0,092
	0,05	w_j	0,095	0,169	0,203	0,196	0,158	0,107	0,054	0,018	0,003
		w_k	0,003	0,018	0,054	0,107	0,158	0,196	0,203	0,169	0,095
0,20	1,00	w_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_j	0,086	0,135	0,161	0,156	0,133	0,100	0,063	0,032	0,007
		w_k	0,007	0,032	0,063	0,100	0,133	0,156	0,161	0,135	0,086
	0,20	w_j	0,091	0,154	0,177	0,175	0,142	0,102	0,060	0,024	0,005
		w_k	0,005	0,024	0,060	0,102	0,142	0,175	0,177	0,154	0,091
	0,10	w_j	0,095	0,171	0,188	0,179	0,147	0,103	0,057	0,021	0,003
		w_k	0,003	0,021	0,057	0,103	0,147	0,179	0,188	0,171	0,095
	0,05	w_j	0,096	0,169	0,196	0,187	0,152	0,104	0,056	0,018	0,003
		w_k	0,003	0,018	0,056	0,104	0,152	0,187	0,196	0,169	0,096

Scanned with OKEN Scanner



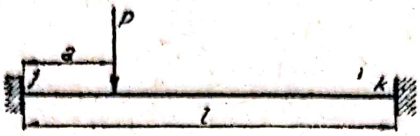
$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,00	1,00	v_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		v_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	v_j	0,091	0,140	0,168	0,172	0,154	0,122	0,085	0,047	0,011
		v_k	0,003	0,023	0,047	0,075	0,102	0,123	0,132	0,116	0,080
	0,20	v_j	0,087	0,146	0,179	0,189	0,180	0,149	0,107	0,062	0,018
		v_k	0,004	0,017	0,035	0,057	0,079	0,099	0,108	0,103	0,071
	0,10	v_j	0,089	0,151	0,192	0,209	0,203	0,174	0,128	0,077	0,025
		v_k	0,003	0,012	0,025	0,045	0,064	0,084	0,095	0,093	0,067
	0,05	v_j	0,090	0,156	0,202	0,226	0,225	0,201	0,154	0,094	0,033
		v_k	0,002	0,010	0,018	0,034	0,050	0,069	0,082	0,082	0,062
0,75	1,00	v_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		v_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	v_j	0,089	0,145	0,167	0,167	0,152	0,120	0,081	0,042	0,012
		v_k	0,004	0,020	0,050	0,083	0,107	0,128	0,136	0,122	0,079
	0,20	v_j	0,087	0,150	0,189	0,202	0,191	0,161	0,114	0,062	0,018
		v_k	0,004	0,016	0,034	0,057	0,083	0,105	0,119	0,113	0,077
	0,10	v_j	0,090	0,160	0,206	0,229	0,224	0,196	0,145	0,082	0,024
		v_k	0,003	0,011	0,025	0,044	0,067	0,090	0,107	0,107	0,075
	0,05	v_j	0,095	0,169	0,225	0,256	0,263	0,242	0,187	0,110	0,035
		v_k	0,001	0,008	0,019	0,035	0,054	0,075	0,095	0,100	0,072
0,50	1,00	v_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		v_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,129	0,081
	0,50	v_j	0,086	0,145	0,172	0,173	0,156	0,122	0,080	0,041	0,012
		v_k	0,007	0,023	0,051	0,083	0,111	0,133	0,141	0,126	0,081
	0,20	v_j	0,090	0,158	0,202	0,219	0,208	0,169	0,116	0,061	0,017
		v_k	0,004	0,020	0,035	0,061	0,090	0,114	0,126	0,117	0,078
	0,10	v_j	0,093	0,169	0,224	0,255	0,252	0,211	0,154	0,078	0,023
		v_k	0,002	0,018	0,026	0,047	0,074	0,100	0,113	0,111	0,076
	0,05	v_j	0,096	0,178	0,245	0,289	0,298	0,256	0,182	0,097	0,028
		v_k	0,002	0,008	0,018	0,035	0,058	0,085	0,105	0,105	0,074
0,40	1,00	v_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		v_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	v_j	0,088	0,146	0,171	0,177	0,157	0,125	0,079	0,041	0,012
		v_k	0,006	0,023	0,050	0,080	0,111	0,133	0,141	0,125	0,081
	0,20	v_j	0,091	0,161	0,207	0,223	0,206	0,165	0,111	0,057	0,016
		v_k	0,004	0,016	0,036	0,062	0,092	0,117	0,128	0,118	0,078
	0,10	v_j	0,094	0,173	0,231	0,259	0,245	0,198	0,136	0,071	0,021
		v_k	0,002	0,011	0,025	0,048	0,077	0,104	0,114	0,113	0,076
	0,05	v_j	0,096	0,182	0,251	0,292	0,283	0,233	0,160	0,084	0,024
		v_k	0,001	0,007	0,018	0,036	0,063	0,092	0,110	0,109	0,075

Scanned with OKEN Scanner

DREPTE

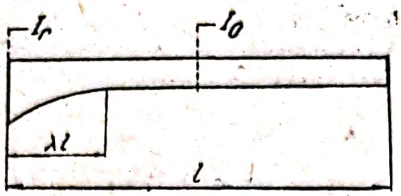
concentrate, pentru bare încastrate la ambele capete



$$\overline{Mj} = +v_j P_l$$
$$\overline{Mk} = -v_k P_l$$

λ	n	$\frac{a}{l}$		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,35	1,00	v_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		v_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	v_j	0,087	0,153	0,168	0,177	0,156	0,121	0,080	0,041	0,012
		v_k	0,007	0,023	0,053	0,081	0,120	0,134	0,140	0,124	0,080
	0,20	v_j	0,091	0,163	0,206	0,220	0,200	0,158	0,108	0,057	0,016
		v_k	0,004	0,015	0,036	0,063	0,094	0,118	0,130	0,116	0,078
	0,10	v_j	0,093	0,173	0,230	0,253	0,239	0,190	0,129	0,067	0,020
		v_k	0,001	0,009	0,024	0,049	0,079	0,106	0,121	0,111	0,077
	0,05	v_j	0,095	0,182	0,249	0,283	0,268	0,217	0,148	0,076	0,024
		v_k	0,002	0,005	0,016	0,037	0,067	0,096	0,114	0,110	0,076
0,30	1,00	v_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		v_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	v_j	0,086	0,148	0,173	0,175	0,154	0,119	0,080	0,040	0,011
		v_k	0,007	0,022	0,051	0,081	0,112	0,134	0,139	0,125	0,080
	0,20	v_j	0,092	0,165	0,210	0,218	0,203	0,154	0,103	0,053	0,015
		v_k	0,004	0,015	0,035	0,064	0,092	0,120	0,131	0,119	0,079
	0,10	v_j	0,096	0,176	0,233	0,247	0,224	0,177	0,119	0,061	0,017
		v_k	0,002	0,010	0,026	0,053	0,084	0,103	0,124	0,116	0,078
	0,05	v_j	0,098	0,185	0,252	0,272	0,251	0,199	0,134	0,069	0,020
		v_k	0,001	0,006	0,018	0,043	0,073	0,102	0,118	0,113	0,077
0,25	1,00	v_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		v_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	v_j	0,086	0,146	0,172	0,174	0,152	0,119	0,078	0,039	0,012
		v_k	0,007	0,024	0,052	0,082	0,113	0,134	0,140	0,124	0,080
	0,20	v_j	0,093	0,163	0,204	0,210	0,187	0,146	0,097	0,056	0,014
		v_k	0,004	0,014	0,038	0,067	0,098	0,123	0,132	0,121	0,078
	0,10	v_j	0,096	0,173	0,224	0,233	0,208	0,164	0,109	0,056	0,016
		v_k	0,001	0,009	0,029	0,057	0,089	0,113	0,125	0,118	0,075
	0,05	v_j	0,101	0,183	0,242	0,252	0,232	0,179	0,121	0,063	0,018
		v_k	0,001	0,004	0,021	0,047	0,079	0,108	0,122	0,115	0,077
0,20	1,00	v_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		v_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	v_j	0,087	0,149	0,171	0,171	0,149	0,114	0,075	0,039	0,011
		v_k	0,006	0,022	0,052	0,084	0,114	0,136	0,141	0,125	0,080
	0,20	v_j	0,093	0,164	0,198	0,200	0,176	0,136	0,090	0,046	0,013
		v_k	0,003	0,016	0,040	0,071	0,102	0,126	0,135	0,122	0,080
	0,10	v_j	0,096	0,175	0,215	0,218	0,193	0,150	0,100	0,051	0,015
		v_k	0,002	0,011	0,033	0,063	0,095	0,120	0,131	0,120	0,079
	0,05	v_j	0,098	0,183	0,229	0,234	0,208	0,162	0,108	0,055	0,016
		v_k	0,001	0,007	0,027	0,056	0,089	0,115	0,128	0,118	0,078

Scanned with OKEN Scanner



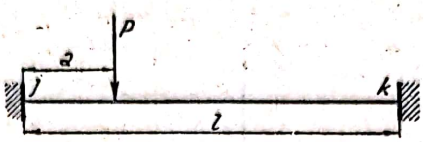
$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,00	1,00	w_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_j	0,082	0,139	0,164	0,167	0,150	0,118	0,078	0,044	0,011
		w_k	0,009	0,027	0,052	0,079	0,108	0,130	0,138	0,121	0,081
	0,20	w_j	0,089	0,154	0,192	0,205	0,192	0,159	0,111	0,060	0,017
		w_k	0,004	0,016	0,035	0,059	0,085	0,107	0,120	0,113	0,077
	0,10	w_j	0,091	0,161	0,207	0,229	0,224	0,193	0,138	0,076	0,023
		w_k	0,003	0,012	0,026	0,046	0,069	0,092	0,108	0,105	0,072
	0,05	w_j	0,092	0,168	0,225	0,256	0,258	0,228	0,173	0,097	0,033
		w_k	0,003	0,009	0,019	0,035	0,055	0,077	0,094	0,097	0,069
0,75	1,00	w_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_j	0,087	0,142	0,169	0,171	0,152	0,120	0,080	0,041	0,011
		w_k	0,006	0,025	0,051	0,082	0,110	0,132	0,139	0,124	0,080
	0,20	w_j	0,090	0,157	0,198	0,211	0,198	0,161	0,111	0,058	0,017
		w_k	0,004	0,016	0,036	0,062	0,090	0,114	0,126	0,117	0,078
	0,10	w_j	0,092	0,168	0,219	0,242	0,234	0,196	0,145	0,074	0,021
		w_k	0,003	0,011	0,026	0,048	0,075	0,099	0,109	0,112	0,077
	0,05	w_j	0,095	0,176	0,238	0,272	0,272	0,236	0,169	0,093	0,026
		w_k	0,001	0,008	0,019	0,037	0,061	0,087	0,107	0,106	0,074
0,50	1,00	w_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_j	0,087	0,146	0,174	0,175	0,207	0,121	0,080	0,043	0,014
		w_k	0,006	0,024	0,051	0,082	0,112	0,133	0,140	0,124	0,079
	0,20	w_j	0,091	0,161	0,203	0,214	0,195	0,154	0,104	0,054	0,015
		w_k	0,004	0,016	0,037	0,065	0,095	0,120	0,130	0,119	0,079
	0,10	w_j	0,094	0,172	0,225	0,245	0,228	0,183	0,123	0,064	0,018
		w_k	0,003	0,011	0,028	0,053	0,083	0,109	0,123	0,115	0,069
	0,05	w_j	0,097	0,181	0,244	0,274	0,262	0,213	0,145	0,077	0,022
		w_k	0,001	0,008	0,020	0,042	0,070	0,098	0,115	0,111	0,076
0,40	1,00	w_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
		w_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
	0,50	w_j	0,087	0,142	0,170	0,172	0,151	0,117	0,078	0,040	0,012
		w_k	0,006	0,026	0,052	0,083	0,114	0,135	0,142	0,125	0,079
	0,20	w_j	0,092	0,162	0,202	0,209	0,188	0,147	0,098	0,051	0,014
		w_k	0,003	0,016	0,038	0,067	0,098	0,123	0,132	0,120	0,079
	0,10	w_j	0,095	0,173	0,223	0,237	0,215	0,170	0,114	0,058	0,017
		w_k	0,002	0,011	0,029	0,056	0,087	0,114	0,126	0,117	0,078
	0,05	w_j	0,097	0,181	0,242	0,262	0,241	0,192	0,129	0,067	0,019
		w_k	0,002	0,008	0,022	0,047	0,077	0,105	0,120	0,114	0,078

Scanned with OKEN Scanner

PARABOLICE

concentrate, pentru bare încastrate la ambele capete



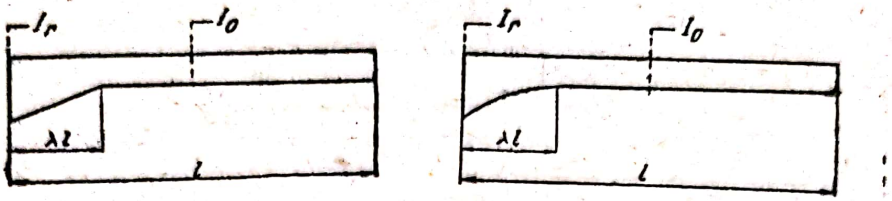
$$\overline{M}_j = + w_j Pl$$

$$\overline{M}_k = - w_k Pl$$

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
		w_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
	1,00	w_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
		w_j	0,086	0,142	0,171	0,176	0,150	0,116	0,076	0,039	0,010
	0,50	w_k	0,008	0,026	0,051	0,076	0,114	0,135	0,142	0,125	0,081
		w_j	0,092	0,163	0,198	0,206	0,182	0,143	0,094	0,049	0,016
0,35	0,20	w_k	0,004	0,016	0,039	0,069	0,101	0,124	0,134	0,119	0,077
		w_j	0,096	0,170	0,215	0,228	0,207	0,162	0,107	0,057	0,017
	0,10	w_k	0,002	0,012	0,032	0,061	0,090	0,116	0,129	0,117	0,076
		w_j	0,097	0,179	0,234	0,253	0,230	0,181	0,122	0,062	0,020
	0,05	w_k	0,002	0,008	0,024	0,050	0,081	0,108	0,123	0,113	0,078
		w_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
	1,00	w_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
		w_j	0,087	0,142	0,170	0,169	0,148	0,113	0,075	0,040	0,011
	0,50	w_k	0,007	0,027	0,052	0,084	0,115	0,137	0,142	0,125	0,080
		w_j	0,092	0,161	0,198	0,199	0,176	0,137	0,091	0,046	0,013
0,30	0,20	w_k	0,003	0,017	0,040	0,072	0,103	0,126	0,135	0,122	0,080
		w_j	0,096	0,172	0,216	0,221	0,197	0,154	0,102	0,052	0,015
	0,10	w_k	0,002	0,012	0,032	0,062	0,094	0,119	0,130	0,119	0,078
		w_j	0,097	0,129	0,231	0,340	0,215	0,161	0,112	0,058	0,016
	0,05	w_k	0,001	0,008	0,026	0,055	0,087	0,113	0,127	0,187	0,078
		w_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
	1,00	w_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
		w_j	0,087	0,144	0,168	0,166	0,145	0,110	0,074	0,039	0,011
	0,50	w_k	0,007	0,025	0,054	0,086	0,116	0,138	0,143	0,125	0,080
		w_j	0,093	0,159	0,192	0,192	0,169	0,130	0,086	0,044	0,013
0,25	0,20	w_k	0,003	0,017	0,042	0,074	0,106	0,129	0,134	0,120	0,079
		w_j	0,094	0,166	0,204	0,208	0,185	0,143	0,096	0,049	0,013
	0,10	w_k	0,001	0,012	0,035	0,065	0,100	0,123	0,132	0,120	0,079
		w_j	0,096	0,174	0,220	0,227	0,200	0,156	0,104	0,055	0,015
	0,05	w_k	0,002	0,011	0,029	0,059	0,092	0,118	0,129	0,118	0,078
		w_j	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009
	1,00	w_k	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081
		w_j	0,088	0,143	0,167	0,163	0,143	0,109	0,073	0,037	0,011
	0,50	w_k	0,005	0,025	0,054	0,087	0,117	0,138	0,143	0,126	0,080
		w_j	0,092	0,157	0,186	0,184	0,161	0,125	0,082	0,042	0,012
0,20	0,20	w_k	0,004	0,019	0,045	0,078	0,109	0,131	0,139	0,124	0,080
		w_j	0,095	0,166	0,198	0,198	0,174	0,134	0,089	0,045	0,013
	0,10	w_k	0,003	0,014	0,040	0,072	0,103	0,127	0,135	0,122	0,079
		w_j	0,096	0,113	0,209	0,210	0,185	0,143	0,094	0,048	0,014
	0,05	w_k	0,002	0,011	0,035	0,066	0,098	0,123	0,133	0,121	0,079

Scanned with OKEN Scanner

Momente de încastrare, perfectă din sarcini concentrate, pentru



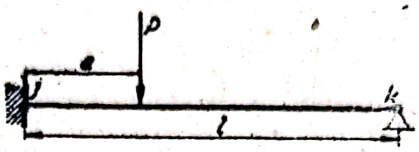
$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,00	1,00	v	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
		w	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
	0,50	v	0,093	0,154	0,196	0,202	0,215	0,196	0,161	0,117	0,059
		w	0,087	0,153	0,195	0,216	0,216	0,197	0,162	0,119	0,060
	0,20	v	0,091	0,159	0,206	0,233	0,239	0,224	0,190	0,140	0,074
		w	0,092	0,166	0,220	0,252	0,259	0,245	0,206	0,150	0,078
	0,10	v	0,093	0,164	0,218	0,250	0,260	0,248	0,213	0,161	0,086
		w	0,094	0,173	0,235	0,278	0,292	0,281	0,242	0,178	0,095
	0,05	v	0,095	0,171	0,231	0,265	0,282	0,276	0,246	0,187	0,100
		w	0,095	0,179	0,247	0,297	0,323	0,318	0,282	0,211	0,113
0,75	1,00	v	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
		w	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
	0,50	v	0,091	0,158	0,198	0,218	0,218	0,200	0,166	0,119	0,061
		w	0,091	0,157	0,200	0,221	0,221	0,201	0,166	0,118	0,061
	0,20	v	0,091	0,164	0,217	0,250	0,260	0,249	0,214	0,157	0,083
		w	0,093	0,170	0,227	0,260	0,270	0,253	0,212	0,152	0,079
	0,10	v	0,093	0,172	0,233	0,275	0,298	0,291	0,258	0,194	0,103
		w	0,095	0,178	0,244	0,289	0,307	0,293	0,250	0,182	0,095
	0,05	v	0,096	0,178	0,248	0,299	0,234	0,337	0,309	0,240	0,130
		w	0,097	0,185	0,259	0,314	0,342	0,335	0,291	0,214	0,112
0,50	1,00	v	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
		w	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
	0,50	v	0,090	0,160	0,203	0,225	0,225	0,205	0,168	0,120	0,062
		w	0,091	0,161	0,204	0,225	0,223	0,202	0,165	0,118	0,061
	0,20	v	0,093	0,171	0,232	0,270	0,283	0,265	0,224	0,159	0,082
		w	0,094	0,173	0,231	0,263	0,266	0,244	0,201	0,143	0,074
	0,10	v	0,096	0,180	0,250	0,302	0,326	0,311	0,263	0,190	0,099
		w	0,096	0,181	0,249	0,290	0,299	0,277	0,229	0,163	0,085
	0,05	v	0,098	0,187	0,266	0,330	0,366	0,356	0,304	0,221	0,116
		w	0,098	0,188	0,263	0,315	0,329	0,308	0,257	0,184	0,094
0,40	1,00	v	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
		w	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
	0,50	v	0,092	0,160	0,202	0,227	0,226	0,204	0,166	0,119	0,062
		w	0,090	0,158	0,200	0,221	0,218	0,196	0,160	0,113	0,059
	0,20	v	0,094	0,174	0,235	0,272	0,278	0,257	0,212	0,151	0,078
		w	0,095	0,174	0,230	0,258	0,258	0,234	0,192	0,136	0,070
	0,10	v	0,096	0,182	0,255	0,304	0,316	0,294	0,245	0,175	0,091
		w	0,097	0,181	0,246	0,281	0,284	0,259	0,213	0,151	0,076
	0,05	v	0,099	0,189	0,270	0,330	0,349	0,328	0,275	0,196	0,105
		w	0,097	0,189	0,261	0,303	0,310	0,285	0,236	0,167	0,086

Scanned with OKEN Scanner

DREPTE ŞI PARABOLICE

bare încastrate la un capăt şi articulate la celălalt capăt



Vute drepte $\overline{M_j} = + vPl$

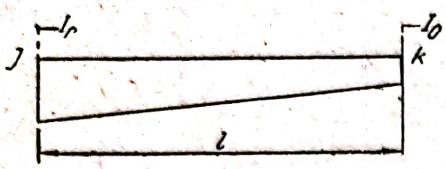
Vute parabolice $\overline{M_j} = + wPl$

λ	n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,35	1,00	v	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,135	0,096	0,050
		w	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,135	0,096	0,050
	0,50	v	0,091	0,162	0,201	0,227	0,225	0,202	0,166	0,117	0,061
		w	0,090	0,158	0,201	0,220	0,216	0,195	0,159	0,112	0,057
	0,20	v	0,095	0,175	0,236	0,269	0,272	0,249	0,205	0,145	0,076
		w	0,094	0,173	0,228	0,253	0,251	0,228	0,186	0,132	0,068
	0,10	v	0,099	0,186	0,257	0,299	0,307	0,283	0,234	0,167	0,087
		w	0,098	0,182	0,244	0,276	0,276	0,251	0,205	0,146	0,070
	0,05	v	0,100	0,192	0,272	0,323	0,334	0,310	0,258	0,184	0,096
		w	0,098	0,188	0,257	0,294	0,297	0,271	0,223	0,157	0,081
0,30	1,00	v	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
		w	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
	0,50	v	0,090	0,161	0,204	0,224	0,222	0,199	0,164	0,115	0,060
		w	0,091	0,157	0,200	0,218	0,213	0,191	0,156	0,111	0,057
	0,20	v	0,094	0,175	0,235	0,265	0,265	0,241	0,198	0,140	0,072
		w	0,095	0,172	0,224	0,247	0,244	0,221	0,180	0,127	0,066
	0,10	v	0,097	0,184	0,254	0,290	0,293	0,268	0,220	0,156	0,081
		w	0,097	0,181	0,239	0,266	0,264	0,240	0,196	0,139	0,072
	0,05	v	0,098	0,190	0,268	0,310	0,316	0,290	0,247	0,170	0,088
		w	0,098	0,187	0,251	0,282	0,282	0,256	0,210	0,149	0,077
0,25	1,00	v	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
		w	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
	0,50	v	0,090	0,160	0,202	0,222	0,218	0,197	0,160	0,112	0,059
		w	0,091	0,158	0,198	0,215	0,211	0,188	0,154	0,109	0,056
	0,20	v	0,096	0,178	0,231	0,257	0,256	0,231	0,189	0,133	0,069
		w	0,095	0,170	0,219	0,240	0,236	0,212	0,173	0,122	0,064
	0,10	v	0,099	0,185	0,246	0,277	0,277	0,252	0,205	0,146	0,075
		w	0,098	0,179	0,232	0,256	0,253	0,228	0,187	0,132	0,068
	0,05	v	0,101	0,192	0,260	0,296	0,298	0,271	0,222	0,158	0,082
		w	0,100	0,186	0,244	0,270	0,267	0,241	0,198	0,141	0,072
0,20	1,00	v	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
		w	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050
	0,50	v	0,091	0,162	0,201	0,219	0,215	0,192	0,157	0,111	0,057
		w	0,092	0,157	0,197	0,212	0,207	0,185	0,152	0,107	0,055
	0,20	v	0,095	0,174	0,225	0,247	0,243	0,219	0,179	0,126	0,065
		w	0,095	0,168	0,213	0,232	0,228	0,205	0,167	0,117	0,061
	0,10	v	0,097	0,182	0,239	0,264	0,260	0,236	0,193	0,136	0,071
		w	0,096	0,175	0,224	0,244	0,241	0,216	0,177	0,125	0,064
	0,05	v	0,098	0,189	0,249	0,277	0,274	0,248	0,203	0,144	0,074
		w	0,098	0,181	0,233	0,255	0,252	0,227	0,185	0,130	0,067

Scanned with OKEN Scanner

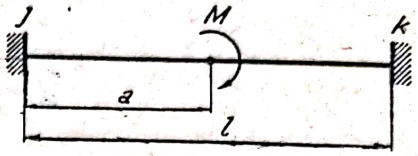
BARE CU SECȚIUNE VARIABILĂ LINIAR

Momente de încastrare perfectă dintr-un moment exterior concentrat, pentru bare încastrate la ambele capete



$$n = \frac{I_0}{I_r}$$

$$\overline{M_j} = + vM$$
$$\overline{M_k} = - wM$$

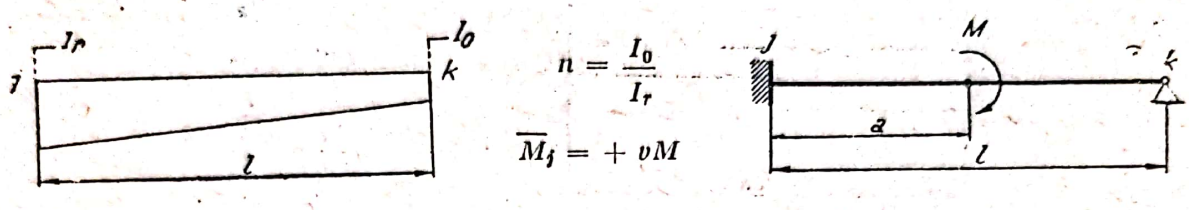


n	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,05	v	−1,340	−0,508	−0,095	+0,272	+0,450	+0,566	+0,536	+0,559	+0,515
	w	+0,198	+0,022	−0,051	−0,096	−0,103	−0,103	−0,066	−0,005	+0,014
0,10	v	−1,350	−0,562	−0,096	+0,246	+0,445	+0,562	+0,615	+0,625	+0,565
	w	+0,188	+0,011	−0,086	−0,128	−0,135	−0,117	−0,078	−0,029	+0,039
0,20	v	−1,260	−0,566	−0,097	+0,215	+0,408	+0,530	+0,575	+0,575	+0,530
	w	+0,159	−0,032	−0,132	−0,169	−0,162	−0,125	−0,053	+0,028	+0,145
0,30	v	−1,110	−0,535	−0,103	+0,188	+0,378	+0,490	+0,530	+0,524	+0,475
	w	+0,071	−0,086	−0,180	−0,206	−0,185	−0,124	−0,029	+0,089	+0,218
0,40	v	−1,020	−0,492	−0,106	+0,167	+0,352	+0,425	+0,493	+0,472	+0,415
	w	+0,035	−0,130	−0,210	−0,230	−0,198	−0,119	−0,009	+0,137	+0,296
0,50	v	−0,924	−0,452	−0,099	+0,161	+0,326	+0,425	+0,452	+0,422	+0,375
	w	−0,006	−0,157	−0,234	−0,248	−0,209	−0,124	+0,008	+0,176	+0,385
0,60	v	−0,840	−0,420	−0,090	+0,146	+0,302	+0,386	+0,412	+0,374	+0,325
	w	−0,057	−0,196	−0,263	−0,272	−0,224	−0,122	+0,025	+0,216	+0,434
0,70	v	−0,777	−0,390	−0,087	+0,137	+0,285	+0,375	+0,390	+0,358	+0,276
	w	−0,091	−0,222	−0,283	−0,283	−0,230	−0,120	+0,034	+0,240	+0,480
0,80	v	−0,720	−0,354	−0,076	+0,131	+0,271	+0,352	+0,370	+0,327	+0,234
	w	−0,118	−0,244	−0,302	−0,295	−0,233	−0,121	+0,048	+0,266	+0,524
0,90	v	−0,666	−0,333	−0,071	+0,126	+0,254	+0,337	+0,350	+0,308	+0,205
	w	−0,152	−0,270	−0,320	−0,312	−0,236	−0,122	+0,059	+0,295	+0,575
1,00	v	−0,630	−0,320	−0,070	+0,120	+0,250	+0,320	+0,330	+0,280	+0,170
	w	−0,170	−0,280	−0,330	−0,320	−0,250	−0,120	+0,070	+0,320	+0,632

Scanned with OKEN Scanner

BARE CU SECȚIUNE VARIABILĂ LINIAR

Momente de încastrare perfectă dintr-un moment exterior concentrat, pentru bare încastrate la un capăt și articulate la celălalt capăt



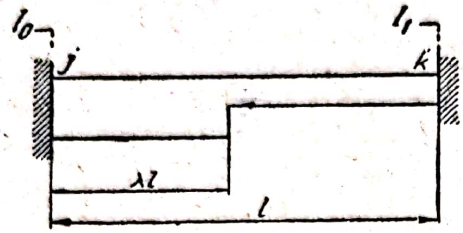
Valorile v

n \ $\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,05	+0,126	+0,094	+0,061	+0,028	−0,003	−0,036	−0,066	−0,095	−0,122
0,10	+0,200	+0,146	+0,093	+0,040	−0,010	−0,059	−0,106	−0,148	−0,184
0,20	+0,308	+0,221	+0,136	+0,053	−0,025	−0,099	−0,165	−0,222	−0,264
0,30	+0,382	+0,273	+0,162	+0,054	−0,043	−0,134	−0,213	−0,275	−0,321
0,40	+0,450	+0,316	+0,182	+0,058	−0,056	−0,158	−0,245	−0,318	−0,360
0,50	+0,515	+0,350	+0,197	+0,055	−0,069	−0,180	−0,277	−0,343	−0,396
0,60	+0,564	+0,384	+0,210	+0,053	−0,086	−0,206	−0,303	−0,378	−0,420
0,70	+0,601	+0,402	+0,218	+0,050	−0,096	−0,218	−0,320	−0,394	−0,440
0,80	+0,640	+0,423	+0,223	+0,045	−0,106	−0,235	−0,338	−0,412	−0,458
0,90	+0,678	+0,440	+0,228	+0,041	−0,113	−0,250	−0,356	−0,412	−0,474
1,00	+0,715	+0,460	+0,235	+0,040	−0,125	−0,260	−0,365	−0,440	−0,485

Scanned with OKEN Scanner

BARE CU SECȚIUNE VARIABILĂ DISCONTINUU

Rigidități



$$n = \frac{I_1}{I_0}$$

$$\rho_{jk}^{(j)} = v\,\frac{I_0}{l}$$

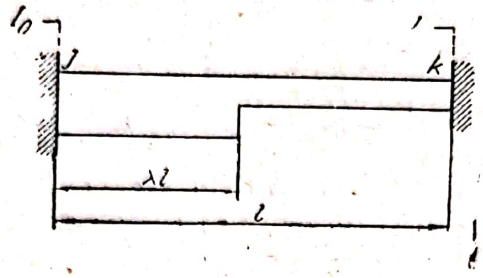
$$\rho_{jk}^{(k)} = w\,\frac{I_0}{l}$$

n	v					w				
	$\lambda = 0{,}9$	0,8	0,7	0,6	0,5			0,7	0,6	0,5
0,02	0,789	0,736	0,572	0,371	0,219	0,058	0,044	0,040	0,038	0,036
0,04	0,805	0,788	0,696	0,532	0,361	0,110	0,074	0,069	0,068	0,066
0,06	0,817	0,811	0,752	0,622	0,460	0,159	0,106	0,095	0,093	0,092
0,08	0,828	0,825	0,785	0,682	0,533	0,204	0,136	0,120	0,118	0,117
0,10	0,837	0,835	0,807	0,723	0,589	0,246	0,166	0,145	0,142	0,141
0,20	0,877	0,870	0,864	0,828	0,750	0,422	0,304	0,264	0,252	0,250
0,30	0,905	0,894	0,893	0,875	0,828	0,556	0,426	0,375	0,356	0,352
0,40	0,927	0,920	0,914	0,906	0,875	0,660	0,535	0,479	0,456	0,450
0,50	0,945	0,934	0,933	0,928	0,909	0,745	0,632	0,578	0,554	0,545
0,60	0,958	0,950	0,949	0,946	0,935	0,814	0,720	0,672	0,648	0,639
0,70	0,972	0,979	0,964	0,950	0,954	0,872	0,800	0,760	0,740	0,732
0,80	0,983	0,981	0,976	0,975	0,973	0,921	0,873	0,844	0,829	0,822
0,90	0,992	0,991	0,989	0,989	0,987	0,963	0,939	0,924	0,916	0,912
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Scanned with OKEN Scanner

BARE CU SECȚIUNE VARIABILĂ DISCONTINUU

Coeficienții de transmitere în metoda repartizării momentelor



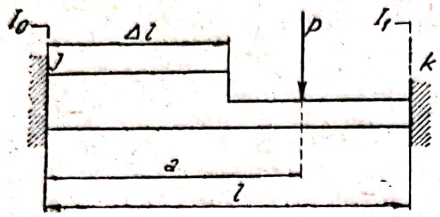
$$n = \frac{I_1}{I_0}$$

n	$t_j \rightarrow k$					$t_k \rightarrow j$				
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
0,02	0,082	0,122	0,175	0,231	0,291	1,129	2,188	2,494	2,199	1,783
0,04	0,111	0,138	0,184	0,238	0,295	0,816	1,456	1,865	1,864	1,630
0,06	0,136	0,152	0,194	0,245	0,300	0,708	1,168	1,542	1,620	1,489
0,08	0,148	0,165	0,204	0,252	0,305	0,652	1,004	1,333	1,458	1,383
0,10	0,181	0,180	0,213	0,259	0,310	0,621	0,904	1,185	1,323	1,294
0,20	0,266	0,240	0,257	0,291	0,333	0,553	0,687	0,841	0,959	1,000
0,30	0,325	0,290	0,297	0,322	0,356	0,532	0,610	0,708	0,792	0,839
0,40	0,370	0,338	0,334	0,351	0,378	0,521	0,571	0,636	0,698	0,737
0,50	0,404	0,371	0,367	0,379	0,400	0,514	0,548	0,592	0,635	0,667
0,60	0,429	0,403	0,398	0,405	0,421	0,509	0,532	0,562	0,592	0,616
0,70	0,453	0,453	0,427	0,432	0,441	0,506	0,531	0,543	0,560	0,576
0,80	0,470	0,457	0,453	0,455	0,461	0,504	0,512	0,524	0,536	0,545
0,90	0,487	0,480	0,477	0,477	0,481	0,502	0,505	0,511	0,516	0,521
1,00	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500

Scanned with OKEN Scanner

BARE CU SECȚIUNE VARIABILĂ DISCONTINUU

Momente de încastrare perfectă din sarcini concentrate



$$n = \frac{I_1}{I_0} \qquad \overline{M_j} = + vPl \qquad \overline{M_k} = - wPl$$

$\frac{a}{l}$	λ	0,9		0,8		0,7		0,6		0,5	
	n	v	w	v	w	v	w	v	w	v	w
0,1	0,02	0,085	0,001	0,086	0,002	0,089	0,002	0,093	0,002	0,096	0,002
	0,04	0,085	0,002	0,085	0,002	0,087	0,002	0,090	0,002	0,093	0,002
	0,06	0,084	0,002	0,084	0,002	0,086	0,003	0,088	0,003	0,091	0,003
	0,08	0,984	0,002	0,084	0,003	0,085	0,003	0,087	0,003	0,090	0,003
	0,10	0,084	0,003	0,084	0,003	0,085	0,003	0,086	0,004	0,089	0,004
	0,20	0,083	0,004	0,083	0,004	0,084	0,004	0,084	0,005	0,086	0,005
	0,30	0,083	0,005	0,083	0,005	0,083	0,005	0,083	0,005	0,084	0,006
	0,40	0,082	0,006	0,083	0,006	0,083	0,006	0,083	0,006	0,083	0,006
	0,50	0,082	0,007	0,082	0,006	0,082	0,006	0,082	0,006	0,083	0,007
	0,60	0,082	0,008	0,082	0,007	0,082	0,007	0,082	0,007	0,082	0,007
	0,70	0,082	0,008	0,082	0,008	0,082	0,008	0,082	0,008	0,082	0,008
	0,80	0,081	0,008	0,081	0,008	0,081	0,008	0,081	0,008	0,082	0.008
	0,90	0,081	0,009	0,081	0,009	0,081	0,009	0,081	0,009	0,081	0,009
	1,00	0,081	0,009	0,081	0,009	0,081	0,009	0,081	0,009	0,081	0,009
0,2	0,02	0,142	0,005	0,146	0,006	0,158	0,007	0,173	0,006	0,184	0,005
	0,04	0,141	0,006	0,142	0,008	0,149	0,009	0,161	0,009	0,174	0,008
	0,06	0,140	0,008	0,140	0,009	0,145	0,010	0,154	0,011	0,166	0,010
	0,08	0,139	0,009	0,138	0,010	0,143	0,011	0,150	0,012	0,161	0,012
	0,10	0,138	0,010	0,138	0,011	0,141	0,012	0,147	0,013	0,157	0,013
	0,20	0,136	0,015	0,136	0,014	0,137	0,015	0,139	0,017	0,145	0,017
	0,30	0,134	0,019	0,135	0,017	0,135	0,018	0,136	0,019	0,140	0,020
	0,40	0,133	0,022	0,133	0,020	0,133	0,020	0,134	0,021	0,136	0,022
	0,50	0,131	0,025	0,132	0,023	0,132	0,023	0,133	0,023	0,134	0,024
	0,60	0,131	0,027	0,131	0,025	0,131	0,025	0,131	0,025	0,132	0,026
	0,70	0,130	0,028	0,130	0,027	0,130	0,027	0,130	0,027	0,131	0,028
	0,80	0,129	0,030	0,129	0,029	0,130	0,029	0,130	0,029	0,130	0,029
	0,90	0,129	0,031	0,129	0,030	0,129	0,030	0,129	0,030	0,129	0,031
	1,00	0,128	0,032	0,128	0,032	0,128	0,032	0,128	0,032	0,128	0,032
0,3	0,02	0,174	0,010	0,183	0,014	0,209	0,016	0,242	0,013	0,334	0,010
	0,04	0,171	0,013	0,174	0,016	0,189	0,019	0,216	0,019	0,243	0,016
	0,06	0,169	0,015	0,170	0,018	0,181	0,022	0,202	0,023	0,228	0,021
	0,08	0,168	0,018	0,169	0,020	0,176	0,024	0,193	0,026	0,217	0,024
	0,10	0,167	0,020	0,167	0,021	0,172	0,025	0,186	0,028	0,208	0,027
	0,20	0,162	0,030	0,163	0,028	0,164	0,031	0,170	0,035	0,183	0,036
	0,30	0,159	0,035	0,160	0,034	0,160	0,036	0,163	0,039	0,171	0,041
	0,40	0,156	0,044	0,157	0,040	0,157	0,041	0,159	0,043	0,164	0,046
	0,50	0,154	0,049	0,155	0,045	0,155	0,045	0,156	0,047	0,159	0,049
	0,60	0,152	0,053	0,153	0,049	0,153	0,049	0,154	0,051	0,156	0,052
	0,70	0,150	0,056	0,151	0,053	0,151	0,053	0,152	0,054	0,153	0,055
	0,80	0,149	0,059	0,149	0,057	0,150	0,056	0,150	0,057	0,151	0,058
	0,90	0,148	0,061	0,148	0,060	0,148	0,060	0,148	0,060	0,149	0,061
	1,00	0,147	0,063	0,147	0,063	0,147	0,063	0,147	0,063	0,147	0,063

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 32 (continuare)

$\frac{a}{l}$	λ	0,9		0,8		0,7		0,6		0,5	
	n	v	w	v	w	v	w	v	w	v	w
0,4	0,02	0,184	0,016	0,200	0,023	0,245	0,026	0,301	0,022	0,342	0,016
	0,04	0,180	0,020	0,187	0,027	0,212	0,033	0,258	0,032	0,304	0,027
	0,06	0,179	0,025	0,180	0,030	0,199	0,037	0,232	0,038	0,278	0,034
	0,08	0,176	0,028	0,177	0,032	0,189	0,039	0,218	0,043	0,259	0,040
	0,10	0,174	0,032	0,175	0,035	0,184	0,042	0,207	0,046	0,244	0,045
	0,20	0,167	0,047	0,168	0,045	0,170	0,050	0,181	0,056	0,203	0,059
	0,30	0,162	0,058	0,164	0,054	0,164	0,058	0,169	0,063	0,183	0,067
	0,40	0,157	0,067	0,159	0,062	0,159	0,064	0,162	0,069	0,171	0,073
	0,50	0,154	0,074	0,156	0,069	0,156	0,070	0,158	0,074	0,163	0,078
	0,60	0,151	0,080	0,153	0,076	0,153	0,076	0,154	0,079	0,158	0,082
	0,70	0,149	0,085	0,150	0,081	0,150	0,081	0,151	0,083	0,153	0,086
	0,80	0,147	0,089	0,148	0,087	0,148	0,087	0,148	0,088	0,150	0,089
	0,90	0,146	0,093	0,146	0,092	0,146	0,091	0,146	0,092	0,147	0,093
	1,00	0,144	0,096	0,144	0,096	0,144	0,096	0,144	0,096	0,144	0,096
0,5	0,02	0,176	0,022	0,202	0,034	0,269	0,038	0,353	0,032	0,415	0,024
	0,04	0,171	0,028	0,181	0,039	0,221	0,048	0,289	0,047	0,359	0,039
	0,06	0,168	0,034	0,171	0,043	0,201	0,053	0,253	0,056	0,321	0,050
	0,08	0,165	0,039	0,167	0,046	0,181	0,057	0,231	0,062	0,291	0,057
	0,10	0,164	0,043	0,165	0,049	0,178	0,060	0,214	0,066	0,270	0,064
	0,20	0,154	0,062	0,155	0,062	0,159	0,071	0,175	0,080	0,208	0,083
	0,30	0,147	0,077	0,149	0,073	0,150	0,079	0,159	0,088	0,180	0,094
	0,40	0,142	0,088	0,144	0,083	0,144	0,087	0,149	0,095	0,163	0,101
	0,50	0,138	0,097	0,140	0,092	0,140	0,095	0,143	0,100	0,152	0,106
	0,60	0,134	0,105	0,136	0,100	0,136	0,101	0,138	0,106	0,144	0,111
	0,70	0,132	0,111	0,133	0,107	0,133	0,108	0,134	0,111	0,137	0,115
	0,80	0,129	0,116	0,130	0,114	0,130	0,114	0,130	0,116	0,132	0,118
	0,90	0,127	0,121	0,127	0,120	0,127	0,120	0,128	0,121	0,128	0,122
	0,00	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
0,6	0,02	0,156	0,030	0,190	0,046	0,284	0,052	0,400	0,044	0,415	0,042
	0,04	0,148	0,036	0,160	0,052	0,217	0,064	0,313	0,063	0,354	0,059
	0,06	0,144	0,042	0,147	0,056	0,188	0,070	0,262	0,074	0,314	0,071
	0,08	0,142	0,047	0,145	0,059	0,172	0,075	0,231	0,081	0,279	0,080
	0,10	0,139	0,053	0,141	0,062	0,160	0,078	0,210	0,087	0,255	0,087
	0,20	0,129	0,074	0,129	0,076	0,135	0,090	0,158	0,103	0,187	0,107
	0,30	0,121	0,090	0,122	0,088	0,124	0,099	0,136	0,111	0,155	0,117
	0,40	0,115	0,103	0,117	0,099	0,117	0,107	0,124	0,118	0,136	0,124
	0,50	0,110	0,113	0,112	0,108	0,112	0,114	0,116	0,123	0,124	0,129
	0,60	0,107	0,121	0,108	0,117	0,108	0,121	0,110	0,128	0,115	0,133
	0,70	0,103	0,129	0,105	0,125	0,105	0,127	0,106	0,132	0,109	0,136
	0,80	0,101	0,134	0,100	0,132	0,101	0,133	0,102	0,136	0,104	0,139
	0,90	0,098	0,140	0,099	0,138	0,099	0,139	0,099	0,140	0,100	0,142
	1,00	0,096	0,144	0,096	0,144	0,096	0,144	0,096	0,144	0,096	0,144
0,7	0,02	0,123	0,036	0,168	0,058	0,291	0,066	0,362	0,067	0,319	0,068
	0,04	0,114	0,042	0,134	0,064	0,207	0,081	0,277	0,082	0,268	0,083
	0,06	0,112	0,048	0,117	0,069	0,170	0,088	0,221	0,092	0,236	0,092
	0,08	0,109	0,054	0,112	0,072	0,146	0,093	0,192	0,100	0,210	0,100
	0,10	0,105	0,058	0,107	0,075	0,133	0,096	0,173	0,105	0,190	0,104
	0,20	0,095	0,079	0,094	0,087	0,102	0,106	0,121	0,118	0,135	0,120
	0,30	0,087	0,095	0,087	0,098	0,090	0,114	0,100	0,125	0,110	0,128
	0,40	0,082	0,107	0,082	0,107	0,082	0,120	0,088	0,130	0,095	0,133
	0,50	0,077	0,117	0,078	0,116	0,077	0,125	0,081	0,133	0,085	0,136
	0,60	0,073	0,125	0,074	0,123	0,073	0,130	0,075	0,137	0,078	0,139
	0,70	0,070	0,132	0,071	0,130	0,070	0,135	0,071	0,139	0,073	0,142
	0,80	0,067	0,138	0,068	0,136	0,068	0,139	0,068	0,142	0,069	0,144
	0,90	0,065	0,143	0,065	0,142	0,065	0,143	0,065	0,145	0,066	0,145
	1,00	0,063	0,147	0,063	0,147	0,063	0,147	0,063	0,147	0,063	0,147

Scanned with OKEN Scanner

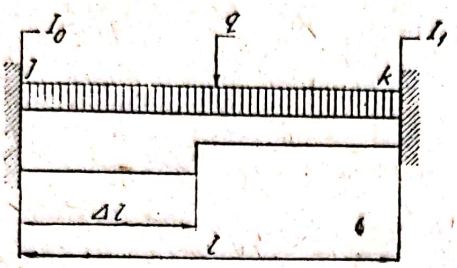
Tabela 32 (continuare)

$\frac{a}{l}$	λ	0,9		0,8		0,7		0,6		0,5	
	n	v	w	v	w	v	w	v	w	v	w
0,8	0,02	0,082	0,042	0,143	0,071	0,217	0,078	0,220	0,078	0,173	0,083
	0,04	0,081	0,046	0,095	0,076	0,147	0,089	0,166	0,090	0,149	0,094
	0,06	0,074	0,052	0,079	0,081	0,119	0,095	0,132	0,097	0,133	0,098
	0,08	0,069	0,055	0,069	0,082	0,093	0,100	0,110	0,102	0,115	0,102
	0,10	0,066	0,059	0,067	0,084	0,085	0,101	0,101	0,104	0,105	0,104
	0,20	0,057	0,075	0,055	0,092	0,060	0,108	0,068	0,113	0,073	0,113
	0,30	0,051	0,088	0,049	0,099	0,050	0,111	0,055	0,116	0,058	0,118
	0,40	0,047	0,097	0,045	0,104	0,045	0,115	0,047	0,119	0,050	0,121
	0,50	0,043	0,105	0,042	0,109	0,041	0,117	0,043	0,121	0,045	0,122
	0,60	0,040	0,111	0,039	0,114	0,039	0,120	0,039	0,123	0,041	0,124
	0,70	0,038	0,116	0,037	0,118	0,036	0,122	0,037	0,124	0,038	0,125
	0,80	0,035	0,121	0,035	0,122	0,035	0,124	0,035	0,126	0,035	0,126
	0,90	0,034	0,125	0,034	0,125	0,034	0,126	0,034	0,127	0,034	0,127
	1,00	0,032	0,128	0,032	0,128	0,032	0,128	0,032	0,128	0,032	0,128
0,9	0,02	0,038	0,046	0,066	0,064	0,075	0,065	0,076	0,066	0,048	0,068
	0,04	0,031	0,049	0,040	0,066	0,049	0,069	0,059	0,070	0,046	0,071
	0,06	0,028	0,051	0,028	0,067	0,039	0,071	0,036	0,072	0,042	0,072
	0,08	0,025	0,052	0,024	0,068	0,030	0,072	0,033	0,073	0,038	0,073
	0,10	0,024	0,054	0,023	0,069	0,028	0,073	0,031	0,074	0,034	0,074
	0,20	0,020	0,060	0,017	0,070	0,019	0,075	0,021	0,077	0,022	0,077
	0,30	0,017	0,065	0,015	0,073	0,015	0,076	0,016	0,078	0,017	0,078
	0,40	0,015	0,069	0,013	0,075	0,013	0,077	0,014	0,079	0,015	0,079
	0,50	0,014	0,072	0,012	0,076	0,012	0,078	0,012	0,079	0,013	0,079
	0,60	0,012	0,074	0,011	0,077	0,011	0,079	0,011	0,080	0,012	0,080
	0,70	0,011	0,076	0,011	0,078	0,010	0,079	0,011	0,080	0,011	0,080
	0,80	0,010	0,078	0,010	0,079	0,010	0,080	0,010	0,080	0,010	0,081
	0,90	0,010	0,080	0,010	0,080	0,009	0,081	0,009	0,081	0,010	0,081
	1,00	0,009	0,081	0,009	0,081	0,009	0,081	0,009	0,081	0,009	0,081

Scanned with OKEN Scanner

BARE CU SECȚIUNE VARIABILĂ DISCONTINUU

Momente de încastrare perfectă din sarcină uniform distribuită



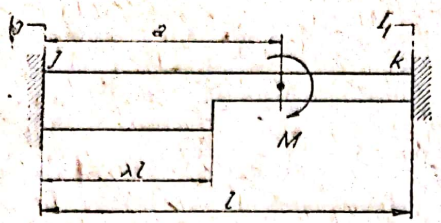
$$\overline{M}_j = + vql^2 \qquad \overline{M}_k = - wql^2 \qquad n = \frac{I_1}{I_0}$$

λ	0,9		0,8		0,7		0,6		0,5	
n	v	w	v	w	v	w	v	w	v	w
0,02	0,116	0,021	0,140	0,032	0,186	0,036	0,223	0,034	0,228	0,033
0,04	0,112	0,025	0,122	0,036	0,149	0,042	0,182	0,042	0,201	0,040
0,06	0,110	0,028	0,114	0,038	0,134	0,046	0,159	0,047	0,180	0,045
0,08	0,108	0,031	0,110	0,040	0,127	0,048	0,146	0,851	0,168	0,049
0,10	0,107	0,034	0,108	0,042	0,117	0,050	0,137	0,054	0,156	0,053
0,20	0,101	0,046	0,101	0,049	0,104	0,056	0,113	0,061	0,125	0,063
0,30	0,097	0,054	0,097	0,055	0,098	0,060	0,103	0,065	0,111	0,068
0,40	0,094	0,061	0,094	0,060	0,094	0,064	0,097	0,069	0,102	0,071
0,50	0,091	0,067	0,092	0,065	0,092	0,068	0,093	0,072	0,097	0,074
0,60	0,089	0,071	0,090	0,070	0,090	0,072	0,090	0,074	0,093	0,076
0,70	0,087	0,075	0,088	0,074	0,088	0,075	0,088	0,077	0,090	0,078
0,80	0,086	0,078	0,086	0,077	0,086	0,078	0,086	0,079	0,087	0,080
0,90	0,084	0,081	0,085	0,080	0,085	0,081	0,085	0,081	0,085	0,082
1,00	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083

Scanned with OKEN Scanner

BARE CU SECȚIUNE VARIABILĂ DISCONTINUU

Momente de încastrare perfectă din momente concentrate



$$n = \frac{I_1}{I_0}$$

$$\overline{M}_j = + vM$$

$$\overline{M}_k = - wM$$

$\frac{a}{l}$	λ / n	0,9		0,8		0,7		0,6		0,5	
		v	w	v	w	v	w	v	w	v	w
0,1	0,02	− 0,702	− 0,024	− 0,723	− 0,034	− 0,784	− 0,037	− 0,861	− 0,032	− 0,917	− 0,023
	0,04	− 0,695	− 0,032	− 0,703	− 0,040	− 0,738	− 0,047	− 0,801	− 0,047	− 0,864	− 0,039
	0,06	− 0,692	− 0,040	− 0,694	− 0,045	− 0,718	− 0,054	− 0,765	− 0,056	− 0,829	− 0,051
	0,08	− 0,687	− 0,046	− 0,688	− 0,049	− 0,706	− 0,058	− 0,745	− 0,063	− 0,800	− 0,059
	0,10	− 0,685	− 0,053	− 0,686	− 0,054	− 0,697	− 0,062	− 0,729	− 0,068	− 0,780	− 0,067
	0,20	− 0,672	− 0,080	− 0,674	− 0,073	− 0,676	− 0,079	− 0,690	− 0,087	− 0,720	− 0,090
	0,30	− 0,662	− 0,101	− 0,665	− 0,090	− 0,666	− 0,093	− 0,673	− 0,100	− 0,691	− 0,105
	0,40	− 0,654	− 0,117	− 0,658	− 0,105	− 0,658	− 0,106	− 0,662	− 0,112	− 0,674	− 0,117
	0,50	− 0,648	− 0,130	− 0,652	− 0,119	− 0,652	− 0,119	− 0,654	− 0,123	− 0,662	− 0,127
	0,60	− 0,643	− 0,141	− 0,647	− 0,131	− 0,647	− 0,130	− 0,648	− 0,133	− 0,653	− 0,137
	0,70	− 0,639	− 0,150	− 0,642	− 0,142	− 0,642	− 0,141	− 0,643	− 0,143	− 0,646	− 0,146
	0,80	− 0,636	− 0,158	− 0,638	− 0,152	− 0,638	− 0,151	− 0,638	− 0,152	− 0,640	− 0,154
	0,90	− 0,633	− 0,164	− 0,634	− 0,162	− 0,634	− 0,161	− 0,634	− 0,161	− 0,635	− 0,162
	1,00	− 0,630	− 0,170	− 0,630	− 0,170	− 0,630	− 0,170	− 0,630	− 0,170	− 0,630	− 0,170
0,2	0,02	− 0,437	− 0,043	− 0,480	− 0,062	− 0,596	− 0,069	− 0,741	− 0,059	− 0,848	− 0,043
	0,04	− 0,427	− 0,056	− 0,442	− 0,072	− 0,510	− 0,087	− 0,628	− 0,086	− 0,747	− 0,072
	0,06	− 0,420	− 0,068	− 0,425	− 0,080	− 0,472	− 0,097	− 0,564	− 0,102	− 0,680	− 0,092
	0,08	− 0,415	− 0,079	− 0,416	− 0,088	− 0,450	− 0,106	− 0,522	− 0,115	− 0,630	− 0,108
	0,10	− 0,409	− 0,090	− 0,411	− 0,095	− 0,433	− 0,112	− 0,494	− 0,123	− 0,590	− 0,120
	0,20	− 0,388	− 0,135	− 0,390	− 0,126	− 0,396	− 0,139	− 0,423	− 0,154	− 0,480	− 0,160
	0,30	− 0,372	− 0,168	− 0,377	− 0,153	− 0,378	− 0,161	− 0,392	− 0,175	− 0,427	− 0,184
	0,40	− 0,360	− 0,195	− 0,365	− 0,177	− 0,366	− 0,181	− 0,373	− 0,193	− 0,396	− 0,203
	0,50	− 0,350	− 0,216	− 0,355	− 0,199	− 0,356	− 0,200	− 0,360	− 0,209	− 0,375	− 0,218
	0,60	− 0,342	− 0,233	− 0,347	− 0,218	− 0,347	− 0,218	− 0,349	− 0,224	− 0,359	− 0,232
	0,70	− 0,335	− 0,248	− 0,339	− 0,236	− 0,339	− 0,235	− 0,341	− 0,239	− 0,346	− 0,245
	0,80	− 0,329	− 0,260	− 0,332	− 0,252	− 0,332	− 0,251	− 0,333	− 0,253	− 0,336	− 0,247
	0,90	− 0,324	− 0,271	− 0,326	− 0,267	− 0,326	− 0,266	− 0,326	− 0,267	− 0,328	− 0,269
	1,00	− 0,320	− 0,280	− 0,320	− 0,280	− 0,320	− 0,280	− 0,320	− 0,280	− 0,320	− 0,280
0,3	0,02	− 0,207	− 0,056	− 0,268	− 0,084	− 0,433	− 0,095	− 0,638	− 0,080	− 0,788	− 0,059
	0,04	− 0,195	− 0,072	− 0,216	− 0,097	− 0,313	− 0,118	− 0,481	− 0,117	− 0,651	− 0,097
	0,06	− 0,186	− 0,086	− 0,194	− 0,107	− 0,261	− 0,132	− 0,392	− 0,138	− 0,556	− 0,124
	0,08	− 0,180	− 0,099	− 0,183	− 0,115	− 0,230	− 0,142	− 0,335	− 0,154	− 0,486	− 0,145
	0,10	− 0,173	− 0,111	− 0,175	− 0,123	− 0,208	− 0,149	− 0,296	− 0,165	− 0,432	− 0,161
	0,20	− 0,148	− 0,163	− 0,150	− 0,158	− 0,159	− 0,179	− 0,199	− 0,201	− 0,280	− 0,210
	0,30	− 0,130	− 0,201	− 0,134	− 0,188	− 0,137	− 0,203	− 0,157	− 0,224	− 0,209	− 0,238
	0,40	− 0,116	− 0,232	− 0,121	− 0,215	− 0,122	− 0,225	− 0,133	− 0,248	− 0,166	− 0,257
	0,50	− 0,104	− 0,256	− 0,110	− 0,240	− 0,110	− 0,245	− 0,116	− 0,259	− 0,138	− 0,273
	0,60	− 0,095	− 0,276	− 0,100	− 0,261	− 0,100	− 0,264	− 0,104	− 0,275	− 0,118	− 0,286
	0,70	− 0,087	− 0,293	− 0,092	− 0,281	− 0,092	− 0,282	− 0,093	− 0,290	− 0,102	− 0,298
	0,80	− 0,081	− 0,307	− 0,084	− 0,299	− 0,081	− 0,299	− 0,085	− 0,304	− 0,089	− 0,310
	0,90	− 0,075	− 0,319	− 0,077	− 0,315	− 0,077	− 0,315	− 0,077	− 0,317	− 0,079	− 0,320
	1,00	− 0,070	− 0,330	− 0,070	− 0,330	− 0,070	− 0,330	− 0,070	− 0,330	− 0,070	− 0,330

Tabela 34 (continuare)

$\frac{a}{l}$	n	0,9		0,8		0,7		0,6		0,5	
		v	w	v	w	v	w	v	w	v	w
	0,02	— 0,011	— 0,066	— 0,090	— 0,102	— 0,300	— 0,115	— 0,554	— 0,097	— 0,740	— 0,070
	0,04	— 0,002	— 0,080	— 0,027	— 0,114	— 0,150	— 0,142	— 0,361	— 0,140	— 0,541	— 0,116
	0,06	+ 0,011	— 0,093	0,000	— 0,124	— 0,086	— 0,156	— 0,251	— 0,165	— 0,455	— 0,147
	0,08	+ 0,017	— 0,105	+ 0,013	— 0,132	— 0,047	— 0,165	— 0,181	— 0,182	— 0,370	— 0,170
	0,10	+ 0,024	— 0,117	+ 0,021	— 0,139	— 0,022	— 0,174	— 0,134	— 0,194	— 0,304	— 0,189
	0,20	+ 0,047	— 0,164	+ 0,047	— 0,170	+ 0,034	— 0,110	— 0,017	— 0,228	— 0,120	— 0,240
0,1	0,30	+ 0,061	— 0,200	+ 0,062	— 0,196	+ 0,058	— 0,220	+ 0,031	— 0,247	— 0,035	— 0,265
	0,40	+ 0,077	— 0,229	+ 0,074	— 0,220	+ 0,073	— 0,237	+ 0,058	— 0,261	+ 0,015	— 0,280
	0,50	+ 0,088	— 0,251	+ 0,084	— 0,241	+ 0,085	— 0,253	+ 0,076	— 0,273	+ 0,047	— 0,291
	0,60	+ 0,097	— 0,270	+ 0,093	— 0,260	+ 0,094	— 0,268	+ 0,089	— 0,284	+ 0,070	— 0,299
	0,70	+ 0,104	— 0,285	+ 0,101	— 0,277	+ 0,101	— 0,282	+ 0,099	— 0,294	+ 0,087	— 0,306
	0,80	+ 0,110	— 0,299	+ 0,108	— 0,293	+ 0,108	— 0,290	+ 0,107	— 0,303	+ 0,101	— 0,311
	0,90	+ 0,115	— 0,310	+ 0,114	— 0,307	+ 0,114	— 0,308	+ 0,114	— 0,312	+ 0,111	— 0,316
	1,00	+ 0,120	— 0,320	+ 0,120	— 0,320	+ 0,120	— 0,320	+ 0,120	— 0,320	+ 0,120	— 0,320
	0,02	+ 0,152	— 0,066	+ 0,054	— 0,115	— 0,190	— 0,130	— 0,489	— 0,109	— 0,704	— 0,079
	0,04	+ 0,163	— 0,080	+ 0,127	— 0,125	— 0,022	— 0,158	— 0,267	— 0,156	— 0,512	— 0,128
	0,06	+ 0,171	— 0,089	+ 0,156	— 0,132	+ 0,051	— 0,172	— 0,142	— 0,182	— 0,379	— 0,162
	0,08	+ 0,175	— 0,098	+ 0,169	— 0,137	+ 0,093	— 0,180	— 0,063	— 0,199	— 0,283	— 0,185
	0,10	+ 0,181	— 0,106	+ 0,178	— 0,142	+ 0,124	— 0,185	— 0,009	— 0,210	— 0,208	— 0,203
0,5	0,20	+ 0,198	— 0,140	+ 0,201	— 0,161	+ 0,184	— 0,201	+ 0,122	— 0,236	0,000	— 0,250
	0,30	+ 0,210	— 0,165	+ 0,212	— 0,177	+ 0,207	— 0,400	+ 0,173	— 0,245	+ 0,095	— 0,267
	0,40	+ 0,220	— 0,185	+ 0,221	— 0,191	+ 0,220	— 0,218	+ 0,200	— 0,249	+ 0,148	— 0,272
	0,50	+ 0,227	— 0,201	+ 0,227	— 0,203	+ 0,228	— 0,224	+ 0,217	— 0,251	+ 0,182	— 0,273
	0,60	+ 0,233	— 0,215	+ 0,233	— 0,215	+ 0,235	— 0,230	+ 0,228	— 0,252	+ 0,205	— 0,271
	0,70	+ 0,239	— 0,226	+ 0,238	— 0,225	+ 0,239	— 0,236	+ 0,236	— 0,252	+ 0,221	— 0,267
	0,80	+ 0,243	— 0,235	+ 0,243	— 0,234	+ 0,244	— 0,241	+ 0,242	— 0,251	+ 0,234	— 0,262
	0,90	+ 0,247	— 0,243	+ 0,246	— 0,242	+ 0,247	— 0,246	+ 0,246	— 0,251	+ 0,243	— 0,256
	1,00	+ 0,250	— 0,250	+ 0,250	— 0,250	+ 0,250	— 0,250	+ 0,250	— 0,250	+ 0,250	— 0,250
	0,02	+ 0,280	— 0,068	+ 0,168	— 0,122	— 0,108	— 0,139	— 0,441	— 0,116	+ 0,575	— 0,260
	0,04	+ 0,291	— 0,071	+ 0,246	— 0,128	+ 0,076	— 0,105	— 0,200	— 0,164	+ 0,526	— 0,244
	0,06	+ 0,294	— 0,074	+ 0,276	— 0,131	+ 0,154	— 0,177	— 0,063	— 0,188	+ 0,493	— 0,232
	0,08	+ 0,296	— 0,077	+ 0,288	— 0,131	+ 0,200	— 0,182	+ 0,020	— 0,204	+ 0,473	— 0,227
	0,10	+ 0,298	— 0,079	+ 0,295	— 0,132	+ 0,232	— 0,184	+ 0,080	— 0,213	+ 0,451	— 0,222
	0,20	+ 0,304	— 0,089	+ 0,311	— 0,132	+ 0,291	— 0,183	+ 0,218	— 0,224	+ 0,400	— 0,200
0,6	0,30	+ 0,308	— 0,096	+ 0,316	— 0,130	+ 0,310	— 0,176	+ 0,269	— 0,218	+ 0,375	— 0,186
	0,40	+ 0,311	— 0,102	+ 0,318	— 0,128	+ 0,317	— 0,167	+ 0,293	— 0,206	+ 0,360	— 0,174
	0,50	+ 0,313	— 0,106	+ 0,319	— 0,127	+ 0,321	— 0,159	+ 0,306	— 0,192	+ 0,349	— 0,164
	0,60	+ 0,315	— 0,110	+ 0,320	— 0,125	+ 0,322	— 0,150	+ 0,314	— 0,178	+ 0,341	— 0,154
	0,70	+ 0,317	— 0,113	+ 0,320	— 0,124	+ 0,323	— 0,142	+ 0,318	— 0,163	+ 0,334	— 0,145
	0,80	+ 0,318	— 0,116	+ 0,320	— 0,122	+ 0,322	— 0,135	+ 0,320	— 0,149	+ 0,329	— 0,136
	0,90	+ 0,319	— 0,118	+ 0,320	— 0,121	+ 0,321	— 0,127	+ 0,320	— 0,134	+ 0,324	— 0,128
	1,00	+ 0,320	— 0,120	+ 0,320	— 0,120	+ 0,320	— 0,120	+ 0,320	— 0,120	+ 0,320	— 0,120
	0,02	+ 0,372	— 0,052	+ 0,248	— 0,124	— 0,055	— 0,142	+ 1,039	— 0,221	+ 1,285	— 0,245
	0,04	+ 0,376	— 0,055	+ 0,325	— 0,124	+ 0,144	— 0,165	+ 0,834	— 0,166	+ 1,105	— 0,195
	0,06	+ 0,376	— 0,049	+ 0,355	— 0,121	+ 0,225	— 0,173	+ 0,731	— 0,134	+ 0,968	— 0,157
	0,08	+ 0,376	— 0,042	+ 0,370	— 0,116	+ 0,267	— 0,174	+ 0,655	— 0,120	+ 0,870	— 0,130
	0,10	+ 0,376	— 0,037	+ 0,373	— 0,110	+ 0,300	— 0,171	+ 0,607	— 0,107	+ 0,802	— 0,110
	0,20	+ 0,366	— 0,012	+ 0,379	— 0,082	+ 0,354	— 0,145	+ 0,484	— 0,066	+ 0,600	— 0,050
0,7	0,30	+ 0,358	+ 0,007	+ 0,374	— 0,056	+ 0,366	— 0,115	+ 0,433	— 0,041	+ 0,506	— 0,019
	0,40	+ 0,352	+ 0,022	+ 0,367	— 0,032	+ 0,366	— 0,085	+ 0,404	— 0,021	+ 0,451	+ 0,002
	0,50	+ 0,346	+ 0,034	+ 0,360	— 0,011	+ 0,363	— 0,056	+ 0,383	— 0,003	+ 0,415	+ 0,018
	0,60	+ 0,342	+ 0,044	+ 0,353	+ 0,009	+ 0,357	— 0,029	+ 0,368	+ 0,013	+ 0,389	+ 0,031
	0,70	+ 0,338	+ 0,052	+ 0,347	+ 0,026	+ 0,351	— 0,002	+ 0,356	+ 0,029	+ 0,369	+ 0,042
	0,80	+ 0,335	+ 0,059	+ 0,341	+ 0,042	+ 0,344	+ 0,023	+ 0,344	+ 0,043	+ 0,353	+ 0,052
	0,90	+ 0,332	+ 0,065	+ 0,335	+ 0,057	+ 0,337	+ 0,047	+ 0,338	+ 0,057	+ 0,341	+ 0,062
	1,00	+ 0,330	+ 0,070	+ 0,330	+ 0,070	+ 0,330	+ 0,070	+ 0,030	+ 0,070	+ 0,330	+ 0,070

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 34 (continuare)

$\frac{a}{l}$	$\frac{\lambda}{n}$	0,9		0,8		0,7		0,6		0,5	
		v	w	v	w	v	w	v	w	v	w
0,8	0,02	+ 0,430	− 0,051	+ 0,295	− 0,120	+ 1,309	− 0,041	+ 1,583	− 0,057	+ 1,415	+ 0,024
	0,04	+ 0,428	− 0,031	+ 0,370	− 0,112	+ 0,934	+ 0,028	+ 1,218	+ 0,028	+ 1,199	+ 0,029
	0,06	+ 0,424	− 0,013	+ 0,405	− 0,102	+ 0,747	+ 0,057	+ 1,019	+ 0,079	+ 1,058	+ 0,078
	0,08	+ 0,418	+ 0,007	+ 0,409	− 0,088	+ 0,641	+ 0,076	+ 0,885	+ 0,105	+ 0,930	+ 0,110
	0,10	+ 0,414	+ 0,022	+ 0,411	− 0,075	+ 0,592	+ 0,093	+ 0,769	+ 0,131	+ 0,843	+ 0,130
	0,20	+ 0,384	+ 0,092	+ 0,403	− 0,011	+ 0,453	+ 0,139	+ 0,537	+ 0,191	+ 0,600	+ 0,200
	0,30	+ 0,360	+ 0,144	+ 0,385	+ 0,046	+ 0,398	+ 0,171	+ 0,443	+ 0,221	+ 0,487	+ 0,235
	0,40	+ 0,341	+ 0,186	+ 0,367	+ 0,098	+ 0,366	+ 0,198	+ 0,391	+ 0,242	+ 0,421	+ 0,257
	0,50	+ 0,326	+ 0,219	+ 0,349	+ 0,145	+ 0,344	+ 0,222	+ 0,358	+ 0,259	+ 0,378	+ 0,273
	0,60	+ 0,314	+ 0,246	+ 0,333	+ 0,188	+ 0,326	+ 0,244	+ 0,334	+ 0,273	+ 0,348	+ 0,285
	0,70	+ 0,303	+ 0,269	+ 0,318	+ 0,225	+ 0,312	+ 0,265	+ 0,316	+ 0,286	+ 0,325	+ 0,296
	0,80	+ 0,294	+ 0,289	+ 0,304	+ 0,259	+ 0,300	+ 0,284	+ 0,302	+ 0,298	+ 0,307	+ 0,305
	0,90	+ 0,287	+ 0,306	+ 0,292	+ 0,291	+ 0,290	+ 0,303	+ 0,290	+ 0,309	+ 0,292	+ 0,313
	1,00	+ 0,280	+ 0,320	+ 0,280	+ 0,320	+ 0,280	+ 0,320	+ 0,280	+ 0,320	+ 0,280	+ 0,320
0,9	0,02	+ 0,455	− 0,036	+ 0,962	+ 0,308	+ 1,337	+ 0,339	+ 1,256	+ 0,350	+ 1,010	+ 0,390
	0,04	+ 0,450	0,000	+ 0,638	+ 0,355	+ 0,883	+ 0,419	+ 0,936	+ 0,420	+ 0,832	+ 0,426
	0,06	+ 0,442	+ 0,034	+ 0,517	+ 0,372	+ 0,667	+ 0,447	+ 0,785	+ 0,460	+ 0,730	+ 0,470
	0,08	+ 0,424	+ 0,067	+ 0,445	+ 0,390	+ 0,548	+ 0,468	+ 0,640	+ 0,480	+ 0,650	+ 0,490
	0,10	+ 0,412	+ 0,096	+ 0,403	+ 0,399	+ 0,492	+ 0,483	+ 0,566	+ 0,500	+ 0,576	+ 0,500
	0,20	+ 0,357	+ 0,221	+ 0,310	+ 0,443	+ 0,335	+ 0,521	+ 0,375	+ 0,546	+ 0,400	+ 0,550
	0,30	+ 0,314	+ 0,316	+ 0,270	+ 0,478	+ 0,276	+ 0,543	+ 0,299	+ 0,568	+ 0,318	+ 0,574
	0,40	+ 0,280	+ 0,390	+ 0,245	+ 0,507	+ 0,244	+ 0,560	+ 0,259	+ 0,582	+ 0,271	+ 0,589
	0,50	+ 0,253	+ 0,449	+ 0,226	+ 0,533	+ 0,223	+ 0,574	+ 0,230	+ 0,593	+ 0,240	+ 0,600
	0,60	+ 0,230	+ 0,498	+ 0,211	+ 0,557	+ 0,207	+ 0,587	+ 0,212	+ 0,602	+ 0,218	+ 0,608
	0,70	+ 0,212	+ 0,539	+ 0,199	+ 0,578	+ 0,195	+ 0,599	+ 0,198	+ 0,610	+ 0,202	+ 0,615
	0,80	+ 0,196	+ 0,574	+ 0,188	+ 0,597	+ 0,186	+ 0,610	+ 0,186	+ 0,617	+ 0,189	+ 0,621
	0,90	+ 0,182	+ 0,604	+ 0,178	+ 0,614	+ 0,177	+ 0,620	+ 0,178	+ 0,624	+ 0,178	+ 0,626
	1,00	+ 0,170	+ 0,630	+ 0,170	+ 0,630	+ 0,170	+ 0,630	+ 0,170	+ 0,630	+ 0,170	+ 0,630

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

SISTEME CU LEGĂTURI DE TIPUL I, LA CARE DEPLASĂRILE NECUNOSCUTE SÎNT ROTIRILE NODURILOR. CÎTEVA CAZURI SPECIALE.

În acest capitol se expun, — în completarea metodelor generale de rezolvare prin aproximații succesive a sistemelor static nedeterminate cu legături de tipul I, avînd ca deplasări necunoscute rotirile nodurilor, expuse în capitolul precedent, — cîteva probleme a căror rezolvare comportă unele elemente specifice suplimentare, și anume :

— grinzile continue ;

— sistemele spațiale cu noduri fixe.

A. GRINZI CONTINUE

O categorie specială de cadre cu noduri fixe o formează cele în care la fiecare nod se întîlnesc numai cîte 2 bare. Cîteva tipuri de astfel de cadre sînt arătate în fig. 87 ; cazul cel mai des întîlnit în practică este însă cel al grinzilor continue, care ca sistem fac parte din aceeași categorie. În cele ce urmează ne vom referi la cazul grinzilor continue, însă întreaga expunere rămîne valabilă și pentru orice cadru cu noduri fixe prezentînd caracteristica de mai sus.

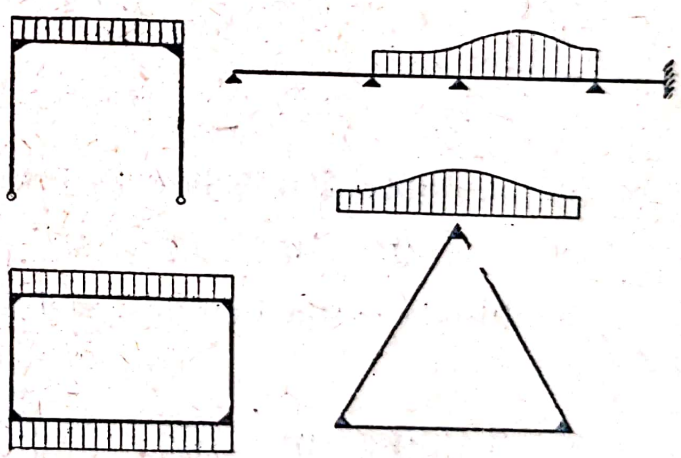


Fig. 87.

Referitor la cadrele cu noduri deplasabile de acest tip, vom reveni în cap. VIII.

Scriind condiția de echilibru a momentelor în jurul unui nod la o grindă continuă, rezultă că momentele la cele două capete de bare trebuie să fie egale și de semn contrar (în convenția de semne adoptată în metoda repartizării momentelor) ; dacă se consideră de același semn momentele care produc eforturi de întindere pe aceeași față a grinzii (convenția de semne clasică pentru construirea diagramelor de momente), momentele la cele două capete de bare rezultă egale și de același semn.

În consecință, se pot scrie condițiile de continuitate ale grinzii, luînd ca necunoscute static nedeterminate *momentele la noduri* în locul momentelor la capetele barelor, ceea ce conduce la un număr de ecuații și de necunoscute egal cu numărul nodurilor, așa cum s-a obținut și în metoda „transmiterii rotirilor" pentru cadre oarecare. Scrierea condițiilor de echilibru la noduri nu mai este necesară, deoarece prin adoptarea noțiunii de „moment la nod" s-au introdus implicit și aceste condiții. Se ajunge astfel la ecuațiile cunoscute ale lui *Clapeyron*. Rezolvarea prin iterație a acestor ecuații conduce la o metodă de calcul prin aproximații succesive care, după cum se va vedea, prezintă o serie de avantaje față de metodele generale de rezolvare pentru cadre oarecare cu noduri fixe (v. bibl. 1).

I. Scrierea ecuațiilor

Se adoptă următoarea convenție de semne pentru momente și rotiri :

— momentul este pozitiv cînd produce eforturi de întindere pe fața inferioară a grinzii ;

— rotirea unui capăt de bară este pozitivă cînd în vecinătatea lui săgețile barei sînt pozitive (bara se rotește în jos).

Considerăm trei noduri succesive i, j, k ale unei grinzi continue (fig. 88). Condiția de continuitate la nodul j va fi : $\theta_{ij}^{(j)} = -\theta_{jk}^{(j)}$ (rotirile capetelor de bară să fie egale și de semn contrar).

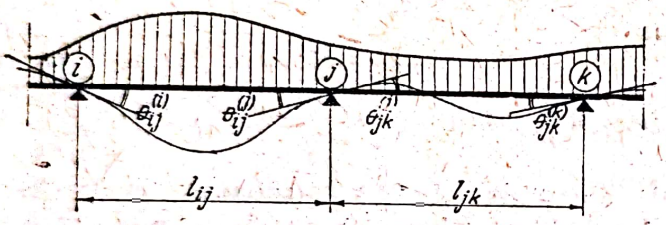


Fig. 88

Rotirile $\theta_{ij}^{(j)}$ și $\theta_{jk}^{(j)}$ în funcție de momentele la capetele barelor :

$$\theta_{ij}^{(j)} = \frac{l_{ij}}{6EI_{ij}} [2M_{ij}^{(j)} + M_{ij}^{(i)} + m_{ij}^{(j)}]$$

$$\theta_{jk}^{(j)} = \frac{l_{jk}}{6EI_{jk}} [2M_{jk}^{(j)} + M_{jk}^{(k)} + m_{jk}^{(j)}]$$

Din condițiile de echilibru în jurul nodurilor :

$$M_{ij}^{(i)} = M_i ; \quad M_{ij}^{(j)} = M_{jk}^{(j)} = M_j ; \quad M_{jk}^{(k)} = M_k$$

Condiția de continuitate la nodul j :

$$\theta_{ij}^{(j)} + \theta_{jk}^{(j)} = 0$$

$$\frac{l_{ij}}{I_{ij}} [2M_j + M_i + m_{ij}^{(j)}] + \frac{l_{jk}}{I_{jk}} [2M_j + M_k + m_{jk}^{(j)}] = 0$$

Notînd pentru fiecare bară $\frac{l}{I} = l'$:

$$\boxed{M_i l'_{ij} + 2M_j (l'_{ij} + l'_{jk}) + M_k l'_{jk} = -m_{ij}^{(j)} l'_{ij} - m_{jk}^{(j)} l'_{jk}} \qquad (5.1)$$

(ecuația nodului j)

Sistemul de ecuații (5.1) se rezolvă prin iterație.

II. Rezolvarea prin iterație (metoda „momentelor la noduri")

În fiecare ecuație se consideră ca necunoscută principală momentul la nodul pentru care s-a scris ecuația. Astfel convergența este asigurată, deoarece coeficientul necunoscutei principale este egal cu de două ori suma coeficienților celorlalte necunoscute, deci criteriul lui Wittmeyer este satisfăcut.

Explicităm necunoscuta principală :

$$M_j = -\, m_{ij}^{(j)} \frac{i'_{ij}}{2\,(i'_{ij}+i'_{jk})} - m_{jk}^{(j)} \frac{i'_{jk}}{2\,(i'_{ij}+i'_{jk})} - M_i \frac{i'_{ij}}{2\,(i'_{ij}+i'_{jk})} - M_k \frac{i'_{jk}}{2\,(i'_{ij}+i'_{jk})}$$

Coeficienții de transmitere spre nodul j :

$$\boxed{t_{i\to j} = -\frac{i'_{ij}}{2\,(i'_{ij}+i'_{jk})}\ ;\quad t_{k\to j} = -\frac{i'_{jk}}{2\,(i'_{ij}+i'_{jk})}} \qquad (5.2)$$

Valorile inițiale ale momentelor la noduri :

$$M_j^{(1)} = -\, m_{ij}^{(j)} \frac{i'_{ij}}{2(i'_{ij}+i'_{jk})} - m_{jk}^{(j)} \frac{i'_{jk}}{2\,(i'_{ij}+i'_{jk})} = \boxed{m_{ij}^{(j)}\ t_{i\to j} + m_{jk}^{(j)}\ t_{k\to j}} \qquad (5.3)$$

La reazemele de capăt articulate sau simplu rezemate nu se scriu ecuații, deci spre aceste capete nu se fac transmiteri. La un reazem de capăt k încastrat, dacă jk este bara marginală, ecuația curentă devine :

$$M_k = -\, m_{jk}^{(k)} \frac{i'_{jk}}{2\,(i'_{jk}+0)} - M_j \frac{i'_{jk}}{2\,(i'_{jk}+0)} = -\frac{m_{jk}^{(k)}}{2} - \frac{M_j}{2}$$

Coeficientul de transmitere spre capătul încastrat :

$$\boxed{t_{j\to k} = -\frac{1}{2}}$$

Coeficientul de transmitere de la capătul încastrat spre primul nod interior este cel obișnuit, conform relațiilor (5.2).

Valoarea inițială a momentului la capătul încastrat :

$$\boxed{M_k^{(1)} = -\frac{m_{jk}^{(k)}}{2}}$$

III. Mersul calculului

Se înscriu pe schemă în dreptul fiecărui nod coeficienții de transmitere spre acel nod. Se determină caracteristicile de încărcare m cu ajutorul tabelei 1. Înmulțind caracteristicile de încărcare ale capetelor de bare cu coeficienții de transmitere înscriși în dreptul capetelor de bare respective, conform relației (5.2), se obțin valorile inițiale ale momentelor $M_B^{(1)}$, $M_C^{(1)}$, $M_D^{(1)}$ (fig. 89), cu care se începe iterația.

Scanned with OKEN Scanner

Ordinea de echilibrare a nodurilor este de la cel cu momentul cel mai mare necorectat (cu cea mai mare discontinuitate). După corectarea unui nod, se marchează cu o linie orizontală cantităţile corectate, urmînd ca la corectarea următoare a aceluiaşi nod să se ia în consideraţie numai cantităţile acumulate între timp la nod, deci cele care rămîn sub linia orizontală. În fig. 89 sînt arătate primele 2 corectări, în ordinea 1) B, 2) C.

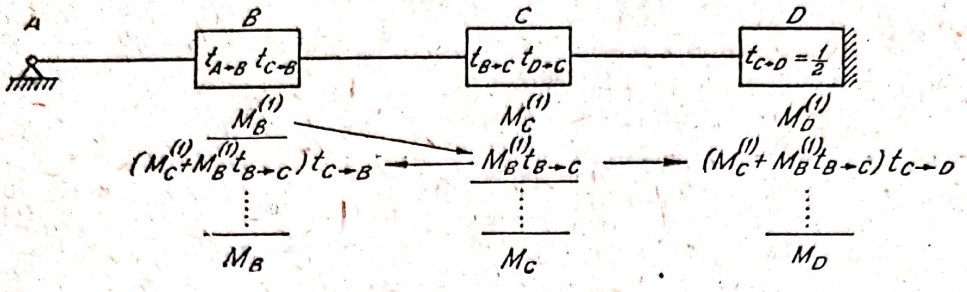


Fig. 89.

La sfîrşitul iteraţiei se însumează coloanele de la noduri şi se obţin direct valorile momentelor pe reazeme, în convenţia de semne clasică.

IV. Semnificaţia fizică a iteraţiei

Se porneşte din situaţia cu toate necunoscutele (momentele pe reazeme) egale cu zero, deci de la sistemul de bază cu barele articulate la noduri, caracteristic metodei generale a eforturilor (fig. 90,*a*). Se observă de altfel imediat că ecuaţia (5.1) reprezintă particularizarea pentru cazul grinzilor continue a formei generale (1.8); de asemenea, (5.2) şi (5.3) corespund respectiv la (2.22) şi (2.21).

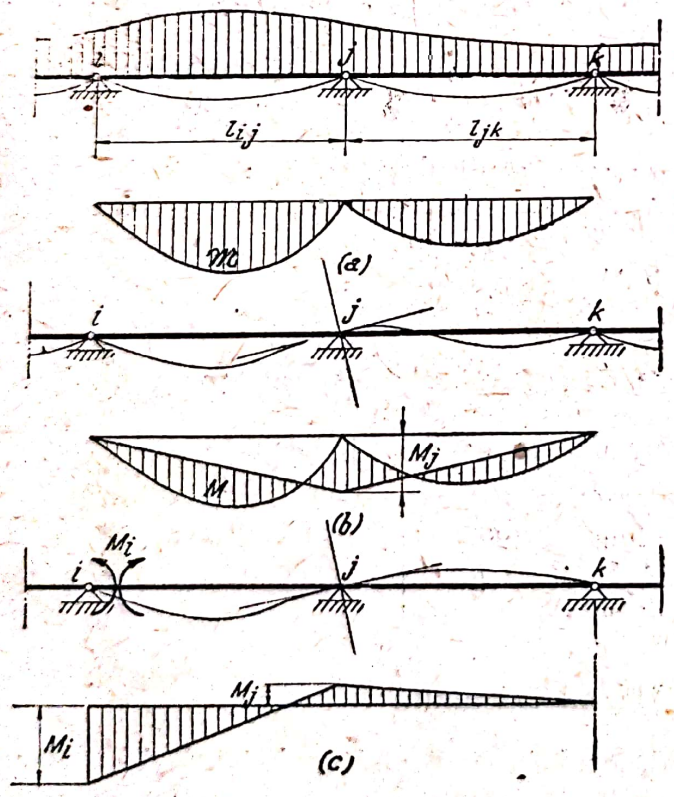


Fig. 90.

Valoarea iniţială a necunoscutei principale din ecuaţia nodului j (M_j) se determină punînd în ecuaţie celelalte necunoscute (M_i, M_k) egale cu zero. Aceasta revine la a considera porţiunea de grindă ijk articulată în i şi k şi continuă în j, adică — faţă de sistemul de bază — a restabili continuitatea numai în nodul j (fig. 90,*b*).

Faptul că rezolvarea în cursul iteraţiei a ecuaţiei j (corectarea pe schemă a nodului j) se traduce prin restabilirea continuităţii în nodul respectiv, păstrînd legăturile în nodurile vecine dezlegate, constituie o caracteristică a metodelor de rezolvare prin aproximaţii succesive bazate pe metoda

eforturilor — spre deosebire de metoda deplasărilor, unde corectarea unui nod reprezintă deblocarea lui, păstrînd nodurile vecine blocate.

În ecuația (5.1), punînd $M_i = M_k = 0$, avem :

$$2M_j (l'_{ij} + l'_{jk}) = - m_{ij}^{(j)} l'_{ij} - m_{jk}^{(j)} l'_{jk}$$

$$M_j^{(1)} = - \frac{m_{ij}^{(j)} l'_{ij} + m_{jk}^{(j)} l'_{jk}}{2 (l'_{ij} + l'_{jk})} = m_{ij}^{(j)} t_{i \to j} + m_{jk}^{(j)} t_{k \to j}$$

(se obține relația 5.3).

Continuînd iterația, la corectarea unui nod j (fig. 90, *c*) urmează să se țină seama și de momentul M_i determinat la nodul i corectat anterior. Se restabilește continuitatea în j, dezlegînd legăturile din i și k. Momentul M_i devine atunci un moment exterior aplicat la capătul barei ij. Se obține o grindă ijk, continuă în j, articulată la capetele i și k și încărcată numai cu un moment exterior M_i la capătul i. Ecuația (5.1) devine :

$$M_i l' + 2 M_j (l'_{ij} + l'_{jk}) = 0$$

$$M_j = - M_i \frac{l'_{ij}}{2 (l'_{ij} + l'_{jk})} = M_i t_{i \to j}$$

Deci coeficientul de transmitere de la i la j poate fi definit din punct de vedere static ca momentul care apare în j, cînd legăturile în i și k sînt desfăcute, iar bara ij este încărcată la capătul i cu momentul exterior $M_i = 1$.

În unele tratate (v. bibl. 19, 21, 46) convergența iterației în metoda repartizării momentelor este demonstrată pornind de la rezolvarea prin iterație a ecuațiilor Clapeyron. Din cele arătate mai sus se vede însă că între metoda repartizării momentelor și rezolvarea sistemului de ecuații Clapeyron nu există o corespondență ; aplicînd metoda iterației la rezolvarea ecuațiilor (5.1), se ajunge la operațiunile din metoda „momentelor la noduri", care au cu totul alte semnificații fizice decît cele din metoda repartizării momentelor.

V. Avantajele metodei

Față de metodele expuse în cap. IV, metoda „momentelor la noduri" —la care se ajunge rezolvînd prin iterație sistemul de ecuații (5.1)— prezintă unele avantaje pentru calcul. Astfel :

a) Se cumulează avantajele metodei repartizării momentelor și metodei transmiterii rotirilor, eliminînd totodată dezavantajele respective și anume : se operează cu momente ; la fiecare nod este o singură coloană de cifre ; nu sînt necesare operațiunile de repartiție la noduri ; la sfîrșitul calculului nu este necesară o trecere de la rotiri la momente printr-o operațiune suplimentară, care comportă erori.

b) Momentele se obțin direct cu semnul pentru trasarea diagramei de momente.

c) Pentru capetele articulate nu se introduc elemente speciale, ci ele dispar pur și simplu din schemă.

d) Expresiile coeficienților de transmitere rămîn simple. În cazul grinzilor cu deschideri egale :

$$t = - \frac{l}{2 (l + l)} = - \frac{1}{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

e) Se intră în calcul cu caracteristicile de încărcare și nu cu momentele de încastrare perfectă. În cazul barelor cu secțiune variabilă, aceasta constituie un avantaj, deoarece valorile caracteristicilor de încărcare se scot direct din tabele pentru orice caz de încărcare, pe cînd momentele de încastrare perfectă, cu excepția cazurilor de încărcare pentru care s-au dat tabele, trebuie calculate pe baza caracteristicilor de încărcare.

Bazele metodei de calcul expuse mai sus se găsesc în lucrările lui *Halasz* (bibl. 34, 35) și *Melan* (bibl. 50). Într-o formă mai completă și cu considerarea semnificațiilor fizice ale termenilor din ecuații și operațiunilor din rezolvarea prin iterație, metoda a fost publicată în articolul nostru din „Industria Construcțiilor" (bibl. 1).

În exemplul 15 este calculată o grindă continuă, în paralel prin metoda de mai sus și prin cele două metode generale expuse în cap. IV.

Exemplul 15. Grindă continuă cu reazeme fixe, calculată prin metoda „momentelor la noduri" (fig. 91).

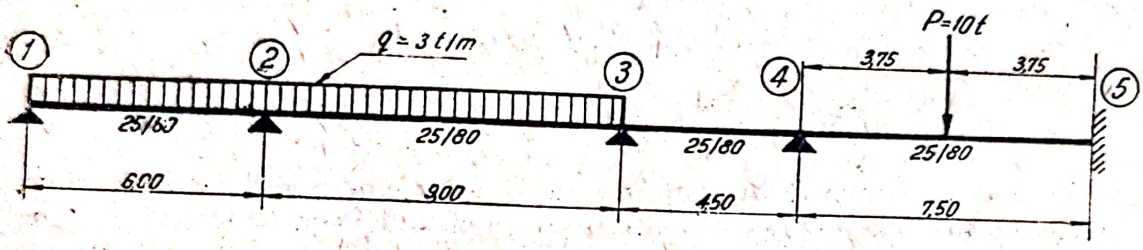


Fig. 91.

Datele geometrice ale barelor

Bara	b (dm)	h (dm)	I (dm⁴)	l (dm)	$l' = \frac{l}{I}$
1—2	2,5	6,0	45,00	60	1,330
2—3	2,5	8,0	106,67	90	0,845
3—4	2,5	8,0	106,67	45	0,422
4—5	2,5	8,0	106,67	75	0,703

Caracteristici de încărcare (conform tabelei 1):

$$m_{1-2}^{(1)} = m_{1-2}^{(2)} = 0{,}250 \times 3 \times 6{,}0^2 = 27{,}0 \text{ tm}$$

$$m_{2-3}^{(2)} = m_{2-3}^{(3)} = 0{,}250 \times 3 \times 9{,}0^2 = 60{,}7 \text{ tm}$$

$$m_{4-5}^{(4)} = m_{4-5}^{(5)} = 0{,}375 \times 10 \times 7{,}5^2 = 28{,}2 \text{ tm}$$

Coeficienți de transmitere:

$$t_{1\to 2} = -\frac{1{,}330}{2\,(1{,}330 + 0{,}845)} = -0{,}308$$ (acest coeficient servește numai la început, pentru calculul momentelor inițiale)

$$t_{3\to 2} = -\frac{0{,}845}{2\,(1{,}330 + 0{,}845)} = -0{,}192; \quad t_{2\to 3} = -\frac{0{,}845}{2\,(0{,}845 + 0{,}422)} = -0{,}333$$

$$t_{3\to 4} = -\frac{0{,}422}{2\,(0{,}422 + 0{,}703)} = -0{,}188; \quad t_{4\to 3} = -\frac{0{,}422}{2\,(0{,}845 + 0{,}422)} = -0{,}167$$

$$t_{4\to 5} = -0{,}500; \qquad t_{5\to 4} = -\frac{0{,}703}{2\,(0{,}703 + 0{,}422)} = -0{,}312$$

Momente inițiale :

$$M_2^{(1)} = -27{,}0 \times 0{,}308 - 60{,}7 \times 0{,}192 = -19{,}8 \text{ tm}$$

$$M_3^{(1)} = -60{,}7 \times 0{,}333 = -20{,}2 \text{ tm}$$

$$M_4^{(1)} = -28{,}2 \times 0{,}312 = -8{,}8 \text{ tm}$$

$$M_5^{(1)} = -28{,}2 \times 0{,}500 = -14{,}1 \text{ tm}$$

Schema de calcul, v. fig. 92 (transmiterile cu semnul minus).

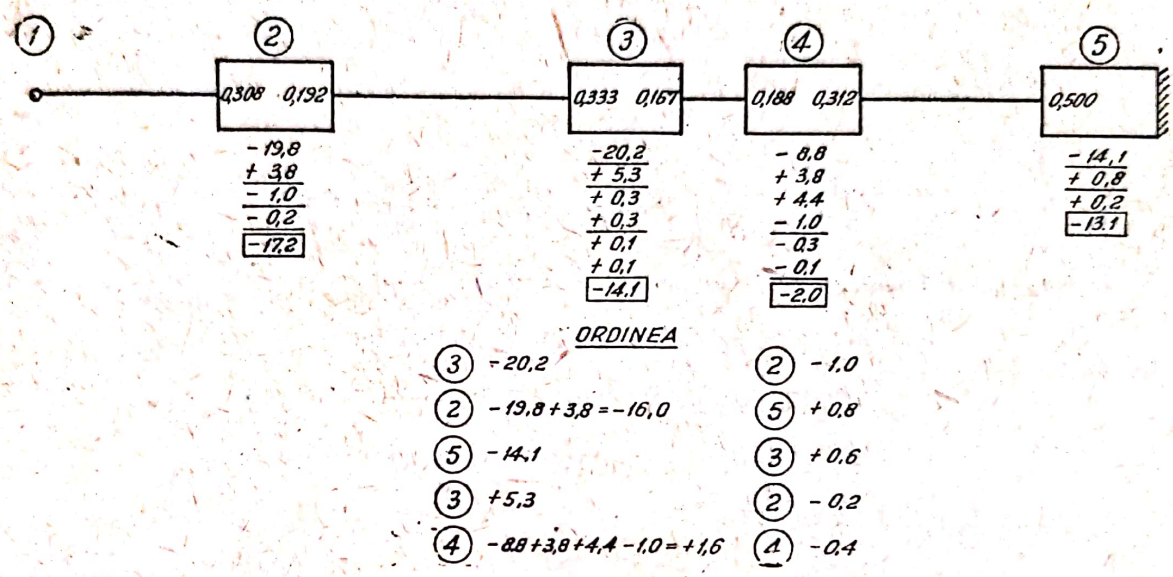


Fig. 92.

Diagrama de momente, (v. fig. 93).

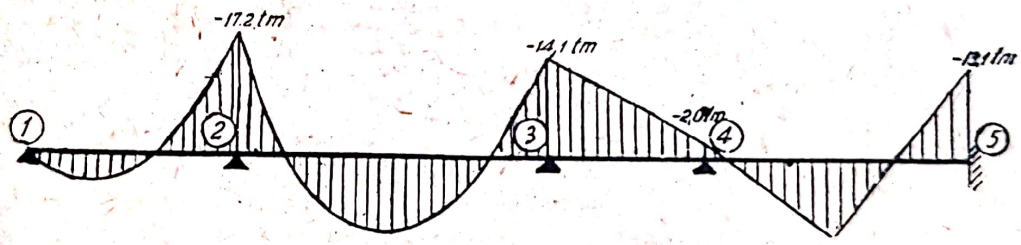


Fig. 93.

Pentru comparație, se dă mai jos calculul aceleiași grinzi continue prin metodele tratate în cap. IV.

Prin metoda repartizării momentelor :

Rigidități

Bara	I	l	ρ
1—2	45,00	60	$\frac{3}{4}$ 0,75 = 0,56
2—3	106,67	90	1,19
3—4	106,67	45	2,38
4—5	106,67	75	1,43

Coeficienți de repartiție:

— Nodul *2*:

$$\Sigma\rho = 0{,}56 + 1{,}19 = 1{,}75$$

$$r_{1-2}^{(2)} = \frac{0{,}56}{1{,}75} = 0{,}321\,; \qquad r_{2-3}^{(2)} = \frac{1{,}19}{1{,}75} = 0{,}679$$

— Nodul *3*:

$$\Sigma\rho = 1{,}19 + 2{,}38 = 3{,}57$$

$$r_{2-3}^{(3)} = \frac{1{,}19}{3{,}57} = 0{,}334\,; \qquad r_{3-4}^{(3)} = \frac{2{,}38}{3{,}57} = 0{,}666$$

— Nodul *4*:

$$\Sigma\rho = 2{,}38 + 1{,}43 = 3{,}81$$

$$r_{3-4}^{(4)} = \frac{2{,}38}{3{,}81} = 0{,}625\,; \qquad r_{4-5}^{(4)} = \frac{1{,}43}{3{,}81} = 0{,}375$$

Momente de încastrare perfectă (conform tabelei 1):

$$\overline{M}_{1-2}^{(2)} = -\,0{,}1250 \times 3 \times 6^2 = -\,13{,}5 \text{ tm}$$

$$\overline{M}_{2-3}^{(2)},\ \overline{M}_{2-3}^{(3)} = \pm\,0{,}0833 \times 3 \times 9^2 = \pm\,20{,}2 \text{ tm}$$

$$\overline{M}_{4-5}^{(4)},\ \overline{M}_{4-5}^{(5)} = \pm\,0{,}1250 \times 10 \times 7{,}5 = \pm\,9{,}4 \text{ tm.}$$

Schema de calcul (v. fig. 94).

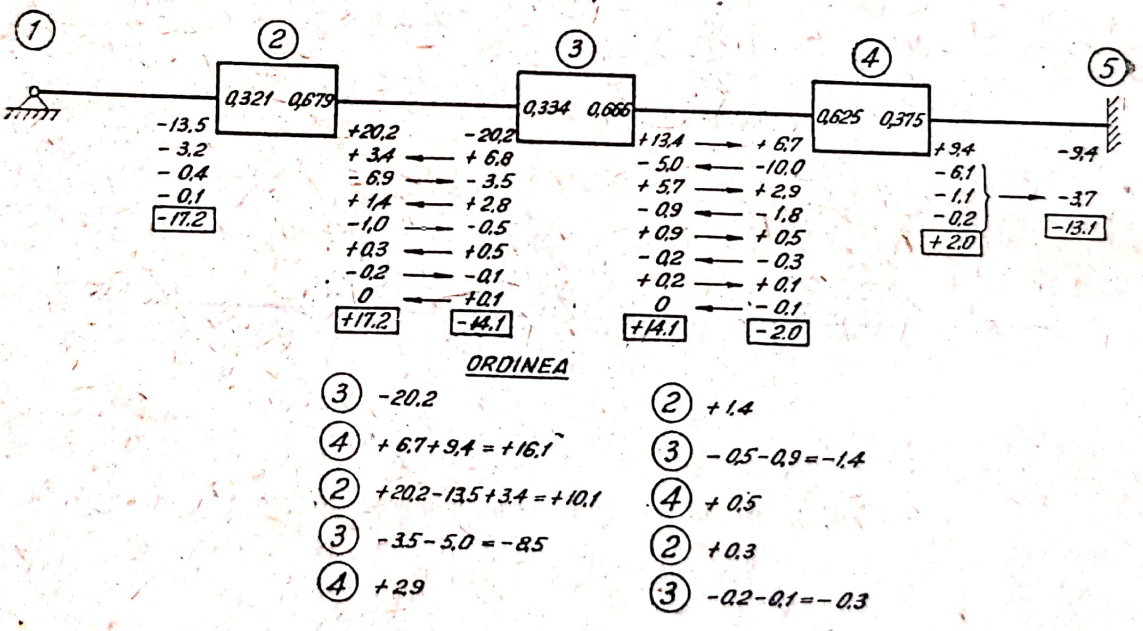


Fig. 94.

Prin metoda transmiterii rotirilor:

Coeficienți de transmitere:

$$t_{2\to3} = -\frac{1}{2}\,0{,}334 = -0{,}167\,; \qquad t_{3\to4} = -\frac{1}{2}\,0{,}625 = -\,0{,}312$$

$$t_{3\to2} = -\frac{1}{2}\,0{,}679 = -0{,}340\,; \qquad t_{4\to3} = -\frac{1}{2}\,0{,}666 = -\,0{,}333$$

Scanned with OKEN Scanner

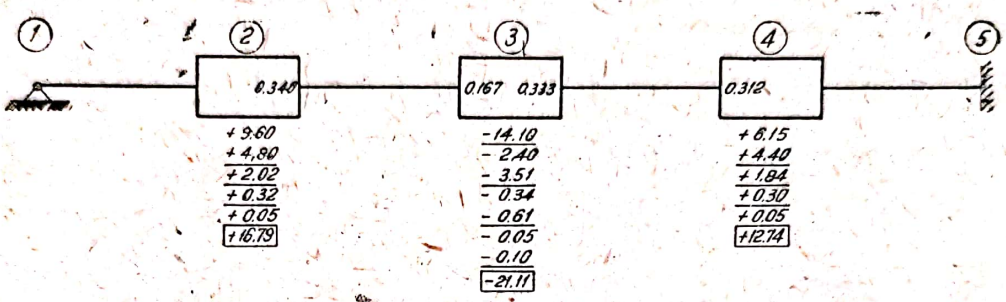
Rotiri inițiale (multiplicate cu 10) :

$$0_2'^{(1)} = \frac{-13,5 + 20,2}{4 \times 1,75} 10 = +9,60$$

$$0_3'^{(1)} = \frac{-20,2}{4 \times 3,57} 10 = -14,10$$

$$0_4'^{(1)} = \frac{+9,4}{4 \times 3,81} 10 = +6,15$$

Schema de calcul (v. fig. 95) :



ORDINEA

(3)	-14.10	(4)	+1.84
(2)	+9.60+4.80=+14.40	(3)	-0.34-0.61=-0.95
(4)	+6.15+4.40=+10.55	(2)	+0.32
(3)	-2.48-3.51=-5.91	(4)	+0.30
(2)	+2.02	(3)	-0.05-0.10=-0.15

Fig. 95.

Momente :

$$M_{1-2}^{(2)} = -4\frac{1}{10}0,560\ (16,79 + 0) - 13,5 = -17,2 \text{ tm}$$

$$M_{2-3}^{(2)} = -4\frac{1}{10}1,190\left(16,79 - \frac{1}{2}21,11\right) + 20,2 = +17,2 \text{ tm}$$

$$M_{2-3}^{(3)} = -4\frac{1}{10}1,190\ (-21,11 + 16,79) - 20,2 = -14,1 \text{ tm}$$

$$M_{3-4}^{(3)} = -4\frac{1}{10}2,380\left(-21,11 + \frac{1}{2}12,74\right) = +14,1 \text{ tm}$$

$$M_{3-4}^{(4)} = -4\frac{1}{10}2,380\left(12,74 - \frac{1}{2}21,11\right) = -2,0 \text{ tm}$$

$$M_{4-5}^{(4)} = -4\frac{1}{10}1,430\ (12,74 + 0) + 9,4 = +2,0 \text{ tm}$$

$$M_{4-5}^{(5)} = -4\frac{1}{10}1,430\left(0 + \frac{1}{2}12,74\right) - 9,4 = -13,1 \text{ tm}.$$

Introducînd elementele caracteristice pentru bare cu secțiune variabilă în expresiile rotirilor în funcție de momente :

$$\theta_{ij}^{(j)} = \frac{l_{ij}}{6\,E I_{0ij}} \left[2\,c_{ij}''\,M_j + c_{ij}\,M_i + s_{ij}''\,m_{ij}^{(j)}\right]$$

$$\theta_{jk}^{(j)} = \frac{l_{jk}}{6E I_{0jk}} \left[2\,c_{jk}'\,M_j + c_{jk}\,M_k + s_{jk}'\,m_{jk}^{(j)}\right]$$

(I_{0ij}, I_{0jk} sînt momentele de inerție de referință ale barelor ij și jk), ecuația (5.1) devine :

$$c_{ij}\,M_i\,l_{ij}' + 2M_j\,(c_{ij}''\,l_{ij}' + c_{jk}'\,l_{jk}') + c_{jk}\,M_k\,l_{jk}' = s_{ij}''\,m_{ij}^{(j)}\,l_{ij}' - s_{jk}'\,m_{jk}^{(j)}\,l_{jk}'$$

Coeficienții de transmitere spre nodul j :

$$t_{i\to j} = -\frac{c_{ij}\,l_{ij}'}{2\,(c_{ij}''\,l_{ij}' + c_{jk}'\,l_{jk}')}\;;\quad t_{k\to j} = -\frac{c_{jk}\,l_{jk}'}{2\,(c_{ij}''\,l_{ij}' + c_{jk}'\,l_{jk}')} \tag{5.4}$$

iar valorile inițiale ale momentelor :

$$M_j^{(1)} = -\frac{s_{ij}''\,m_{ij}^{(j)}\,l_{ij}' + s_{jk}'\,m_{jk}^{(j)}\,l_{jk}'}{2\,(c_{ij}''\,l_{ij}' + c_{jk}'\,l_{jk}')} = \frac{s_{ij}''}{c_{ij}}\,m_{ij}^{(j)}\,t_{i\to j} + \frac{s_{jk}'}{c_{jk}}\,m_{jk}^{(j)}\,t_{k\to j} \tag{5.5}$$

Cu aceste elemente, mersul calculului este același ca și pentru barele cu secțiune constantă.

În exemplul 16 este calculată o grindă continuă cu secțiune variabilă în lungul barelor, în paralel prin metoda „momentelor la noduri" și prin cele două metode generale.

Exemplul 16. Grindă continuă cu reazeme fixe, avînd bare cu secțiune variabilă, calculată prin metoda „momentelor la noduri" (fig. 96).

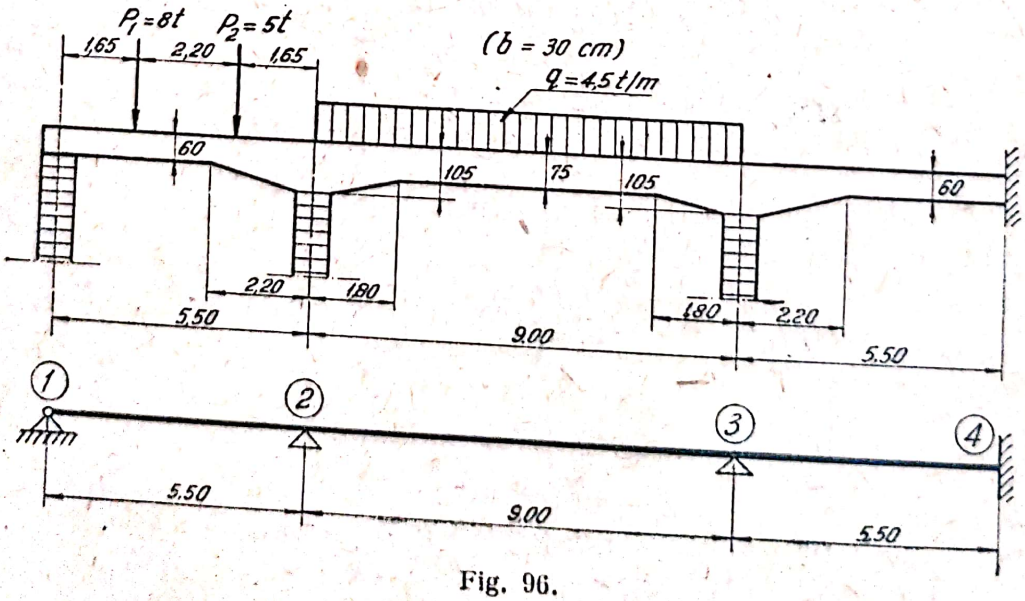


Fig. 96.

În mod aproximativ se consideră vutele mergînd pînă în axele reazemelor, iar înălțimea teoretică în axele reazemelor egală cu cea de la marginea reazemelor ($h_r = 1{,}05$m).

Datele geometrice ale barelor

Bara	b (dm)	h_0 (dm)	I_0 (dm^4)	l (dm)	l'
1—2	3,0	6,0	54,0	55,0	1,02
2—3	3,0	7,5	105,5	90,0	0,85
3—4	3,0	6,0	54,0	55,0	1,02

Coeficienții de corecție pentru variația secțiunilor

Bara	h_r (dm)	$\left(\frac{h_0}{h_r}\right)^3 = n$	λ	c	c'	c''	după tabela
1—2	10,5	0,187	0,4	0,838	0,977	0,520	4
2—3	10,5	0,365	0,2	0,939	0,798	0,798	2
3—4	10,5	0,187	0,4	0,838	0,520	0,977	4

Caracteristici de încărcare (tabela 10) :

— din P_1 : $\frac{a}{l} = \frac{5{,}50 - 1{,}65}{5{,}50} = 0{,}7$ (măsurat de la reazemul cu vută)

$$s''_{1-2}\, m^{(2)}_{1-2} = 0{,}224 \times 8 \times 5{,}50 = 9{,}87 \text{ tm}$$

— din P_2 : $\frac{a}{l} = \frac{1{,}65}{5{,}50} = 0{,}3$

$$s''_{1-2}\, m^{(2)}_{1-2} = 0{,}247 \times 5 \times 5{,}50 = 6{,}86 \text{ tm.}$$

Total : $9{,}87 + 6{,}86 = 16{,}73$ tm.

— din q : $s'_{2-3}\, m^{(2)}_{2-3} = s''_{2-3}\, m^{(3)}_{2-3} = 0{,}235 \times 4{,}5 \times 9^2 = 85{,}6$ tm.

Coeficienți de transmitere :

$$t_{1\to 2} = t_{4\to 3} = -\frac{0{,}838 \times 1{,}02}{2\,(0{,}520 \times 1{,}02 + 0{,}798 \times 0{,}85)} = -0{,}354$$

$$t_{2\to 3} = t_{3\to 2} = -\frac{0{,}939 \times 0{,}85}{2\,(0{,}520 \times 1{,}02 + 0{,}798 \times 0{,}85)} = -0{,}330$$

$$t_{3\to 4} = -\frac{0{,}838}{2 \times 0{,}977} = -0{,}428$$

Scanned with OKEN Scanner

Valorile inițiale ale momentelor :

$$M_2^{(1)} = -\frac{16{,}73 \times 1{,}02 + 85{,}6 \times 0{,}85}{2\,(0{,}520 \times 1{,}02 + 0{,}798 \times 0{,}85)} = -37{,}2 \text{ tm}$$

$$M_3^{(1)} = -\frac{85{,}6 \times 0{,}85}{2\,(0{,}520 \times 1{,}02 + 0{,}798 \times 0{,}85)} = -30{,}2 \text{ tm}$$

$$M_4^{(1)} = 0$$

Schema de calcul (v. fig. 97) :

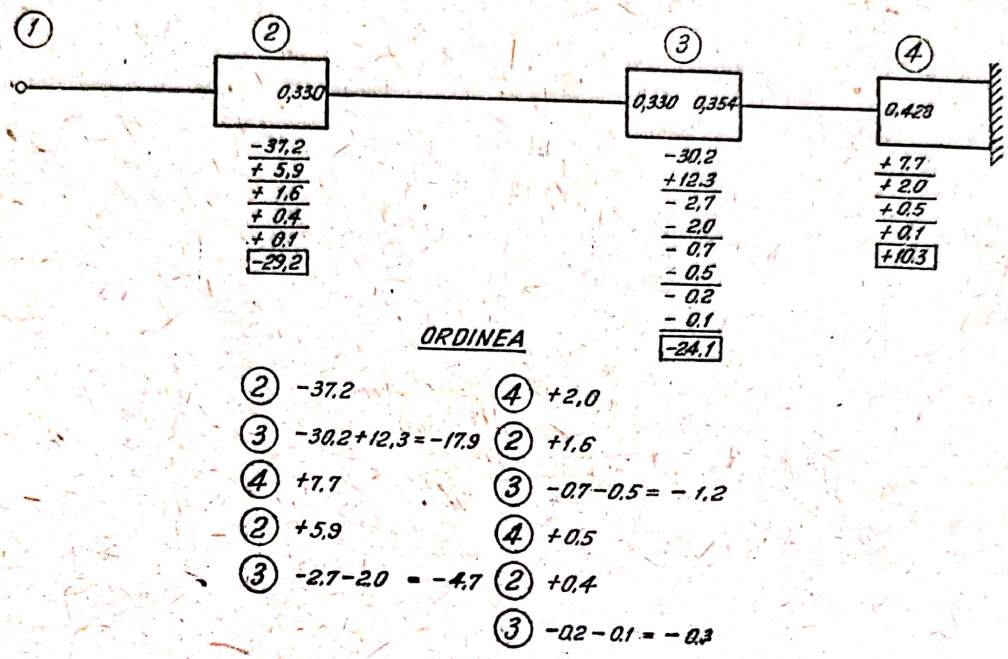


Fig. 97.

Diagrama de momente (v. fig. 98) :

Fig. 98.

Dăm și aici pentru comparație calculul prin metodele tratate în cap. IV.
Prin metoda repartizării momentelor :

Rigidități

Capătul de bară	I_0	l	n	λ	după tabela	ν (din tabelă)	$\rho = \frac{I_0}{l}\nu$
$\rho_{1-2}^{(2)}$	54,0	55,0	0,187	0,4	15	1,440	1,415
$\rho_{2-3}^{(2)} = \rho_{2-3}^{(3)}$	105,5	90,0	0,365	0,2	12	1,440	1,690
$\rho_{3-4}^{(3)}$	54,0	55,0	0,187	0,4	13	2,210	2,165
$\rho_{3-4}^{(4)}$	54,0	55,0	0,187	0,4	13	1,175	1,155

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienți de repartiție :

— Nodul 2 :

$$\Sigma\rho = 1{,}415 + 1{,}690 = 3{,}105$$

$$r_{1-2}^{(2)} = \frac{1{,}415}{3{,}105} = 0{,}456\,; \qquad r_{2-3}^{(2)} = \frac{1{,}690}{3{,}105} = 0{,}544$$

— Nodul 3 :

$$\Sigma\rho = 1{,}690 + 2{,}165 = 3{,}855$$

$$r_{2-3}^{(3)} = \frac{1{,}690}{3{,}855} = 0{,}437\,; \qquad r_{3-4}^{(3)} = \frac{2{,}165}{3{,}855} = 0{,}563$$

Coeficienți de transmitere :

$t_{2\to3} = t_{3\to2} = 0{,}590$ (tab. 16); $t_{4\to3} = 0{,}806$ (tab. 17) (servește numai în metoda rotirilor)

$t_{3\to4} = 0{,}426$ (tab. 17).

Momente de încastrare perfectă :

$$\overline{M}_{1-2}^{(2)} = -\,(0{,}238 \times 5 + 0{,}216 \times 8)\,5{,}50 = -\,16{,}0 \text{ tm} \qquad \text{(tab. 27)}$$

$$\overline{M}_{2-3}^{(2)} = +\,0{,}0926 \times 4{,}5 \times 9^2 = +\,33{,}7 \text{ tm} \qquad \text{(tab. 23)}$$

$$\overline{M}_{2-3}^{(3)} = -\,33{,}7 \text{ tm}.$$

Schema de calcul (v. fig. 99) :

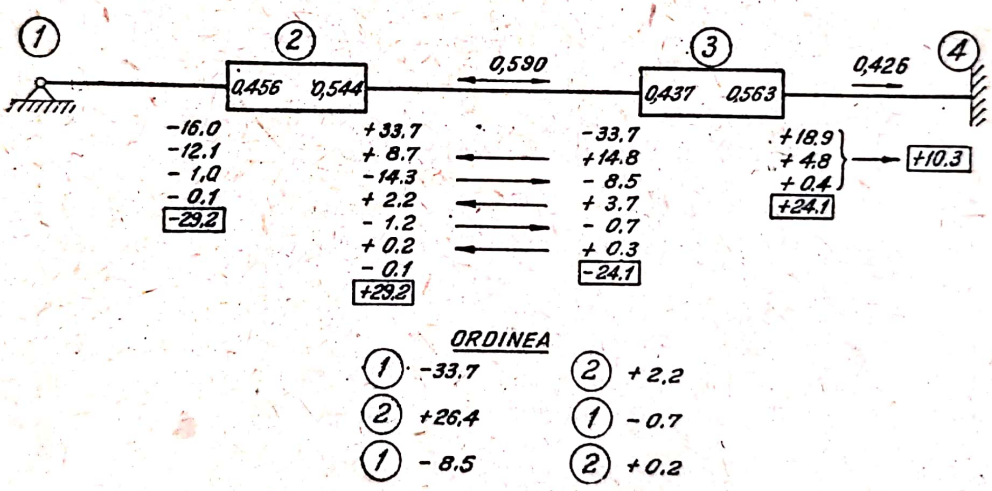


Fig. 99.

Prin metoda transmiterii rotirilor :

Coeficienți de transmitere :

$$t_{2\to3} = -\,0{,}590 \times 0{,}437 = -\,0{,}258$$

$$t_{3\to2} = -\,0{,}590 \times 0{,}544 = -\,0{,}321$$

Valorile inițiale ale rotirilor (multiplicate cu 10) :

$$\theta_2^{\prime(1)} = \frac{-\,16{,}0 + 33{,}8}{4 \times 3{,}105}\,10 = +14{,}35$$

$$\theta_3^{\prime(1)} = \frac{-\,33{,}8}{4 \times 3{,}855}\,10 = -\,21{,}90$$

Schema de calcul (v. fig. 100) :

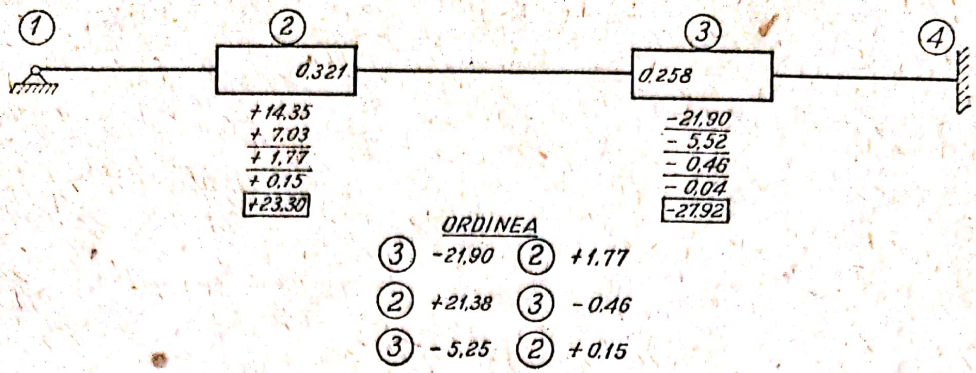


Fig. 100.

Momente :

$$M_{1-2}^{(2)} = -\frac{4}{10}\,1{,}415\,(23{,}30 + 0) - 16{,}0 = -29{,}2 \text{ tm}$$

$$M_{2-3}^{(2)} = -\frac{4}{10}\,1{,}690\,(23{,}30 - 0{,}59 \times 27{,}92) + 33{,}7 = +29{,}2 \text{ tm}$$

$$M_{2-3}^{(3)} = -\frac{4}{10}\,1{,}690\,(-27{,}92 + 0{,}59 \times 23{,}30) - 33{,}7 = -24{,}1 \text{ tm}$$

$$M_{3-4}^{(3)} = -\frac{4}{10}\,2{,}165\,(27{,}92 + 0) = +24{,}1 \text{ tm}$$

$$M_{3-4}^{(4)} = -\frac{1}{10}\,2{,}165\,(0 - 0{,}806 \times 27{,}92) = +10{,}3 \text{ tm}$$

VII. Calculul aproximativ al grinzilor făcînd parte din cadre etajate, cu ajutorul metodei „momentelor la noduri"

Metoda „*momentelor la noduri*" poate fi folosită pentru calculul oricărui cadru cu noduri fixe în care la fiecare nod nu se întîlnesc mai mult de două bare.

Ea poate fi extinsă însă şi pentru cadre de felul celui din fig. 101, *a*, în care la ultimul nod interior de la o extremitate sau de la amîndouă (D, H) se întîlnesc mai multe bare, cu condiţia ca aceste bare să fie terminale (să se termine la capătul opus nodului în reazeme, nu în alte noduri interioare) şi să nu fie încărcate.

De exemplu în nodul D avem :

$$M_{AD}^{(D)} + M_{BD}^{(D)} + M_{CD}^{(D)} = M_{DE}^{(D)}$$

Putem înlocui barele AD, BD, CD (fig. 101, *a*) cu o bară unică echivalentă (fig. 101, *b*), avînd ca rigiditate suma rigidităţilor barelor AD, BD, CD.

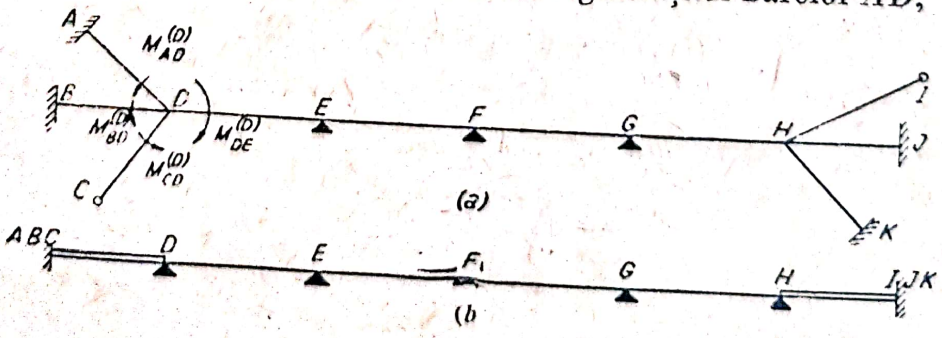


Fig. 101.

Sistemul se transformă atunci într-un cadru avînd la fiecare nod cîte două bare, deci care poate fi rezolvat prin metoda momentelor la noduri. Momentul M_D rezultat din calcul reprezintă momentul de la capătul D al barei DE, respectiv suma $M_{AD}^{(D)} + M_{BD}^{(D)} + M_{CD}^{(D)}$. Pentru a obține separat aceste trei momente, se repartizează suma lor între bare proporțional cu rigiditățile.

Un caz obișnuit întîlnit de astfel de sisteme reductibile la sisteme cu cîte două bare la nod este cel al grinzilor făcînd parte din cadre etajate, în structurile construcțiilor civile. După cum se știe, aceste structuri prezintă de obicei o anumită regularitate de deschideri și sarcini, astfel încît stîlpii interiori preiau momente încovoietoare destul de mici. De aceea unele prescripții, între care și cele românești din 1942 (v. și STAS 3599-52, pct. 2.9.1) admit un calcul static simplificat pentru sarcinile verticale, în care se neglijează rigiditatea stîlpilor interiori, considerîndu-se grinzile principale ca niște grinzi continue pe reazeme simple. În ceea ce privește stîlpii marginali, se admite de asemenea o simplificare de calcul, putîndu-se considera la calculul grinzii unui planșeu stîlpii de margine încastrați perfect în planșeul inferior și în cel superior. În modul acesta fiecare planșeu se poate calcula separat, independent de planșeele suprapuse, ajungîndu-se la un cadru ca în fig. 102, *a* (v. și *Cr. Mateescu*, Bul. Soc. Pol. 1935). Calculul grinzii se poate

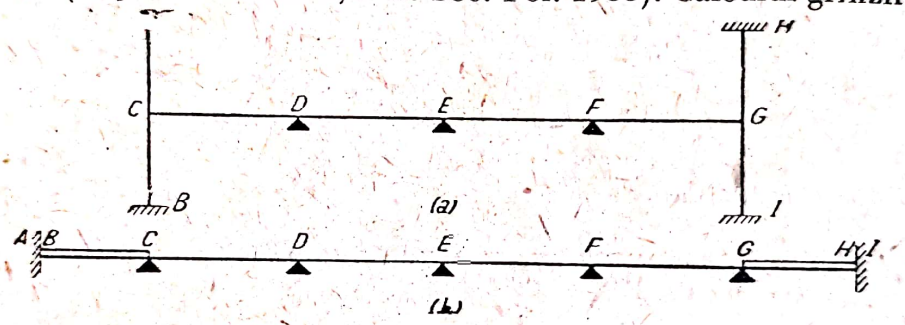


Fig. 102.

face prin metoda momentelor la noduri, introducînd în locul stîlpilor marginali bare terminale echivalente care au ca rigiditate suma rigidităților stîlpilor superiori și inferiori (fig. 102, *b*). Momentele rezultate din calcul la ultimele noduri interioare (C, G) se împart între stîlpii superiori și cei inferiori proporțional cu rigiditățile.

Exemplul 17. Grindă principală de planșeu, calculată prin metoda momentelor la noduri, ținînd seama și de rigiditățile stîlpilor marginali (fig. 103, *a*).

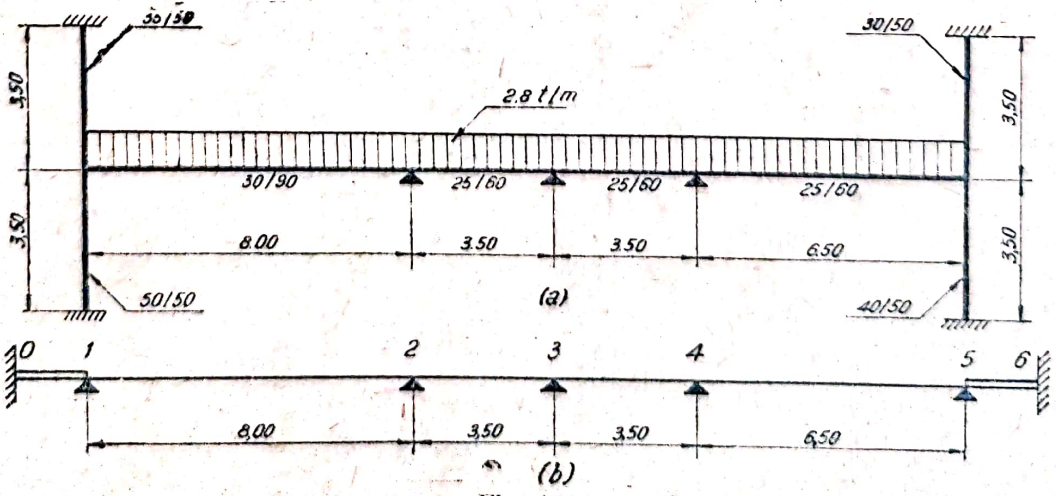


Fig. 103.

Stîlpii marginali se consideră încastrați în planșeul superior și în cel inferior. Sistemul se reduce la grinda echivalentă din fig. 103, *b*.

Date geometrice

Bara	b (dm)	h (dm)	I (dm^4)	l (dm)	$l' = \frac{l}{I_0}$
0—1	3,5	5,0	36,46	35	0,396
	5,0	5,0	52,08	35	
1—2	3,0	9,0	182,25	80	0,439
2—3	2,5	6,0	45,00	35	0,778
3—4	2,5	6,0	45,00	35	0,778
4—5	2,5	6,0	45,00	65	1,444
5—6	3,0	5,0	31,25	35	0,480
	4,0	5,0	41,67	35	

Rigiditățile barelor fictive:

$$\frac{I_{01}}{l_{01}} = \frac{36,46}{35} + \frac{52,08}{35} = 2,525$$

$$l'_{01} = \frac{1}{2,525} = 0,396$$

$$\frac{I_{56}}{l_{56}} = \frac{31,25}{35} + \frac{41,67}{35} = 2,085$$

$$l'_{56} = \frac{1}{2,085} = 0,480$$

Coeficienți de transmitere:

$$t_{1\to0} = -\,t_{5\to6} = -\,0,500$$

$$t_{0\to1} = -\,\frac{0,396}{2\,(0,396 + 0,439)} = -\,0,237$$

$$t_{1\to2} = -\,\frac{0,439}{2\,(0,439 + 0,778)} = -\,0,182$$

$$t_{2\to1} = -\,\frac{0,439}{2\,(0,396 + 0,439)} = -\,0,263$$

$$t_{2\to3} = -\,\frac{0,778}{2\,(0,778 + 0,778)} = -\,0,250$$

$$t_{3\to2} = -\,\frac{0,778}{2\,(0,778 + 0,439)} = -\,0,318$$

$$t_{3\to4} = -\,\frac{0,778}{2\,(0,778 + 1,444)} = -\,0,175$$

$$t_{4\to3} = -\,\frac{0,778}{2\,(0,778 + 0,778)} = -\,0,250$$

$$t_{4\to5} = -\,\frac{1,444}{2\,(1,444 + 0,480)} = -\,0,377$$

$$t_{5\to4} = -\,\frac{1,444}{2\,(1,444 + 0,778)} = -\,0,325$$

$$t_{6\to5} = -\,\frac{0,480}{2\,(0,480 + 1,444)} = -\,0,123$$

Scanned with OKEN Scanner

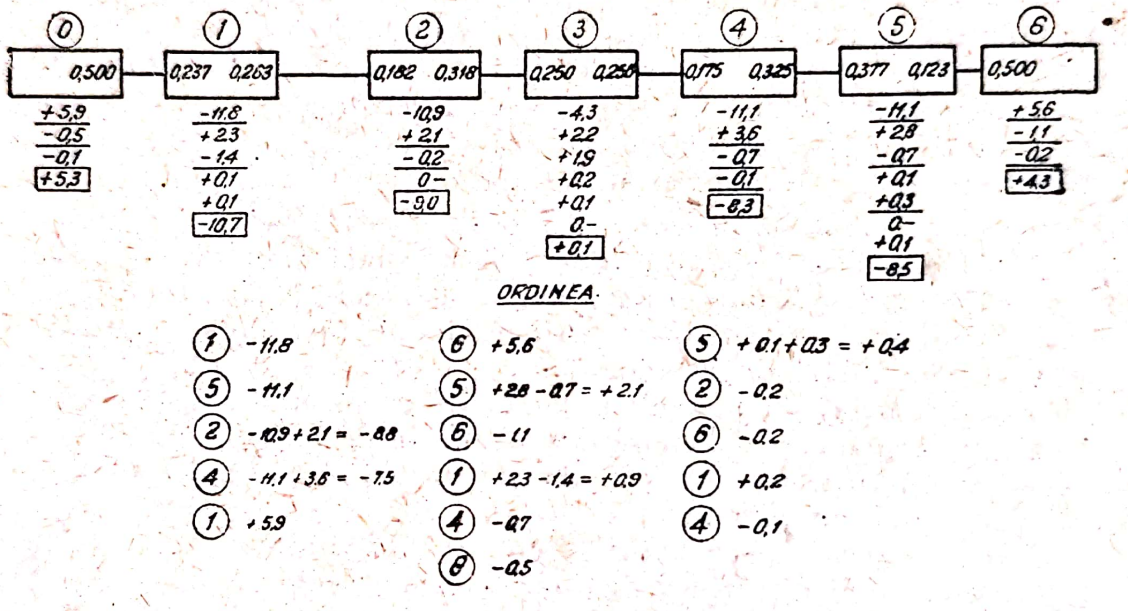
Caracteristici de încărcare:

$$m^{(1)}_{1-2} = -m^{(2)}_{1-2} = 0{,}250 \times 2{,}8 \times 8^2 = 44{,}8 \text{ tm}$$
$$m^{(2)}_{2-3} = -m^{(3)}_{2-3} = m^{(3)}_{3-4} = -m^{(4)}_{3-4} = 0{,}250 \times 2{,}8 \times 3{,}5^2 = 8{,}6 \text{ tm}$$
$$m^{(4)}_{4-5} = -m^{(5)}_{4-5} = 0{,}250 \times 2{,}8 \times 6{,}5^2 = 29{,}5 \text{ tm}$$

Valorile inițiale ale momentelor:

$$M^{(1)}_1 = -0{,}263 \times 44{,}8 = -11{,}8 \text{ tm}$$
$$M^{(1)}_2 = -0{,}182 \times 44{,}8 - 0{,}318 \times 8{,}6 = -10{,}9 \text{ tm}$$
$$M^{(1)}_3 = -0{,}250 \times 8{,}6 - 0{,}250 \times 8{,}6 = -4{,}3 \text{ tm}$$
$$M^{(1)}_4 = -0{,}175 \times 8{,}6 - 0{,}325 \times 29{,}5 = -11{,}1 \text{ tm}$$
$$M^{(1)}_5 = -0{,}377 \times 29{,}5 = -11{,}1 \text{ tm}$$

Schema de calcul (v. fig. 104):



ORDINEA

(1) −11,8	(6) +5,6	(5) +0,1 + 0,3 = +0,4
(5) −11,1	(5) +2,8 − 0,7 = +2,1	(2) −0,2
(2) −10,9 + 2,1 = −8,8	(6) −1,1	(6) −0,2
(4) −11,1 + 3,6 = −7,5	(1) +2,3 − 1,4 = +0,9	(1) +0,2
(1) +5,9	(4) −0,7	(4) −0,1
	(8) −0,5	

Fig. 104.

Momentele în stîlpii marginali (i = inferior, s = superior):

$$M_{1i} = +10{,}7 \frac{52{,}8}{52{,}08 + 36{,}46} = +6{,}3 \text{ tm}; \quad M_{5i} = +8{,}5 \frac{41{,}67}{41{,}67 + 31{,}25} = +4{,}9 \text{ tm}$$

$$M_{1s} = +10{,}7 \frac{36{,}46}{52{,}08 + 36{,}46} = +4{,}4 \text{ tm}; \quad M_{5s} = +8{,}5 \frac{31{,}25}{41{,}67 + 31{,}25} = +3{,}6 \text{ tm}$$

Diagrama de momente (v. fig. 105):

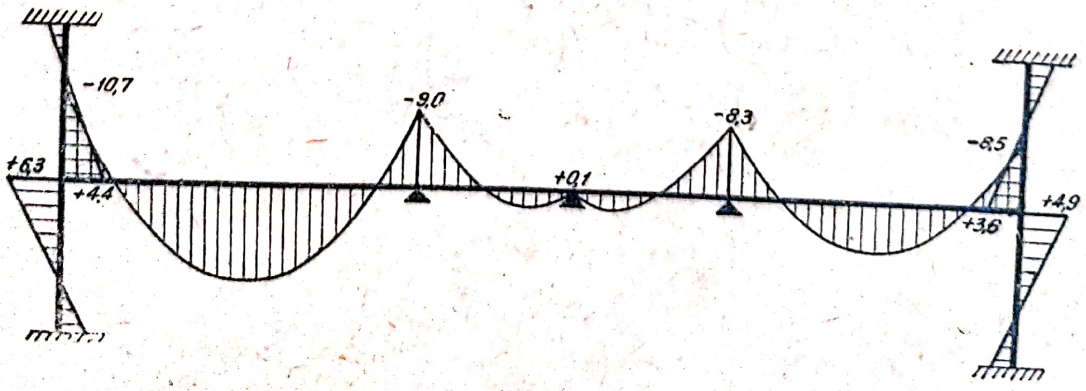


Fig. 105.

Scanned with OKEN Scanner

B. SISTEME LUCRÎND LA ÎNCOVOIERE ŞI LA RĂSUCIRE (CADRE SPAŢIALE CU NODURI FIXE)

De obicei, eforturile în elementele structurilor de rezistenţă ale construcţiilor se determină descompunînd sistemele reale spaţiale, prin neglijarea unor legături şi condiţii de continuitate, în sisteme plane, care se consideră independente unele de altele. De multe ori eforturile suplimentare datorite continuităţii spaţiale, care se neglijează prin reducerea la sisteme plane, sînt de mică importanţă şi se acoperă prin măsurile constructive curente. Uneori însă, ele pot ajunge să modifice radical starea de solicitare a unor elemente sau a întregului ansamblu şi chiar să condiţioneze însăşi stabilitatea structurii.

Un calcul static ţinînd seama de toate legăturile în spaţiu devine foarte laborios dacă se consideră cazul cel mai general. În cazuri particulare însă, de exemplu dacă structura este ortogonală (barele sînt dispuse după 3 direcţii ortogonale în spaţiu) — caz care intervine deseori în practică — şi mai ales dacă prezintă şi o oarecare regularitate a schemei, se poate face un calcul destul de riguros, fără dificultăţi teoretice deosebite, iar calculul numeric, prin folosirea metodei aproximaţiilor succesive, rămîne la acelaşi ordin de dificultate ca şi în cazul sistemelor plane.

În cele ce urmează ne vom rezuma la cazul cadrelor spaţiale cu bare dispuse ortogonal, aşa cum se întîlnesc de cele mai multe ori în structurile de rezistenţă ale clădirilor etajate avînd planşeele legate rigid cu stîlpii. În capitolul de faţă se tratează cadrele cu noduri fixe, iar în capitolul VIII (C) cadrele cu noduri deplasabile.

Cadrele spaţiale ortogonale cu noduri fixe, formate din planşee legate rigid cu stîlpii şi încărcate cu sarcini verticale pe planşee, prezintă următoarele caracteristici, în ceea ce priveşte natura deplasărilor nodurilor, de care se ţine seama în calcul :

1. Direcţiile vectorilor rotirilor sînt cuprinse în planul planşeelor, deci unul din parametrii direcţiilor rotirilor este cunoscut ; în consecinţă rămîn la fiecare nod numai cîte două necunoscute : mărimea rotirii şi direcţia vectorului rotirii în planul planşeului, sau — dacă se lucrează cu proiecţiile — proiecţiile vectorului rotirii pe cele două direcţii ortogonale ale grinzilor.

2. Se pot neglija în calcul condiţiile de egalitate a săgeţilor în punctele de încrucişare ale grinzilor secundare cu grinzile principale, deci nu apar la noduri decît condiţii de egalitate a rotirilor. De exemplu, la cadrul din fig. 106, *a*, încărcat cu o sarcină uniform distribuită pe planşeul *ABHG*, se neglijează condiţiile de egalitate a săgeţilor grinzilor secundare *CD* şi *EF* şi grinzilor principale *AG* şi *BH* în nodurile *C*, *D*, *E*, *F*, respectiv grinzile secundare se consideră ca avînd reazemele fixe.

În aceste condiţii, aplicînd în orice punct *O* al unei bare a cadrului o rotire în planul *yOz* (vectorul dirijat după direcţia *x* a grinzilor principale), toate nodurile capătă rotiri în plane paralele cu *yOz*, deci vectorii rotirilor tuturor nodurilor sînt paraleli cu *Ox*. La fel, dacă se aplică în *O* o rotire în planul *xOz* (vectorul dirijat după direcţia *y* a grinzilor secundare), toate nodurile capătă rotiri în plane paralele cu *xOz*. Rezultă că dacă se iau ca necunoscute la noduri proiecţiile θ_x şi θ_y ale vectorilor rotirilor după cele două direcţii ale grinzilor, se ajunge la un sistem de ecuaţii în care în nici o ecuaţie nu apar simultan necunoscute θ_x şi θ_y, încît *sistemul se poate descompune în două sisteme de ecuaţii fără necunoscute comune*, unul conţinînd

necunoscutele θ_x şi celălalt necunoscutele θ_y. Fiecare sistem de ecuaţii se poate rezolva separat.

Pentru rezolvarea prin aproximaţii succesive pe bază de schemă de transmiteri, această proprietate capătă o importanţă deosebită, întrucît în fiecare din cele două sisteme de ecuaţii rămîne cîte o singură necunoscută la fiecare nod şi deci cadrul apare în calcul ca un sistem cu legături de

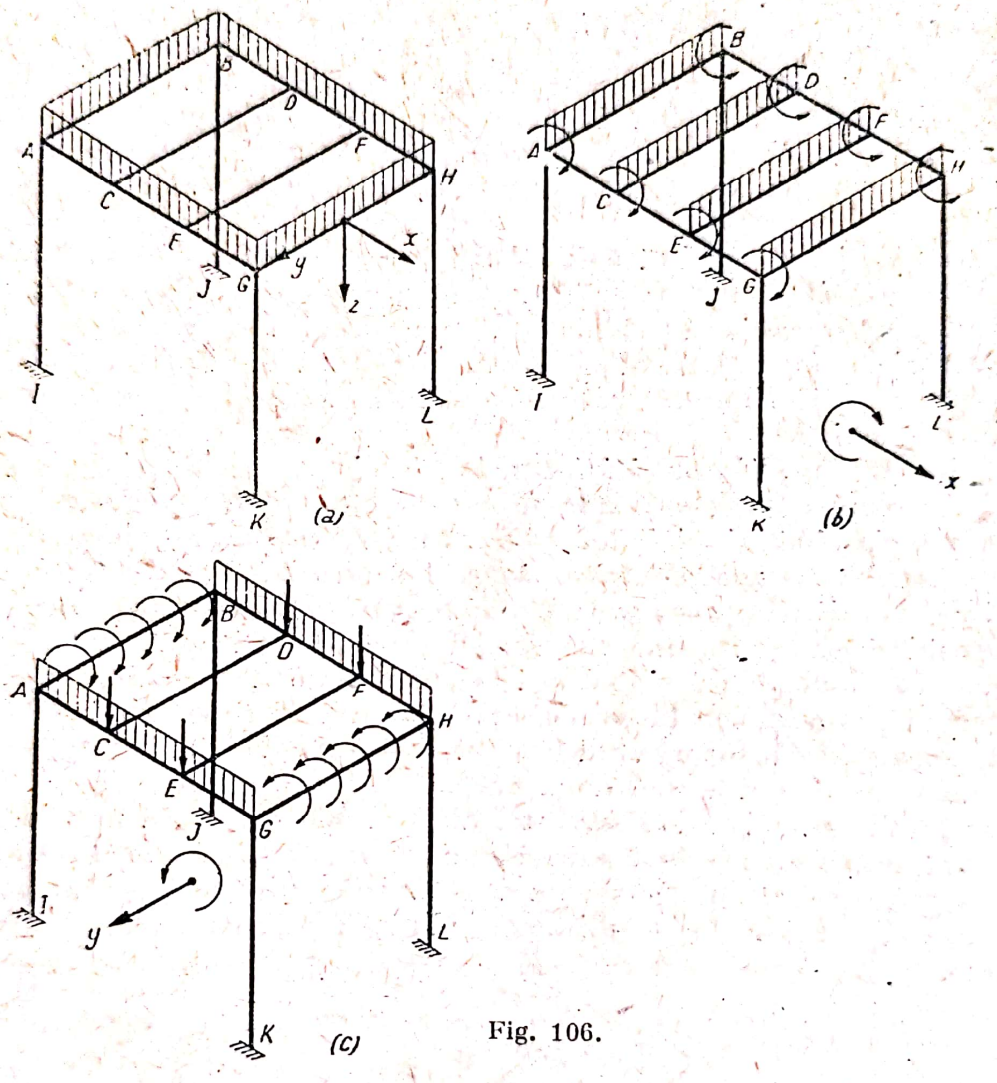


Fig. 106.

tipul I, cu toate avantajele care decurg din aceasta, după cum s-a arătat în cap. III.

Rezolvarea comportă două etape : În prima etapă se consideră blocate rotirile în planele xOz ($\theta_y = 0$) şi se rezolvă sistemul de ecuaţii cuprinzînd necunoscutele θ_x. În această etapă (fig. 106, *b*), considerîndu-se numai rotirile θ_x, grinzile secundare lucrează la încovoiere, iar grinzile principale la răsucire. Grinzile secundare apar încărcate cu sarcinile aferente din planşeu, iar grinzile principale numai cu momente rotind în planul secţiunii lor transversale (momentele de încastrare ale grinzilor secundare şi eventuale momente exterioare : din plăci în consolă etc.). Punctele de rezemare ale grinzilor secundare pe grinzile principale (*C*, *D*, *E*, *F*) se consideră fixe la translaţii. Se determină momentele încovoietoare şi forţele tăietoare în grinzile secundare, momentele de răsucire în grinzile principale şi componentele în planele yOz ale momentelor încovoietoare în stîlpi.

În etapa a doua se consideră blocate rotirile în planele yOz ($\theta_x = 0$) și se rezolvă sistemul de ecuații cuprinzînd necunoscutele θ_y. În această etapă (fig. 106, *c*), considerîndu-se numai rotirile θ_y, grinzile secundare lucrează la răsucire, iar grinzile principale la încovoiere. Grinzile principale apar încărcate cu sarcinile verticale aferente (reacțiunile grinzilor secundare și eventuale sarcini directe), iar grinzile secundare numai cu momente rotind în planul secțiunii lor transversale (momentele de încastrare ale plăcilor etc.). Dacă schema nu este simetrică în raport cu un plan xOz, adică rotirile nodurilor corespunzătoare ale grinzilor principale nu sînt egale, grinzile secundare se încarcă și cu momente de răsucire prin condițiile de continuitate la noduri. Se determină din etapa a doua : momentele încovoietoare și forțele tăietoare în grinzile principale, momentele de răsucire în grinzile secundare și componentele în planele xOz ale momentelor încovoietoare în stîlpi.

Prin neglijarea rigidității la răsucire a grinzilor, sistemul spațial se reduce la o serie de sisteme plane independente, respectiv sistemul de ecuații se împarte într-o serie de sisteme de ecuații fără necunoscute comune. Necunoscutele comune care dispar prin neglijarea rigidității la răsucire a grinzilor sînt rotirile barelor care lucrează la răsucire.

În concluzie :

a) *Dacă se neglijează rigiditatea la răsucire a barelor, sistemul spațial poate fi descompus într-un număr de sisteme plane independente.*

b) *Considerînd și rigiditatea la răsucire, rezolvarea poate fi totuși împărțită în două etape, deoarece sistemul de ecuații este format din două grupuri de ecuații fără necunoscute comune, care se pot rezolva independent.*

Considerarea legăturilor spațiale nu prezintă totdeauna același interes practic. Uneori efectele acestor legături (momente de răsucire, modificări în diagrama momentelor încovoietoare) prezintă o importanță mai mică. De asemenea, există cazuri cînd rezultă momente de răsucire mai importante numai în una din cele două etape ale rezolvării sistemului spațial. De exemplu la un cadru de felul celui din fig. 106 se știe că momentele de răsucire importante care apar sînt cele din grinzile principale. În asemenea cazuri, se poate eventual ține seama de legăturile spațiale numai în etapa I, iar în etapa II să se neglijeze rigiditățile la răsucire ale grinzilor secundare.

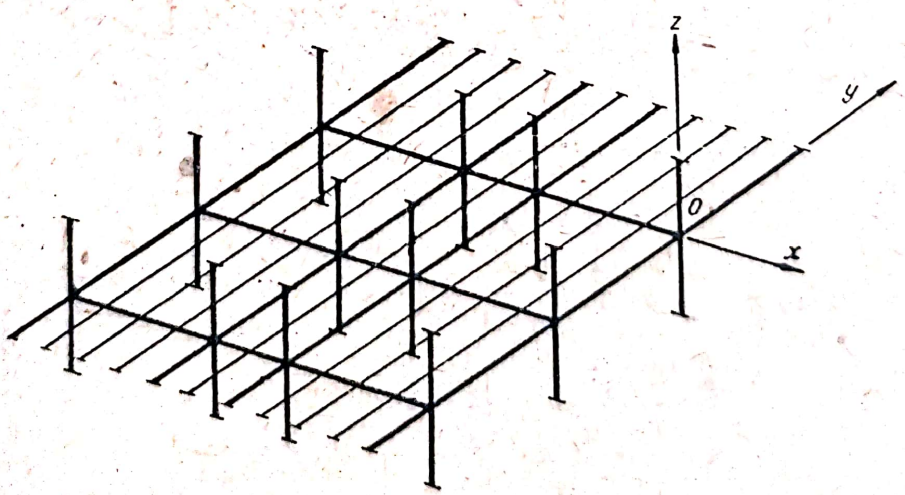


Fig. 107.

În fig. 107, 110 și 111 sînt reprezentate cîteva tipuri de structuri spațiale în cadre, întîlnite obișnuit la clădirile etajate.

În fig. 107 s-a reprezentat o porțiune de etaj curent dintr-o structură în cadre etajate, cu grinzile principale dispuse paralel cu latura mică a construcției (Ox) și grinzile secundare longitudinale (Oy). Dacă se neglijează rigiditățile la răsucire ale barelor, sistemul spațial se descompune în sisteme plane :

— paralel cu xOz o serie de cadre transversale formate din grinzile principale și stîlpi ;

— paralel cu yOz o serie de cadre longitudinale, formate din stîlpi și grinzile secundare care reazemă direct pe stîlpi, și o serie de grinzi continue (grinzile secundare care reazemă pe grinzile principale).

Dintre aceste trei categorii de sisteme plane, cadrele longitudinale și cele transversale sînt puțin influențate de continuitatea în spațiu. În schimb, la grinzile secundare curente, considerarea legăturilor spațiale, respectiv a rigidității la răsucire a grinzilor principale, nu este lipsită de interes practic.

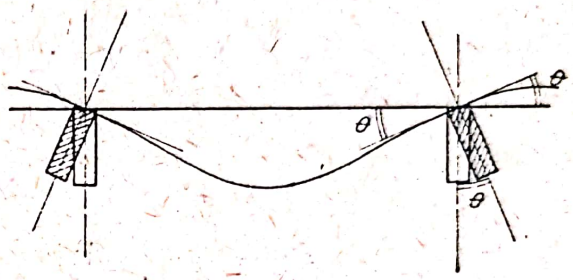


Fig. 108.

Introducînd condiția ca la fiecare rezemare a grinzii secundare pe o grindă principală rotirea prin încovoiere pe reazem a grinzii secundare să fie egală cu rotirea prin răsucire a grinzii principale (fig. 108), — respectiv condiția de echilibru, ca suma momentelor în jurul nodurilor / (a momentelor de încovoiere în grinda secundară de o parte și de alta a nodului și a momentului de răsucire cu care se încarcă grinda principală) să fie egală cu zero — apar modificări în diagrama momentelor pe grinda secundară, uneori destul de importante (fig. 109). Linia de închidere a curbei momentelor devine

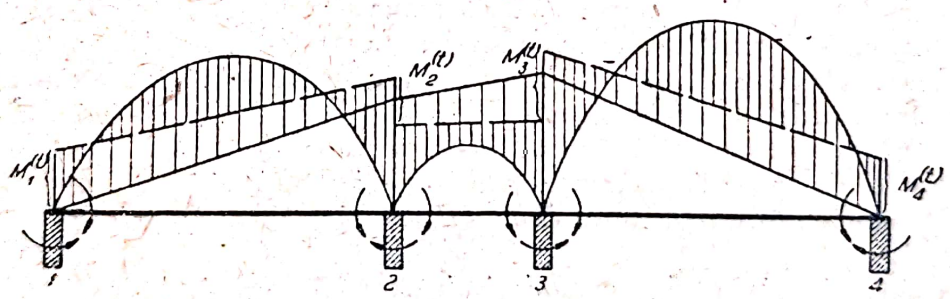


Fig. 109.

cea reprezentată punctat. La reazemele de capăt ale grinzilor secundare apar momente de încastrare parțială, care descarcă cîmpul marginal și uneori și reazemul semimarginal. De asemenea, cînd deschiderile grinzii secundare sînt neegale, momentele mari pe reazeme ale deschiderilor mari sînt în parte echilibrate de momentele de răsucire din grinzile principale, astfel că în deschiderile mici ajung momente mai reduse pe reazeme și scad totodată și eventualele momente negative în cîmp (cîmpul 2—3). Același efect de micșorare a momentelor negative în cîmpuri apare și în ipoteza de încărcare în șah.

Utilitatea unui calcul spațial apare deci la sisteme cu cadre principale transversale numai pentru planele yOz (etapa I), pe de o parte prin faptul că permite unele reduceri de momente în grinzile secundare, iar pe de altă

parte pentru evaluarea momentelor de răsucire în grinzile principale şi în special în cele de capăt, unde ating valori mai mari.

Un alt mod de dispoziţie a grinzilor în planşeu este cel arătat în fig. 110, care apare cîteodată dictat de considerente de arhitectură sau de instalaţii. Cadrele principale sînt longitudinale (xOz), iar grinzile secundare

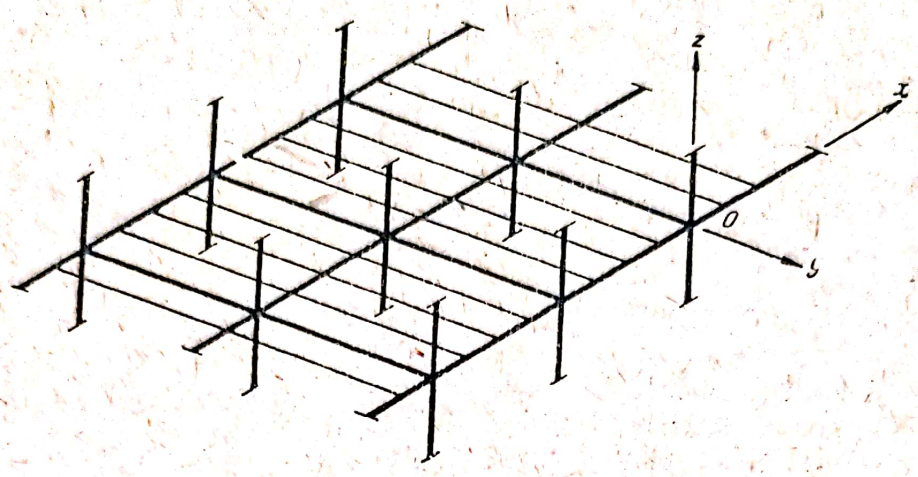


Fig. 110.

transversale (Oy). Pentru astfel de sisteme, un calcul ţinînd seama de legăturile spaţiale capătă un interes sporit. Într-adevăr, descompunînd şi aici sistemul spaţial în sisteme plane, vom avea :

— paralel cu xOz cadrele principale,

— paralel cu yOz grinzile secundare continue, rezemate pe grinzile principale şi cadrele transversale formate de stîlpi şi de grinzile care reazemă direct pe stîlpi.

Pentru primele două categorii de sisteme, aspectul problemei rămîne acelaşi ca şi în cazul din fig. 107.

O situaţie aparte prezintă cadrele transversale. Prin neglijarea rigidităţii la răsucire a grinzilor longitudinale, un astfel de cadru se consideră independent. Sarcina lui verticală este în general mică (sarcina aferentă unei grinzi secundare), deci momentele în stîlpi rezultă şi ele mici. În realitate, prin răsucirea grinzii longitudinale, se transmit la stîlpi şi momentele de încastrare ale grinzilor secundare intermediare, astfel că momentul real în stîlpi poate fi mult mai mare decît cel rezultat din sarcinile de pe cadrul transversal.

La sarcini orizontale, considerînd că toate sarcinile revin cadrului transversal, se obţin în rigla cadrului momente mari în raport cu dimensiunile ei ; de asemenea, datorită rigidităţii de obicei mici a riglei, se încarcă şi stîlpii cu momente puternice. În realitate, prin efectul răsucirii grinzii longitudinale, planşeul intervine cu toată rigiditatea lui, descărcînd stîlpii, iar momentul din riglă se repartizează şi la grinzile secundare dintre cadre.

Astfel, neglijarea legăturilor spaţiale conduce la unele subdimensionări în calculul la sarcinile verticale şi, invers, la supradimensionări în calculul la sarcini orizontale. Pentru evitarea acestora, s-au propus diferite metode simplificate de calcul, în care se consideră pentru riglele cadrelor transversale rigidităţi convenţionale sporite, ţinînd seama şi de rigiditatea la răsucire a grinzilor principale longitudinale. Formule pentru rigidităţile convenţionale ale riglelor sînt date în cartea lui *Sahnovski* (bibl. 63).

Se observă că şi aici considerarea legăturilor spaţiale apare importantă tot în etapa I a rezolvării sistemului.

Uneori, din diferite motive, dispoziția grinzilor în planșee ajunge cea din fig. 111 (transversal nu există grinzi în dreptul stîlpilor). La o structură de acest fel, nici nu se poate face o verificare la sarcini orizontale sau o evaluare a momentelor pe reazeme în grinzi și în stîlpi din sarcinile verticale, fără luarea în considerație a legăturilor în spațiu, cel puțin în etapa I.

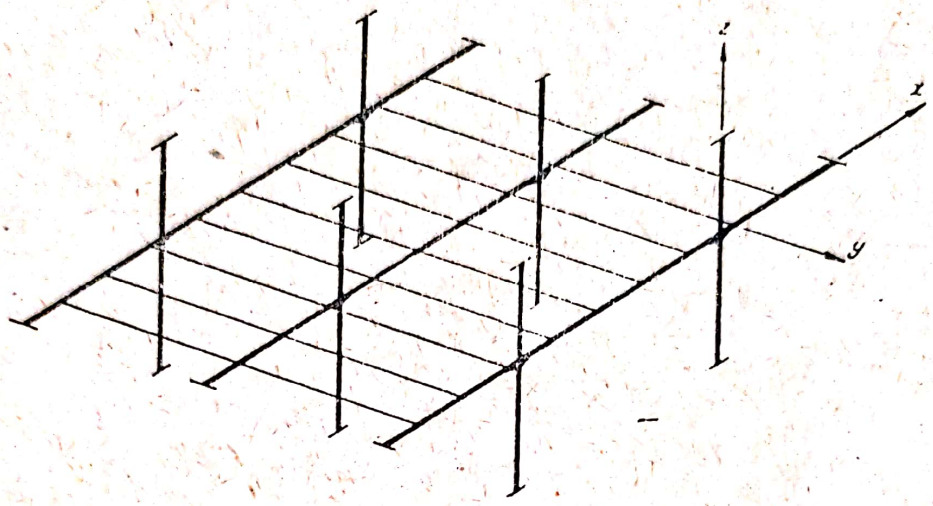


Fig. 111.

Problema calculului planșeelor din beton armat monolit ținînd seama de rigiditatea la răsucire a grinzilor a format obiectul unor studii apărute între 1935—1937, între care cel al lui *A. Șerenții* (1936), iar la noi broșura prof. *M. Hangan* (v. bibl. 37). În legătură cu aplicarea metodei aproximațiilor succesive în rezolvarea acestei probleme, a apărut în 1939 cartea lui *S. A. Roghițki* (v. bibl. 61) și recent comunicarea prof. *P. Mazilu* (v. bibl. 48), unde este tratat un cadru de tipul celui din fig. 110.

I. Relațiile între momente și rotiri

Pentru barele care lucrează la încovoiere, relațiile între momente și rotiri sînt cele stabilite în cap. IV.

Pentru barele care lucrează la răsucire, caracteristicile geometrice și de material care intervin în calcul sînt :

a) *modulul de elasticitate transversal* G :

$$G = \frac{1}{2\,(1+\mu)}\,E$$

unde : E este modulul de elasticitate longitudinal
μ — coeficientul de contracție transversală.

Pentru beton armat, luînd $\mu = \frac{1}{6}$, rezultă :

$$G = \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{6}\right)}\,E = \frac{3}{7}\,E \simeq 0{,}425\;E$$

Scanned with OKEN Scanner

b) *momentul de inerție la răsucire* $I^{(t)}$:

După Manualul Inginerului „Hütte" vol. I, tab. 14, pag. 688, la secțiuni dreptunghiulare :

$$I^{(t)} = \eta\, ab^3$$

unde : a este latura mare

b — latura mică

iar η are în funcție de $\gamma = \frac{a}{b}$ valorile din tabela 35.

Tabela 35

Momente de inerție la răsucire

$\gamma = \frac{a}{b}$	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞ (placă)
η	0,140	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

Cînd $\gamma \geqslant 1{,}5$, rezultatele după formula :

$$I^{(t)} = \frac{ab^3}{3}\left(1 - \frac{0{,}62}{\gamma}\right)$$

concordă cu cele din tabela 35, astfel că formula poate fi folosită pentru interpolare.

Aplicînd unei bare ij, încastrate la capete (fig. 112), un moment de răsucire M, în secțiunea a, momentele de încastrare la capete sînt :

$$M_i = \frac{M(l-a)}{l} \; ; \; M_j = \frac{Ma}{l}$$

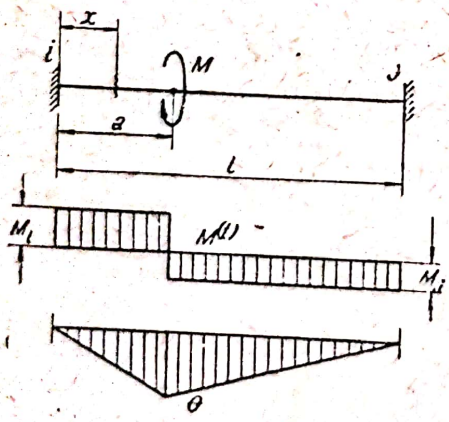


Fig. 112.

iar diagrama momentelor de răsucire $M^{(t)}$ este cea din figură, analogă cu diagrama forțelor tăietoare pentru o grindă simplu rezemată încărcată cu o sarcină concentrată.

Rotirea într-o secțiune x :

$$\theta = \int_0^x \frac{M^{(t)}}{GI^{(t)}}\, dx \qquad (5.6)$$

În fiecare etapă de calcul, sarcinile exterioare apar numai pe barele care lucrează la încovoiere, barele care lucrează la răsucire încărcîndu-se totdeauna numai cu momente la capete, datorită rotirilor nodurilor. De aceea pentru barele lucrînd la răsucire ne interesează relația între momente și rotiri numai în situația barei încărcate cu momente la capete.

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm (fig. 113) o bară ij încărcată la capete cu momentele de răsucire $M_{ij}^{(t)}$, $M_{ij}^{(t)}$. Neexistînd alte momente aplicate pe bară, pentru ca bara să fie în echilibru va trebui să avem :

$$M_{ij}^{(t)} + M_{ij}^{(t)} = 0 \tag{5.7}$$

(coresp. la 1.3)

(momentele de răsucire la cele două capete sînt egale şi de semn contrar).

Convenţia de semne rămîne aceeaşi ca şi pentru barele supuse la încovoiere : momentele, atît pe nod cît şi pe capăt de bară, pozitive cînd

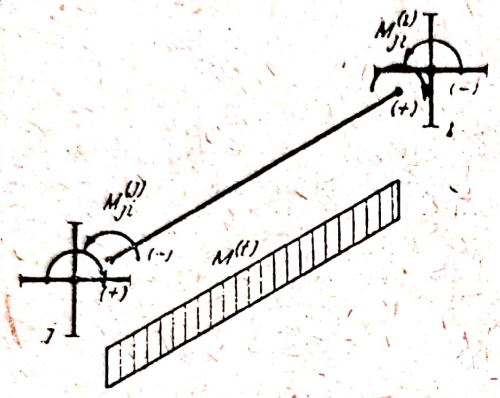


Fig. 113.

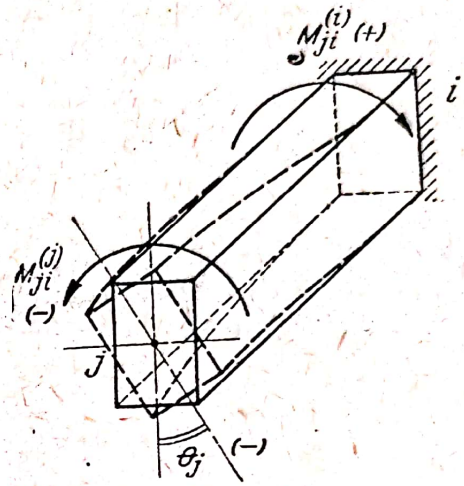


Fig. 114.

rotesc în sensul acelor de ceasornic, iar rotirile pozitive în sensul acelor de ceasornic.

De-a lungul barei, momentul de răsucire este constant.

Rotirile capetelor barei : θ_j, θ_i. Dacă $\theta_i = \theta_j$, bara se roteşte în întregime cu acest unghi, fără să se încarce cu momente de răsucire. Dacă $\theta_j > \theta_i$, momentele de răsucire apar datorită diferenţei de rotire $\theta_j - \theta_i$ între cele două capete ale barei. Putem presupune capătul i fix (încastrat), iar capătul j rotindu-se cu $\theta_j - \theta_i$.

Presupunînd bara încastrată în i (fig. 114), iar la capătul j aplicat un moment $M_{ji}^{(t)}$, rotirea capătului j în raport cu i va fi, conform relaţiei (5.6) :

$$\theta_j - \theta_i = \int_0^l \frac{M^{(t)}}{GI^{(t)}}\,dx = \frac{M_{ji}^{(t)}}{GI^{(t)}} \int_0^l dx = \frac{M_{ji}^{(t)}\, l}{GI^{(t)}}$$

sau :

$$M_{ji}^{(t)} = \frac{GI^{(t)}}{l}(\theta_j - \theta_i)$$

$$M_{ij}^{(t)} = \frac{GI^{(t)}}{l}(\theta_i - \theta_j) \tag{5.8}$$

(coresp. la 1.2′)

Relaţiile (5.8) dau expresiile momentelor în funcţie de rotiri.

Scanned with OKEN Scanner

Expresiile rotirilor în funcție de momente nu pot fi scrise, deoarece nu rotirile, ci numai diferențele lor, sînt funcție de momente. Dacă încercăm să rezolvăm ecuațiile (5.8) în raport cu θ_j și θ_i, regăsim relația (5.7).

Termenul $\frac{GI^{(t)}}{l}$ are semnificația unui coeficient de influență, reprezentînd momentul care trebuie să se aplice la capătul j pentru ca $\theta_j = 1$, cînd capătul i este încastrat ($\theta_i = 0$).

$$\nu_{jj} = \frac{GI^{(t)}}{l}$$

El poate fi denumit, prin analogie cu termenul corespunzător care apare la barele supuse la încovoiere, *rigiditatea la răsucire a barei.*

$$\boxed{T_{ji}^{(j)} = T_{ji}^{(i)} = \frac{GI^{(t)}}{l}} \qquad (5.9)$$

Dacă pentru barele încovoiate se introduc în locul rigidităților K rigiditățile practice ρ, reduse cu $4E$ — pentru barele răsucite vom introduce *rigiditățile practice la răsucire* :

$$\tau_{ji}^{(j)} = \tau_{ji}^{(i)} = \frac{T}{4E} = \boxed{\frac{G}{E} \cdot \frac{I^{(t)}}{4\,l}} \qquad (5.10)$$

Considerînd și în locul rotirilor valorile $\theta' = E\theta$, relațiile (5.8) devin :

$$\boxed{\begin{aligned} M_{ji}^{(j)} &= T_{ji}^{(j)}\,(\theta_j - \theta_i) = 4\,\tau_{ji}^{(j)}(\theta_j' - \theta_i') \\ M_{ji}^{(i)} &= T_{ji}^{(i)}\,(\theta_i - \theta_j) = 4\,\tau_{ji}^{(i)}(\theta_i' - \theta_j') \end{aligned}} \qquad (5.11)$$

Cu ajutorul relațiilor (5.7) și (5.11) se pot scrie condițiile de continuitate și de echilibru la noduri, luînd ca necunoscute rotirile sau momentele.

II. Scrierea ecuațiilor și rezolvarea lor prin iterație cînd se iau ca necunoscute rotirile nodurilor

Folosim expresiile momentelor în funcție de rotiri și scriem condițiile de echilibru la noduri.

În nodul j al unui cadru spațial ortogonal, în care se întîlnesc barele încovoiate jk și barele răsucite ji (fig. 115) :

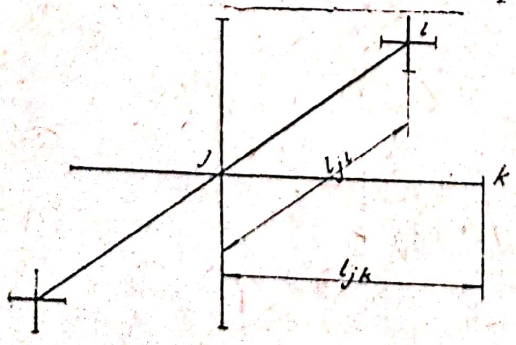


Fig. 115.

$$M_{jk}^{(j)} = -\,K_{jk}^{(j)}\left[\,\theta_j + \frac{1}{2}\,\theta_k\,\right]$$

$$M_{ji}^{(j)} = -\,T_{ji}^{(j)}\,[\theta_j - \theta_i]$$

[$M_{ji}^{(j)}$ intră cu semn schimbat față de (5.11), trecîndu-se de la momente pe bară la momente pe nod.]

Condiția de echilibru :

$$\overline{M}_j = -[\sum M_{jk}^{(j)} + \sum M_{ji}^{(j)}] = [\sum K_{jk}^{(j)} + \sum T_{ji}^{(j)}]\,\theta_j + \frac{1}{2}\sum K_{jk}^{(j)}\,\theta_k - \sum T_{ji}^{(j)}\,\theta_i$$

Explicităm necunoscuta principală θ_j :

$$\theta_j = \frac{\overline{M}_j}{\Sigma K_{jk}^{(j)} + \Sigma T_{ji}^{(j)}} - \frac{1}{2}\sum \theta_k \frac{K_{jk}^{(j)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)} + \Sigma T_{ji}^{(j)}} + \sum \theta_i \frac{T_{ji}^{(j)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)} + \Sigma T_{ji}^{(j)}} \qquad (5.12)$$

Rezultă valoarea inițială a rotirii :

$$\theta_j^{(1)} = \frac{\overline{M}_j}{\Sigma K_{jk}^{(j)} + \Sigma T_{ji}^{(j)}}; \quad \theta_j^{\prime(1)} = \frac{\overline{M}_j}{4\cdot[\Sigma \rho_{jk}^{(j)} + \Sigma \tau_{ji}^{(j)}]} \qquad (5.13)$$

Comparînd expresia (5.13) cu cea corespunzătoare din cazul cadrelor plane (4.12), se observă că a apărut în plus la numitor termenul $\sum T_{ji}^{(j)}$, reprezentînd rigiditățile barelor răsucite *ji*. Dacă se neglijează aceste rigidități, se recade peste cazul cadrelor plane.

Coeficientul de transmitere de la *k* la *j* :

$$t_{k\to j} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{K_{jk}^{(j)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)} + \Sigma T_{ji}^{(j)}} = -\frac{1}{2}\frac{\rho_{jk}^{(j)}}{\Sigma \rho_{jk}^{(j)} + \Sigma \tau_{ji}^{(j)}} \qquad (5.14)$$

Și aici ceea ce apare în plus față de expresia corespunzătoare (4.13) de la cadrele plane este termenul $\sum T_{ji}^{(j)}$ de la numitor.

Coeficientul de transmitere de la *i* la *j* :

$$t_{i\to j} = +\frac{T_{ji}^{(j)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)} + \Sigma T_{ji}^{(j)}} = +\frac{\tau_{ji}^{(j)}}{\Sigma \rho_{jk}^{(j)} + \Sigma \tau_{ji}^{(j)}} \qquad (5.15)$$

Coeficienții de transmitere de-a lungul barelor încovoiate sînt negativi, iar cei de-a lungul barelor răsucite, pozitivi. Se observă de asemenea din (5.15) că $t_{i\to j}$ nu sînt afectați de factorul 1/2, ceea ce are repercusiuni defavorabile asupra rapidității convergenței iterației. În cazul cadrelor plane, unde toți coeficienții de transmitere sînt afectați de acest factor, avem în fiecare ecuație :

$$\sum |t_{k\to j}| = \frac{1}{2} < 1$$

deci criteriul lui *Wittmeyer* este satisfăcut și asigurată o suficientă rapiditate a convergenței iterației. De aceeași situație ne apropiem și în cazul cadrelor spațiale, cînd rigiditățile barelor răsucite sînt mici în raport cu cele ale barelor încovoiate, astfel că în suma $\sum |t_{k\to j}| + \sum |t_{i\to j}|$ termenul $\sum |t_{k\to j}|$ este preponderent. Cu cît rigiditățile barelor răsucite cresc în raport cu cele ale barelor încovoiate și termenul $\sum |t_{i\to j}|$ devine preponderent, va-

loarea sumei coeficienților de transmitere spre j se apropie de 1. La limită, pentru $\sum |t_{k\to j}| \simeq 0$, avem :

$$\sum |t_{i\to j}| \simeq 1$$

(limita convergenței după criteriul lui *Wittmeyer*).

Deci, în cazul general :

$$\frac{1}{2} < \sum |t_{k\to j}| + \sum |t_{i\to j}| < 1$$

astfel încît convergența este asigurată, însă rapiditatea ei este mai mică decît la cadrele plane cu noduri fixe, și cu atît mai mult cu cît cresc rigiditățile relative ale barelor răsucite *ji*. De obicei, deși barele *ji* sînt grinzile principale, iar *jk* grinzile secundare, deci *ji* au secțiuni mai mari, totuși rigiditățile lor la răsucire nu sînt prea mari, deoarece în valoarea lui $I^{(t)}$ intră la puterea a 3-a latura mică a secțiunii, iar :

$$\tau = \frac{G}{E} \cdot \frac{I^{(t)}}{4\,l} = \frac{0{,}425}{4} \frac{I^{(t)}}{l} = 0{,}106 \frac{I^{(t)}}{l}$$

Astfel, de exemplu, la o bară avînd raportul laturilor secțiunii transversale 2 :

$$I^{(t)} = 0{,}229\, b^3 h = 0{,}0287\, h^4 ; \quad I = \frac{bh^3}{12} = 0{,}0417\ h^4$$

$$\tau = \frac{0{,}425}{4} \times \frac{0{,}0287\ h^4}{l} = 0{,}00305 \frac{h^4}{l}$$

iar

$$\rho = 0{,}0417 \frac{h^4}{l}, \quad \text{adică } \tau = \frac{1}{13{,}7} \rho$$

(rigiditatea la răsucire este de 13,7 ori mai mică decît cea la încovoiere).

Mersul calculului este același ca și în cazul unui cadru plan. În ceea ce privește barele răsucite, este de observat că axele lor rămînînd nedeformate după răsucire, ele pot fi fragmentate în oricîte bare, prin introducerea de noduri intermediare. Pentru calcul este util ca grinzile principale să fie fragmentate, considerîndu-se ca noduri toate punctele lor de intersecție cu grinzi secundare. Astfel, la grinda *1—2* din fig. 116, vom considera în calcul punctele *3*, *4*, *5*, *6*, *7* ca noduri, iar porțiunile *1—3*, *3—4*, etc. ca bare independente.

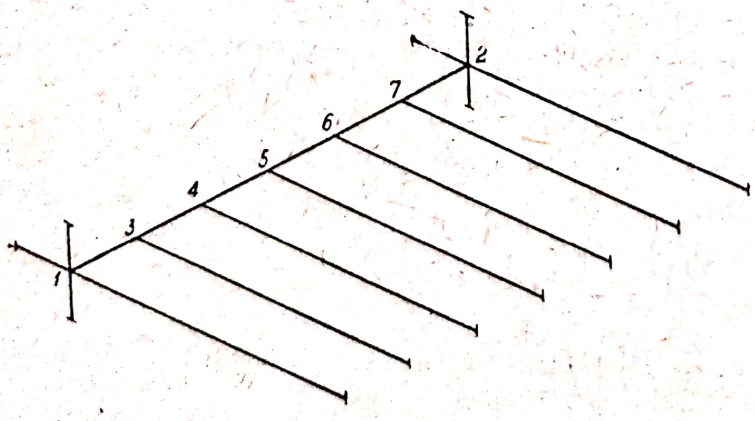


Fig 116.

Posibilitatea introducerii de noduri oriunde pe parcursul unei bare răsucite permite simplificări la sistemele simetrice, în care momentele de răsucire în axele de simetrie fiind egale cu zero, se pot introduce în barele

răsucite articulații. Conform relației (5.7), momentele la capetele unei bare trebuind să fie egale, o bară răsucită, articulată la un capăt i va avea și la celălalt capăt j $M = 0$, deci $T_{ji}^{(i)} = 0$ și bara nu mai apare pe schema de transmiteri.

Spre capetele de bare perfect încastrate nu se fac transmiteri de rotiri, nici pe barele încovoiate, nici pe cele răsucite.

În exemplul 18 este calculat un cadru spațial cu noduri fixe, prin metoda „transmiterii rotirilor".

Exemplul 18. Cadru spațial cu noduri fixe, calculat prin metoda transmiterii rotirilor.

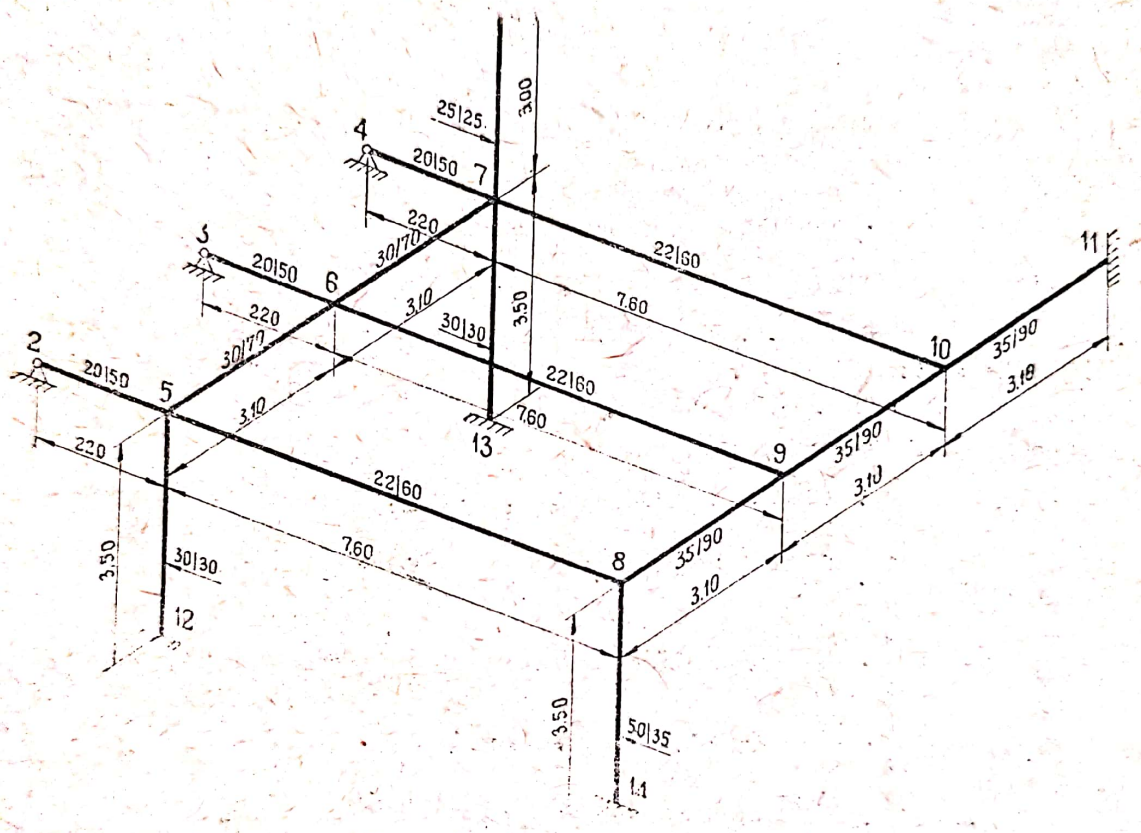


Fig. 117

Se calculează cadrul din fig. 117 în etapa I (pentru componentele vectorilor rotirilor după direcțiile grinzilor principale $5-7$, $8-11$, ținînd seama de rigiditatea la răsucire a grinzilor principale). Se consideră sarcinile exterioare numai pe grinzile secundare ($2-8$, $3-9$, $4-10$).

— pe deschiderile $2-5$, $3-6$, $4-7$ ... $q = 3{,}7$ t/m
— pe deschiderile $5-8$, $6-9$, $7-10$... $q = 2{,}2$ t/m

Rigiditățile barelor încovoiate

Bara	b (dm)	h (dm)	I (dm⁴)	l (dm)	ρ
$2-5$, $3-6$, $4-7$	2,0	5,0	20,83	22	$\frac{3}{4}\,0{,}951 = 0{,}714$
$5-8$, $6-9$, $7-10$	2,2	6,0	39,60	76	0,521
$1-7$	2,5	2,5	3,25	30	0,108
$5-12$, $7-13$	3,0	3,0	6,75	35	0,193
$8-14$	5,0	3,5	17,90	35	0,512

Scanned with OKEN Scanner

Rigiditățile barelor răsucite

Bara	b	h	$\gamma = \frac{h}{b}$	η	$I^{(t)} = \eta b^3 h$	l	$\tau = \frac{0,425}{4} \frac{I^{(t)}}{l}$
5—6, 6—7	3,0	7,0	2,33	0,244	46,2	31	0,159
8—9, 9—10, 10—11	3,5	9,0	2,57	0,253	97,6	31	0,336

Sumele rigidităților la noduri :

Nodul 5 :

$$0,714 + 0,521 + 0,193 + 0,159 = 1,587$$

Nodul 6 :

$$0,714 + 0,521 + 2 \times 0,159 = 1,553$$

Nodul 7 :

$$0,714 + 0,521 + 0,159 + 0,108 + 0,193 = 1,695$$

Nodul 8 :

$$0,521 + 0,336 + 0,512 = 1,369$$

Nodurile 9,10 :

$$0,521 + 2 \times 0,336 = 1,193$$

Coeficienții de transmitere :

$$t_{5\to 8} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,521}{1,369} = -0,190; \quad t_{5\to 6} = t_{7\to 6} = +\frac{0,159}{1,553} = +0,102$$

$$t_{8\to 5} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,521}{1,587} = -0,164; \quad t_{6\to 5} = +\frac{0,159}{1,587} = +0,100$$

$$t_{6\to 9} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,521}{1,193} = -0,218; \quad t_{6\to 7} = +\frac{0,159}{1,695} = +0,094$$

$$t_{9\to 6} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,521}{1,553} = -0,168; \quad t_{8\to 9} = t_{9\to 10} = t_{10\to 9} = +\frac{0,336}{1,193} = +0,282$$

$$t_{7\to 10} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,521}{1,193} = -0,218; \quad t_{9\to 8} = +\frac{0,336}{1,369} = +0,246$$

$$t_{10\to 7} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,521}{1,695} = -0,154$$

Coeficienții de transmitere, avînd semne diferite, trebuie să fie înscriși pe schemă cu semnele lor.

Momentele de încastrare perfectă :

$$\overline{M}_{2-5,3-6,4-7} = \frac{3,7 \times 2,20^2}{8} = 2,2 \text{ tm}$$

$$\overline{M}_{3-6,6-9,7-10} = \frac{2,2 \times 7,60^2}{12} = 10,6 \text{ tm}$$

Valorile inițiale ale rotirilor (multiplicate cu 10) :

$$\theta_5'^{(1)} = 10 \frac{+10,6 - 2,2}{4 \times 1,587} = +13,25; \quad \theta_8'^{(1)} = 10 \frac{-10,6}{4 \times 1,369} = -19,50;$$

$$\theta_6'^{(1)} = 10 \frac{+10,6 - 2,2}{4 \times 1,553} = +13,55; \quad \theta_9'^{(1)} = \theta_{10}'^{(1)} = 10 \frac{-10,6}{4 \times 1,193} = -22,40;$$

$$\theta_7'^{(1)} = 10 \frac{+10,6 - 2,2}{4 \times 1,695} = +12,40;$$

Schema de transmiteri (v. fig. 119):

Deşi cadrul este spaţial, schema rămîne plană, deoarece toate nodurile interioare (*5—10*) sînt în acelaşi plan. La cadre etajate, vor fi necesare scheme separate pentru fiecare etaj, cu transmiteri între schemele etajelor, ca în fig. 118.

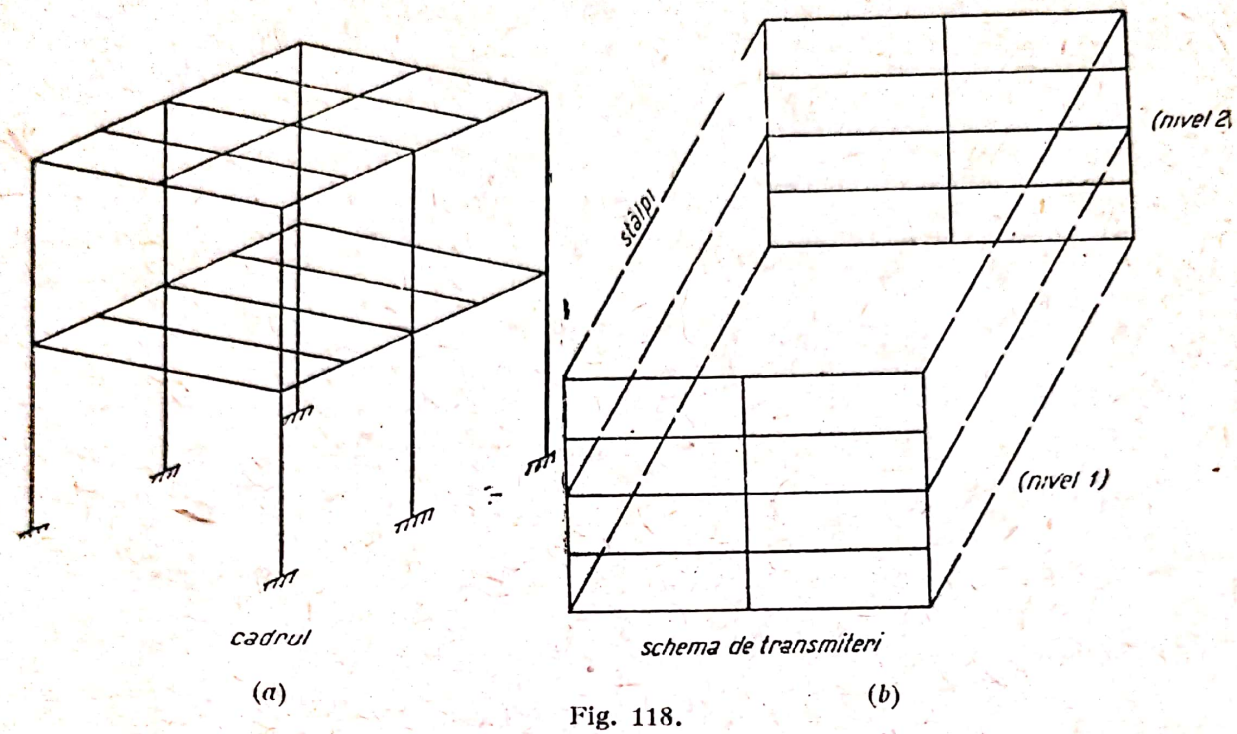


Fig. 118.

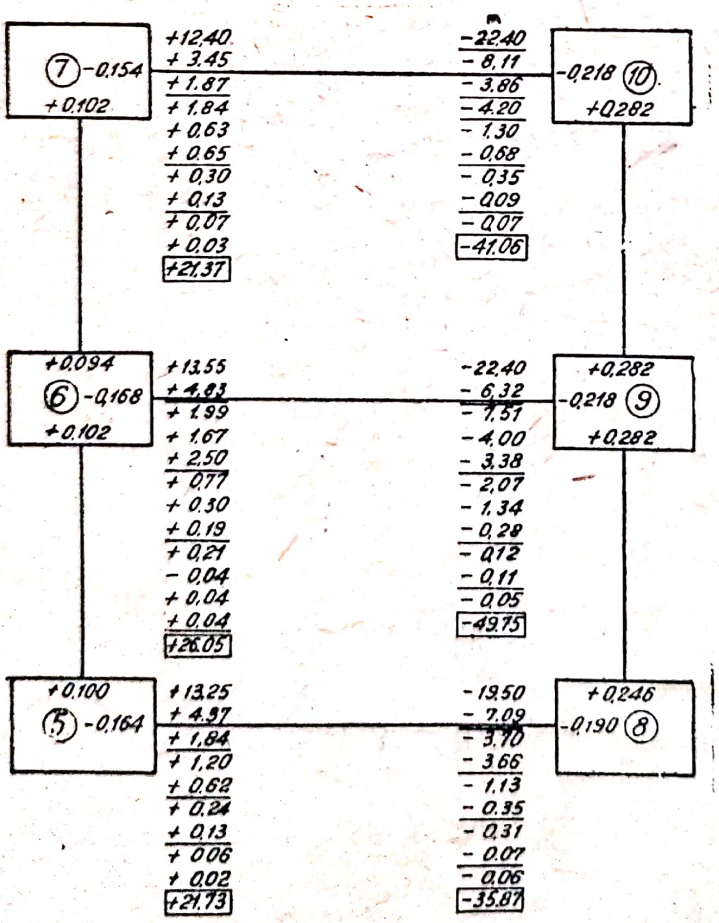


Fig. 119.

ORDINEA

⑩ -22.40
⑨ -22.40 -6.32 = -28.72
⑧ -19.50 -7.09 = -26.59
⑥ +13.55 +4.83 = +18.38
⑤ +13.25 +4.37 +1.84 = +19.46
⑦ +12.40 +3.45 +1.87 = +17.72
⑩ -8.11 -3.86 = -11.97
⑨ -7.51 -4.00 -3.38 = -14.89
⑧ -3.70 -3.66 = -7.36
⑥ +1.99 +1.67 +2.50 = +6.16
⑩ -4.20
⑨ -2.07 -1.34 -1.19 = -4.60
⑦ +1.84 +0.63 +0.65 = +3.12
⑩ -1.30 -0.68 = -1.98
⑤ +1.20 +0.62 = +1.82
⑧ -1.13 -0.35 = -1.48
⑥ +0.77 +0.30 +0.19 = +1.26
⑨ -0.56 -0.42 -0.28 = -1.26
⑦ +0.30 +0.13 = +0.43
⑤ +0.24 +0.13 = +0.37
⑩ -0.35 -0.09 = -0.44
⑧ -0.31 -0.07 = -0.38
⑨ -0.12 -0.11 = -0.23
⑥ +0.21 -0.04 +0.04 +0.04 = +0.25

Scanned with OKEN Scanner

Iterația (fig. 119) începe de la nodul *10*, unde tendința de rotire $0'^{(1)} = -22{,}40$ este cea mai mare. Se transmite:

$$\begin{aligned} &- \text{spre } 7: \quad -22{,}40\ (-0{,}154) = +3{,}45 \\ &- \text{spre } 9: \quad -22{,}40\ (+0{,}282) = -6{,}32 \end{aligned}$$

Urmează deblocarea nodului *9* unde, ținînd seama și de cantitatea transmisă de la *10*, tendința de rotire este $-22{,}40 - 6{,}32 = -28{,}72$.

Se transmite:

$$\begin{aligned} &- \text{spre } 10: \quad -28{,}72\ (+0{,}282) = -8{,}11 \\ &- \text{spre } 8: \quad -28{,}72\ (+0{,}246) = -7{,}09 \\ &- \text{spre } 6: \quad -28{,}72\ (-0{,}168) = +4{,}83 \end{aligned}$$

Calculul urmează în ordinea indicată în dreapta schemei.

Momente încovoietoare:

$$M^{(5)}_{5-8} = -\frac{4}{10}\,0{,}521\left(21{,}73 - \frac{1}{2}\,35{,}87\right) + 10{,}6 = +9{,}8 \text{ tm}$$

$$M^{(8)}_{5-8} = -\frac{4}{10}\,0{,}521\left(-35{,}87 + \frac{1}{2}\,21{,}73\right) - 10{,}6 = -5{,}5 \text{ tm}$$

$$M^{(6)}_{6-9} = -\frac{4}{10}\,0{,}521\left(26{,}05 - \frac{1}{2}\,49{,}75\right) + 10{,}6 = +10{,}3 \text{ tm}$$

$$M^{(9)}_{6-9} = -\frac{4}{10}\,0{,}521\left(-49{,}75 + \frac{1}{2}\,26{,}05\right) - 10{,}6 = -3{,}1 \text{ tm}$$

$$M^{(7)}_{7-10} = -\frac{4}{10}\,0{,}521\left(21{,}37 - \frac{1}{2}\,41{,}06\right) + 10{,}6 = +10{,}5 \text{ tm}$$

$$M^{(10)}_{7-10} = -\frac{4}{10}\,0{,}521\left(-41{,}06 + \frac{1}{2}\,21{,}37\right) - 10{,}6 = -4{,}3 \text{ tm}$$

$$M^{(5)}_{2-5} = -\frac{4}{10}\,0{,}714 \times 21{,}73 - 2{,}2 = -8{,}4 \text{ tm}$$

$$M^{(6)}_{3-6} = -\frac{4}{10}\,0{,}714 \times 26{,}05 - 2{,}2 = -9{,}7 \text{ tm}$$

$$M^{(7)}_{4-7} = -\frac{4}{10}\,0{,}714 \times 21{,}37 - 2{,}2 = -8{,}3 \text{ tm}$$

$$M^{(5)}_{5-12} = -\frac{4}{10}\,0{,}193 \times 21{,}73 = -1{,}7 \text{ tm}; \quad M^{(12)}_{5-12} = \frac{1}{2}\,M^{(5)}_{5-12} = -0{,}9 \text{ tm}$$

$$M^{(8)}_{8-14} = -\frac{4}{10}\,0{,}512\,(-35{,}87) = +7{,}3 \text{ tm}; \quad M^{(14)}_{8-14} = \frac{1}{2}\,M^{(8)}_{8-14} = +3{,}7 \text{ tm}$$

$$M^{(7)}_{1-7} = -\frac{4}{10}\,0{,}108 \times 21{,}37 = -0{,}9 \text{ tm}; \quad M^{(1)}_{1-7} = \frac{1}{2}\,M^{(7)}_{1-7} = -0{,}5 \text{ tm}$$

$$M^{(7)}_{7-13} = -\frac{4}{10}\,0{,}193 \times 21{,}37 = -1{,}6 \text{ tm}; \quad M^{(13)}_{7-13} = \frac{1}{2}\,M^{(7)}_{7-13} = -0{,}8 \text{ tm}$$

Momente de torsiune:

$$M^{(5)}_{5-6} = -\frac{4}{10}\,0{,}159\,(21{,}73 - 26{,}05) = +0{,}3 \text{ tm}; \quad M^{(6)}_{5-6} = -0{,}3 \text{ tm}$$

$$M^{(6)}_{6-7} = -\frac{4}{10}\,0{,}159\,(26{,}05 - 21{,}37) = -0{,}3 \text{ tm}; \quad M^{(7)}_{6-7} = +0{,}3 \text{ tm}$$

$$M^{(8)}_{8-9} = -\frac{4}{10}\,0{,}336\,(-35{,}87 + 49{,}75) = -1{,}8 \text{ tm}; \quad M^{(9)}_{8-9} = +1{,}8 \text{ tm}$$

$$M^{(9)}_{9-10} = -\frac{4}{10}\,0{,}336\,(-49{,}75 + 41{,}06) = +1{,}2 \text{ tm}; \quad M^{(10)}_{9-10} = -1{,}2 \text{ tm}$$

$$M^{(10)}_{10-11} = +\frac{4}{10}\,0{,}336 \times 41{,}06 = +5{,}5 \text{ tm}; \quad M^{(11)}_{10-11} = -5{,}5 \text{ tm}$$

Scanned with OKEN Scanner

Verificarea echilibrului în jurul nodurilor : de exemplu nodul 7 : + 10,5 − 8,3 − 0,9 − 1,6 + + 0,3 = 0.

Diagrama de momente v. (fig. 120) :

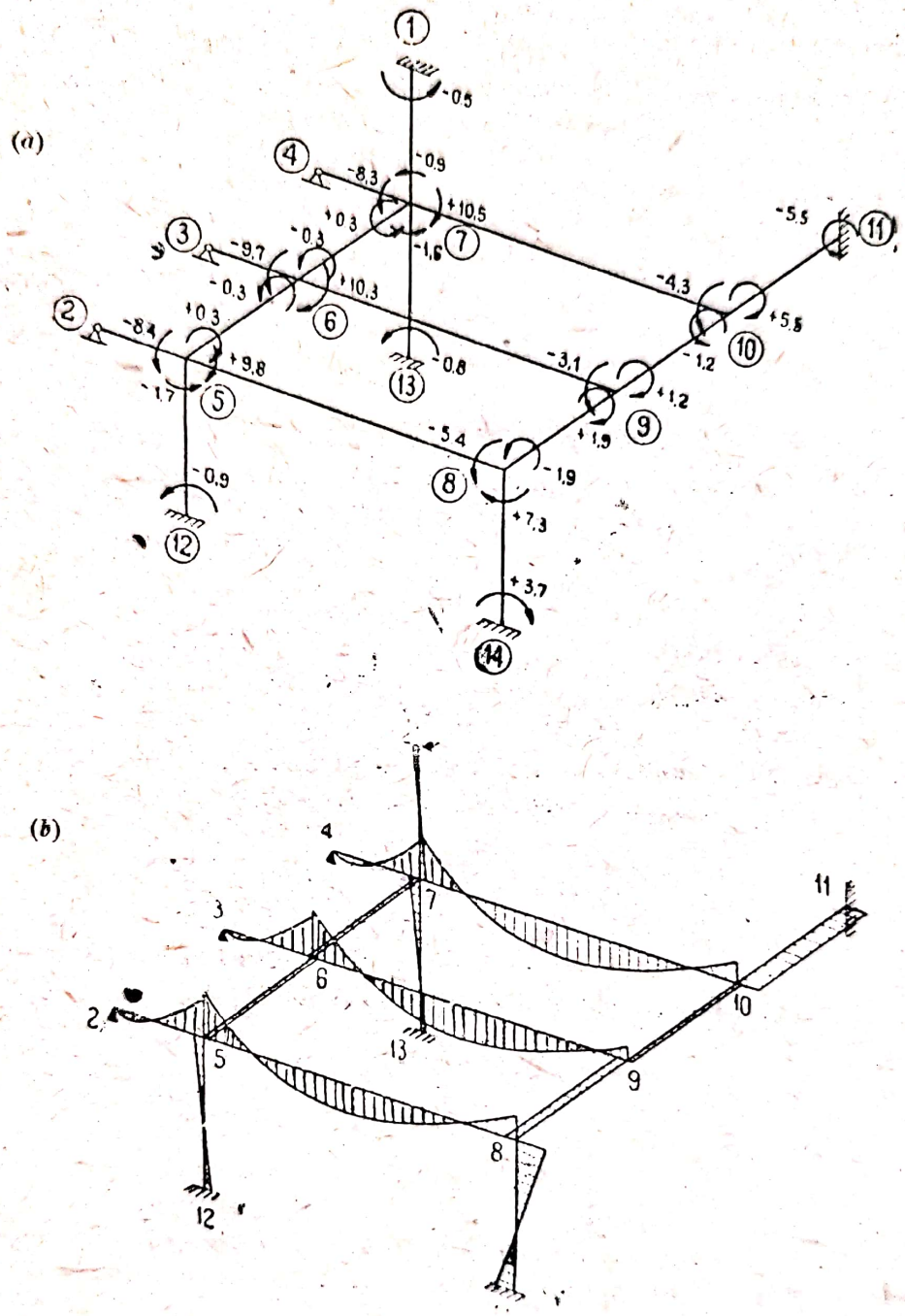


Fig. 120

Verificarea echilibrului grinzilor răsucite :

— Grinda *5—7*

Moment exterior + 10,3 − 9,7 = + 0,6 tm, aplicat în punctul *6*.

Momente pe reazeme −0,3 − 0,3 = −0,6 tm.

— Grinda *8—11*

Momente exterioare + 3,1 tm în *9* și + 4,3 tm. în *10* (fig. 121)

+ 3,1 + 4,3 = + 7,4 tm.

Momente pe reazeme − 1,9 − 5,5 = − 7,4 tm.

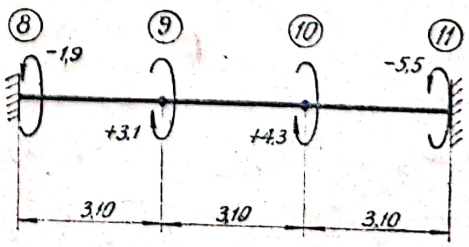


Fig. 121.

Urmează apoi după acecaşi metodă calculul în etapa II, în care se consideră ca sarcini reacţiunile grinzilor secundare pe grinzile principale şi se determină momentele încovoietoare în grinzile principale şi momentele de răsucire în cele secundare. În etapa II se poate renunţa eventual la considerarea legăturilor spaţiale.

III. Scrierea ecuaţiilor şi rezolvarea lor prin iteraţie cînd se iau ca necunoscute momentele la capetele barelor

La cadrele plane, sistemul de ecuaţii avînd ca necunoscute momentele, era (4.16, 4.17) :

$$\begin{cases} (4.16)\quad \theta_j = \dfrac{l_{jk}}{6\,E\,I_{jk}}\left[-2\,(M_{jk}^{(j)} - \overline{M}_{jk}^{(j)}) + (M_{jk}^{(k)} - \overline{M}_{jk}^{(k)})\right] \text{ (ecuaţiile capetelor de bare încovoiate)} \\ (4.17)\quad \sum M_{jk}^{(j)} = 0 \quad \text{(ecuaţiile suplimentare la noduri)} \end{cases}$$

Luînd în consideraţie şi rigiditatea la răsucire a barelor normale pe planul în care acţionează sarcinile, intervin în plus ecuaţiile capetelor de bare răsucite (5.7) :

$$M_{ji}^{(j)} + M_{ji}^{(i)} = 0$$

iar ecuaţiile de nod devin :

$$\sum M_{jk}^{(j)} + \sum M_{ji}^{(j)} = 0 \qquad (5.16)$$

Coeficienţii de transmitere de-a lungul barelor încovoiate se obţin din ecuaţiile (4.16) care nu s-au modificat, deci rămîn :

$$t_{k\to j} = t_{j\to k} = +\frac{1}{2}$$

Coeficienţii de transmitere de-a lungul barelor răsucite se obţin din ecuaţiile (5.7). Explicitînd necunoscuta principală $M_{ji}^{(j)}$:

$$M_{ji}^{(j)} = -\,M_{ji}^{(i)}$$

deci

$$\boxed{t_{i\to j} = -1} \qquad (5.17)$$

Deblocînd un nod j, încărcat cu un moment exterior $\overline{M}_j$, în timp ce nodurile vecine k şi i rămîn blocate, el capătă, conform relaţiei (5.13), o rotire :

$$\theta_j = \frac{\overline{M}_j}{\Sigma K_{jk}^{(j)} + \Sigma T_{ji}^{(j)}}$$

Capetele barelor încovoiate se încarcă cu momentele :

$$M_{jk}^{(j)} = -\,K_{jk}^{(j)}\,\theta_j = -\,\overline{M}_j\,\frac{K_{jk}^{(j)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)} + \Sigma T_{ji}^{(j)}} = -\,\overline{M}_j\,r_{jk}^{(j)}$$

iar capetele barelor răsucite cu momentele :

$$M_{ji}^{(j)} = -\,T_{ji}^{(j)}\,\theta_j = -\,\overline{M}_j\,\frac{T_{ji}^{(j)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)} + \Sigma T_{ji}^{(j)}} = -\,\overline{M}_j\,r_{ji}^{(j)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienții de repartiție capătă deci expresiile :

$$r_{jk}^{(j)} = \frac{K_{jk}^{(j)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)} + \Sigma T_{ji}^{(j)}} = \frac{\rho_{jk}^{(j)}}{\Sigma \rho_{jk}^{(j)} + \Sigma \tau_{ji}^{(j)}}$$

$$r_{ji}^{(j)} = \frac{T_{ji}^{(j)}}{\Sigma K_{jk}^{(j)} + \Sigma T_{ji}^{(j)}} = \frac{\tau_{ji}^{(j)}}{\Sigma \rho_{jk}^{(j)} + \Sigma \tau_{ji}^{(j)}} \qquad (5.18)$$

Se observă că relația între coeficienții de transmitere din metoda rotirilor și coeficienții de transmitere și de repartiție din metoda repartizării momentelor se păstrează :

$$\left.\begin{aligned} t_{k\to j}^{(0)} &= -\, t_{j\to k}^{(M)}\, r_{jk}^{(j)} = -\,\frac{1}{2}\, r_{jk}^{(j)} \\ t_{i\to j}^{(0)} &= -\, t_{j\to i}^{(M)}\, r_{ji}^{(j)} = -\, r_{ji}^{(j)} \end{aligned}\right\} \qquad (5.19)$$

În expresiile coeficienților de transmitere din metoda repartizării momentelor apare și mai direct influența rigidității barelor răsucite asupra rapidității convergenței iterației. Prin transmiterile pe barele răsucite, cu coeficientul -1, nu se obține nici o convergență, valorile corecțiilor scăzînd numai prin transmiterea pe barele încovoiate, cu coeficientul $+\frac{1}{2}$. Cu cît coeficienții de repartiție ai barelor răsucite sînt mai mari, momentele repartizate barelor încovoiate scad și astfel cea mai mare parte din momente se transmit de la un nod la altul, pe barele răsucite, fără ca valorile lor să scadă, deci convergența generală se micșorează.

Coeficientul de transmitere $t_{i\to j}$ poate fi definit pe cale statică în același mod ca și $t_{k\to j}$, ca momentul care apare în capătul i încastrat perfect al unei bare ji, cînd în celălalt capăt j se aplică un moment $M_j = 1$.

Mersul calculului nu diferă față de cazul cadrelor plane. Iterația poate fi oprită pe transmiteri sau pe repartiții. Dacă se oprește pe repartiții (după ultima repartizare la un nod nu se mai fac transmiteri spre nodurile închise înaintea lui), momentele rezultate din calcul satisfac relațiile (5.16), dar nu satisfac relațiile (5.7), adică se verifică echilibrul momentelor în jurul nodurilor, dar nu se verifică cel al barelor răsucite (momentele la capetele barelor răsucite nu rezultă egale și de semn contrar). Dacă se oprește iterația pe transmiteri, se ajunge la situația inversă. În general, este totuși preferabil să se oprească iterația pe repartiții, iar dacă pe unele bare răsucite rezultă momente diferite la cele două capete, să se considere ca moment de răsucire al barei o valoare medie.

În exemplul 19, este recalculat prin metoda repartizării momentelor cadrul din exemplul 18.

Exemplul 19. Cadru spațial cu noduri fixe, calculat prin metoda repartizării momentelor

Schema cadrului și rigiditățile barelor conform exemplului 18.

Coeficienții de repartiție :

Nodul 5

$$r_{2-5}^{(5)} = \frac{0{,}714}{1{,}587} = 0{,}450\,; \quad r_{5-8}^{(5)} = \frac{0{,}521}{1{,}587} = 0{,}328$$

$$r_{5-12}^{(5)} = \frac{0{,}193}{1{,}587} = 0{,}122\,; \quad r_{5-6}^{(5)} = \frac{0{,}159}{1{,}587} = 0{,}100$$

Scanned with OKEN Scanner

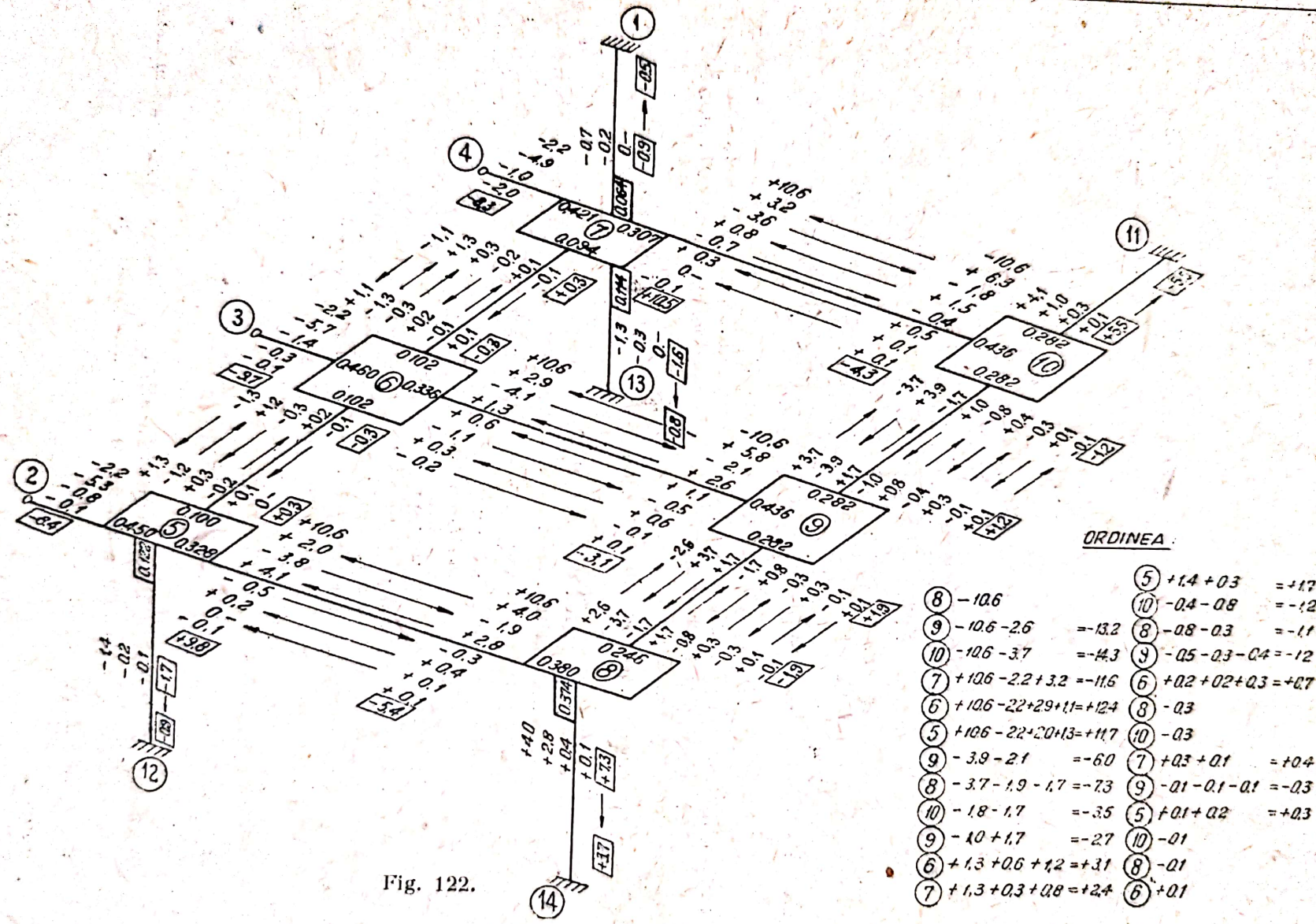


Fig. 122.

Scanned with OKEN Scanner

Nodul *6*

$$r_{3-6}^{(6)} = \frac{0,714}{1,553} = 0,460\,; \quad r_{6-9}^{(6)} = \frac{0,521}{1,553} = 0,336$$

$$r_{5-6}^{(6)} = r_{6-7}^{(6)} = \frac{0,159}{1,553} = 0,102$$

Nodul *7*

$$r_{4-7}^{(7)} = \frac{0,714}{1,695} = 0,421\,; \quad r_{7-10}^{(7)} = \frac{0,521}{1,695} = 0,307$$

$$r_{6-7}^{(7)} = \frac{0,159}{1,695} = 0,094\,; \quad r_{1-7}^{(7)} = \frac{0,108}{1,695} = 0,064$$

$$r_{7-13}^{(7)} = \frac{0,193}{1,695} = 0,114$$

Nodul *8*

$$r_{5-8}^{(8)} = \frac{0,521}{1,369} = 0,380\,; \quad r_{8-9}^{(8)} = \frac{0,336}{1,369} = 0,246$$

$$r_{8-14}^{(8)} = \frac{0,512}{1,369} = 0,374$$

Nodurile *9* și *10*

$$r_{8-9}^{(9)} = r_{9-10}^{(9)} = r_{9-10}^{(10)} = r_{10-11}^{(10)} = \frac{0,336}{1,193} = 0,282$$

$$r_{6-9}^{(9)} = r_{7-10}^{(10)} = \frac{0,521}{1,193} = 0,436$$

Schema de calcul (v. fig. 122):

Iterația începe de la nodul *8*, unde $\bar{M}_8 = -10,6$ tm. Se repartizează: la bara *8—14*: $+10,6 \times 0,374 = +4,0$, la bara *5—8*: $+10,6 \times 0,380 = +4,0$, la bara *8—9*: $+10,6 \times 0,246 = +2,6$ tm. Se transmite: la nodul *5*: $+4,0\,\frac{1}{2} = +2,0$ tm, la nodul *9*: $+2,6\,(-1) = -2,6$ tm. Se deblochează apoi nodul *9*, unde momentul neechilibrat, ținînd seama și de ce s-a transmis de la *8*, este: $-10,6 - 2,6 = -13,2$ tm. Se repartizează: la bara *6—9*; $+13,2 \times 0,436 = +5,8$ tm, la barele *8—9* și *9—10*: $+13,2 \times 0,282 = +3,7$ tm. Se transmite: la *8* și la *10*: $-3,7$ tm, la *6* $+5,8\,\frac{1}{2} = +2,9$ tm, etc. Iterația se oprește pe repartiții, iar cantități mai mici decît 0,1 tm nu se mai transmit.

Comparînd calculul după metoda repartizării momentelor cu cel după metoda transmiterii rotirilor, apare — mai pronunțat decît în cazul cadrelor plane — avantajul simplității schemei de transmiteri în metoda transmiterii rotirilor, în special la cadre etajate, unde schema poate fi organizată ca în fig. 118, în timp ce în metoda repartizării momentelor alcătuirea unei scheme spațiale devine cu totul incomodă.

IV. Utilizarea metodei repartizării momentelor în forma simplificată (Dašek)

Schema de calcul se poate organiza și în cazul cadrelor spațiale în forma simplificată propusă de *Dašek*, cu eliminarea operațiunilor de repartiție și folosirea coeficienților de transmitere t', conținînd și coeficienții de repartiție (4 22). Pentru bare cu secțiune constantă:

— Coeficientul de transmitere pe barele lucrînd la încovoiere:

$$t'_{j\to k} = -t_{j\to k}\, r_{jk}^{(j)} = -\frac{1}{2}\, r_{jk}^{(j)}$$

— Coeficientul de transmitere pe barele lucrînd la răsucire:

$$t'_{j\to i} = -t_{j\to i}\, r_{ji}^{(j)} = +r_{ji}^{(j)}$$

Scanned with OKEN Scanner

În exemplul de calcul 20 este recalculat cadrul spațial din exemplele 18 și 19, cu procedeul de mai sus.

Exemplul 20. Cadru spațial cu noduri fixe, calculat cu metoda Dašek.

Schema cadrului, încărcările și coeficienții de repartiție conform exemplelor 18 și 19.

Coeficienții de transmitere pe barele lucrînd la încovoiere :

$$t'_{5\to 8} = -\frac{1}{2}\,0{,}328 = -0{,}164\,; \quad t'_{10\to 7} = -\frac{1}{2}\,0{,}436 = -0{,}218$$

$$t'_{8\to 5} = -\frac{1}{2}\,0{,}380 = -0{,}190\,; \quad t'_{5\to 12} = -\frac{1}{2}\,0{,}122 = -0{,}061$$

$$t'_{6\to 9} = -\frac{1}{2}\,0{,}336 = -0{,}168\,; \quad t'_{8\to 14} = -\frac{1}{2}\,0{,}374 = -0{,}187$$

$$t'_{9\to 6} = -\frac{1}{2}\,0{,}436 = -0{,}218\,; \quad t'_{7\to 13} = -\frac{1}{2}\,0{,}114 = -0{,}057$$

$$t'_{7\to 10} = -\frac{1}{2}\,0{,}307 = -0{,}154\,; \quad t'_{7\to 1} = -\frac{1}{2}\,0{,}064 = -0{,}032$$

Coeficienții de transmitere pe barele lucrînd la răsucire :

$$t'_{5\to 6} = +0{,}100\,; \qquad t'_{10\to 11} = t'_{10\to 9} = +0{,}282$$

$$t'_{6\to 5} = t'_{6\to 7} = +0{,}102\,; \qquad t'_{9\to 10} = t'_{9\to 8} = +0{,}282$$

$$t'_{7\to 6} = +0{,}094\,; \qquad t'_{8\to 9} = +0{,}246$$

Schema de calcul (v. fig. 123) :

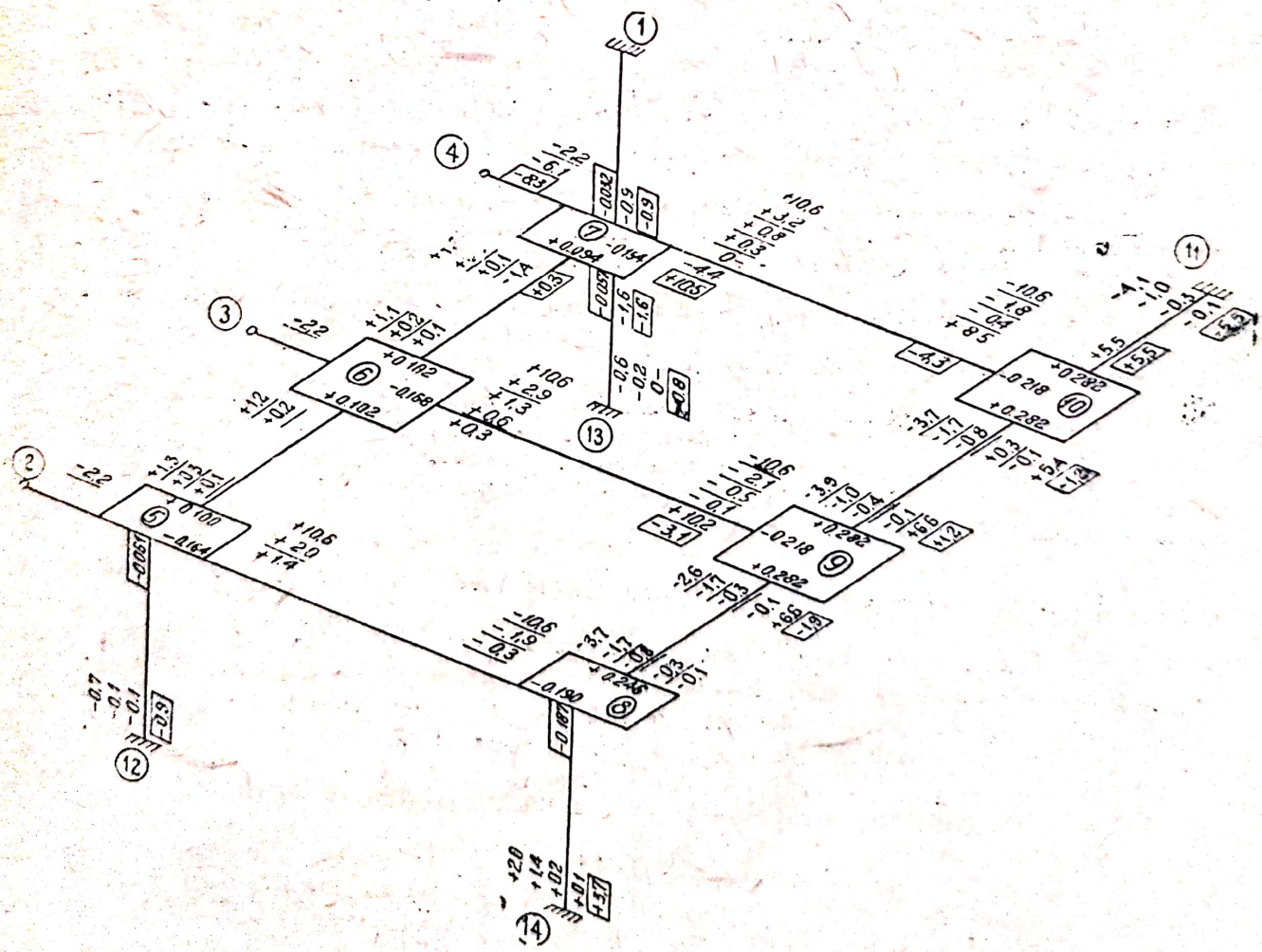


Fig. 123.

Ordinea de corectare a nodurilor este cea indicată în fig. 122. Primul nod corectat este nodul *8*, unde momentul neechilibrat : $\overline{M}_8 = -10{,}6$ tm. Se transmite :

— la *6* : $+ 10{,}6 \times 0{,}190 = + 2{,}0$ tm

— la *14* : $+ 10{,}6 \times 0{,}187 = + 2{,}0$ tm

— la *9* : $- 10{,}6 \times 0{,}246 = - 2{,}6$ tm

Urmează corectarea nodului *9*. Momentul neechilibrat : $\overline{M}_9 = -10{,}6 - 2{,}6 = - 13{,}2$ tm. Se transmite :

— la *8* : $- 13{,}2 \times 0{,}282 = - 3{,}7$ tm

— la *10* : $- 13{,}2 \times 0{,}282 = - 3{,}7$ tm

— la *6* : $+ 13{,}2 \times 0{,}218 = + 2{,}9$ tm

Se corectează nodul *10*. $\overline{M}_{10} = - 10{,}6 - 3{,}7 = - 14{,}3$ tm. Se transmite :

— la *7* : $+ 14{,}3 \times 0{,}218 = + 3{,}2$ tm

— la *9* și la *11* : $- 14{,}3 \times 0{,}282 = - 4{,}1$ tm

Se corectează nodul *7*. $\overline{M}_7 = + 10{,}6 - 2{,}2 + 3{,}2 = + 11{,}6$ tm. Se transmite :

— la *10* : $- 11{,}6 \times 0{,}154 = - 1{,}8$ tm

— la *6* : $+ 11{,}6 \times 0{,}094 = + 1{,}1$ tm

— la *1* : $- 11{,}6 \times 0{,}032 = - 0{,}4$ tm

— la *13* : $- 11{,}6 \times 0{,}057 = - 0{,}6$ tm

etc.

După terminarea iterației, se însumează la fiecare nod momentele neechilibrate din toate treptele de calcul. De exemplu la nodul *7* : $-2{,}2 + 10{,}6 + 3{,}2 + 0{,}8 + 0{,}3 + 1{,}3 + 0{,}3 + 0{,}1 = + 14{,}4$ tm. (Se observă că pe stîlpii *1—7* și *7—13* nu avem nici momente de încastrare perfectă, nici momente transmise, iar pe bara *4—7* nu avem decît momentul de încastrare perfectă — 2,2 tm.)

Se repartizează momentul + 14,4 tm cu coeficienții de repartiție din fig. 122.

— la *1— 7* : $- 14{,}4 \times 0{,}064 = - 0{,}9$ tm

— la *7—13* : $- 14{,}4 \times 0{,}114 = - 1{,}6$ tm

— la *4— 7* : $- 14{,}4 \times 0{,}421 = - 6{,}1$ tm

— la *7—10* : $- 14{,}4 \times 0{,}307 = - 4{,}4$ tm

— la *6— 7* : $- 14{,}4 \times 0{,}094 = - 1{,}4$ tm

Momentul final, de exemplu la capătul barei *7—10* :

$$M_{7-10}^{(10)} = + 10{,}6 + 3{,}2 + 0{,}8 + 0{,}3 - 4{,}4 = + 10{,}5 \text{ tm}$$

Comparînd schema fig. 123 cu schema fig. 122 din metoda obișnuită, se observă că, la fel ca și în cazul cadrelor plane, termenii care apar în cele două scheme diferă numai prin momentele repartizate, care în fig. 122 se înscriu la fiecare treaptă de calcul, iar în fig. 123 apar direct însumate la sfîrșit. De exemplu, la capătul din nodul *7* al barei *7—19*, momentele repartizate sînt : — 3,6 ; — 0,7 ; — 0,1 tm. Momentul total repartizat în metoda simplificată (— 4,4 tm) reprezintă suma lor.

V. Metode simplificate pentru cadre cu travee egale

La cadre cu travee egale (fig. 124) și egal încărcate, axa unei travee (AA) este o axă de simetrie, deci pe această axă momentele de răsucire sînt egale cu zero. Putem atunci considera izolată fiecare travee ABA, iar barele răsucite articulate în punctele A.

Scanned with OKEN Scanner

Calculul considerînd travee izolate permite introducerea unor simplificări în rezolvarea prin aproximații succesive, cu avantaje la convergența seriei termenilor iterației.

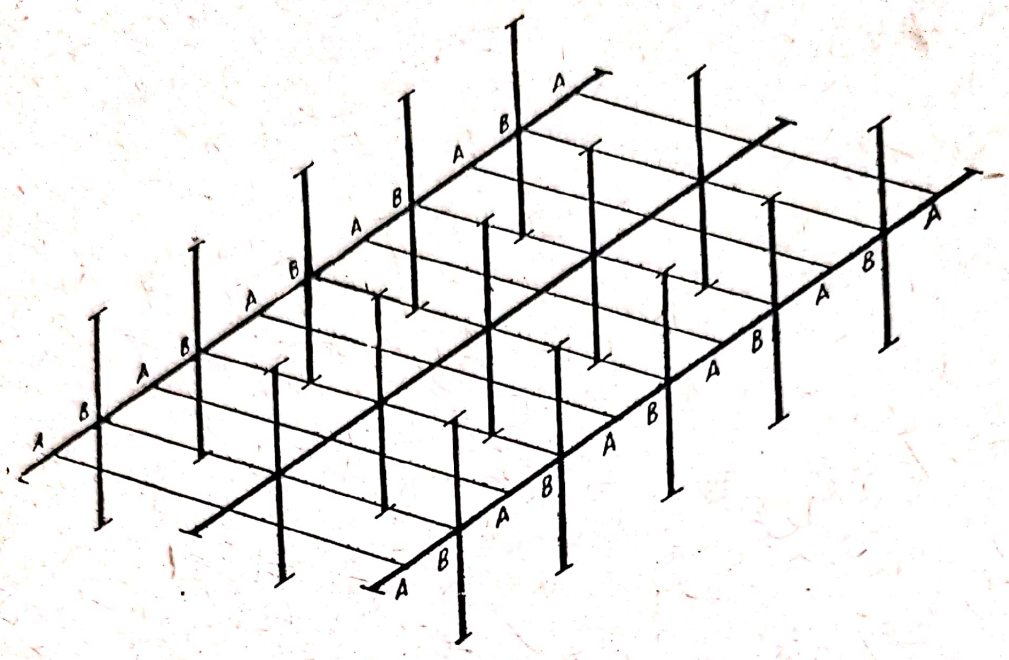


Fig. 124.

Ecuațiile (5.7) ale barelor răsucite sînt cele care micșorează convergența iterației. O convergență la fel de rapidă ca în cazul cadrelor plane se poate obține numai eliminînd aceste ecuații din calculul prin aproximații succesive, adică rezolvîndu-le direct. Se ajunge astfel la o metodă de calcul în care se rezolvă prin aproximații succesive numai ecuațiile barelor încovoiate, prin transmiteri de-a lungul acestor bare, iar ecuațiile barelor răsucite rămîn să se rezolve direct la fiecare treaptă de calcul, ca și ecuațiile de nod, intrînd în operațiunea de repartiție. Metoda se găsește expusă în lucrarea citată a prof. *P. Mazilu*.

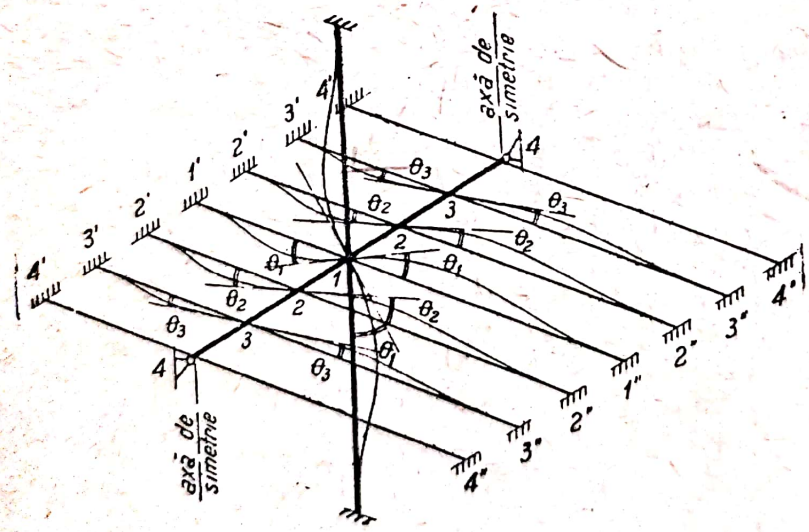


Fig. 125.

Considerînd o travee curentă dintr-o grindă principală cu n grinzi secundare intermediare, de exemplu 5 (fig. 125), ecuațiile barei răsucite (grinzii principale) se elimină din iterație dacă în loc de a debloca succesiv fiecare nod în parte, celelalte noduri rămînînd blocate — se deblochează simultan toate nodurile unei travee de grindă principală aferente unui stîlp (între două axe de simetrie), păstrînd toate celelalte noduri blocate.

Grinzile secundare $1-1''$, $2-2''$, $3-3''$ se rotesc cu unghiurile θ_1, θ_2, θ_3. Scriind condițiile de echilibru în nodurile care se deblochează ($1'$, $2'$, $3'$) se obțin trei ecuații cu trei necunoscute :

$$\left.\begin{aligned}
&(1')\ (\Sigma K_1 + \Sigma T_1)\ \theta_1 + 2\,\frac{1}{2}\ T^{(1)}_{1-2}\theta_2 = \overline{M}_1 \\
&(2')\ (\Sigma K_2 + \Sigma T_2)\ \theta_2 + \frac{1}{2}\ T^{(2)}_{1-2}\theta_1 + \frac{1}{2}\ T^{(2)}_{2-3}\theta_3 = \overline{M}_2 \\
&(3')\ (\Sigma K_3 + \Sigma T_3)\ \theta_3 + \frac{1}{2}\ T^{(3)}_{2-3}\theta_2 = \overline{M}_3
\end{aligned}\right\} \qquad (5.20)$$

prin rezolvarea cărora se obțin θ_1, θ_2, θ_3 în funcție de momentele de încastrare perfectă de pe grinzile secundare $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$. Grinzile secundare se încarcă cu momentele :

$$M^{(1)}_{1-1'} = -\,K^{(1)}_{1-1'}\theta_1\,; \quad M^{(1)}_{1-1''} = -\,K^{(1)}_{1-1''}\theta_1\,; \quad M^{(2)}_{2-2'} = -\,K^{(2)}_{2-2'}\,\theta_2, \text{ etc.} \qquad (5.21)$$

În acest mod se obțin momentele repartizate grinzilor secundare din momentele de încastrare perfectă, printr-o operațiune corespunzătoare unei repartiții în metoda obișnuită.

În loc de o schemă generală de calcul în spațiu, vom avea o serie de scheme plane, cîte una pentru fiecare grindă secundară. Grinda principală nu apare în iterație.

Mersul calculului va fi deci următorul : cu momentele de încastrare perfectă ale grinzilor secundare, se deblochează rînd pe rînd fiecare travee de grindă principală, efectuîndu-se repartizări cu ajutorul relațiilor (5.20) și (5.21). Momentele repartizate se înscriu pe schemele plane ale grinzilor secundare și se transmit de-a lungul acestor grinzi. Cu momentele transmise, se fac din nou repartizări cu relațiile (5.20) și (5.21) etc. pînă cînd cantitățile de transmis devin destul de mici. Însumînd la sfîrșitul iterației coloanele de valori de la capetele barelor încovoiate, se obțin valorile finale ale momentelor în aceste bare. Momentele de răsucire din grinzile principale se calculează scriind condițiile de echilibru ale momentelor în jurul nodurilor, și rezultă ca diferențe între momentele de la capetele grinzilor secundare, de o parte și de alta a grinzilor principale.

Pentru grinzi secundare la distanțe egale, se pot da formule directe ale coeficienților de repartiție, rezolvînd ecuațiile (5.20). În lucrarea citată, în care se găsește expusă metoda de mai sus, sînt calculate astfel de formule pentru 2, 3, 4 și 5 grinzi secundare pe o travee de grindă principală și se dă și un exemplu de calcul detaliat al unui cadru spațial etajat cu travee egale.

VI. Sisteme spațiale neortogonale

La sistemele spațiale cu bare formînd între ele unghiuri diferite de 90^0, calculul se complică, întrucît luînd ca necunoscute la noduri proiecțiile vectorilor rotirilor după 3 direcții ortogonale în spațiu, nu se mai pot obține 3 grupuri de ecuații independente, fără necunoscute comune. Un calcul care să nu devină prea laborios se poate preconiza numai pentru sisteme foarte simple.

În literatură există date rezolvări și pentru astfel de cazuri. În lucrarea citată a prof. *Cr. Mateescu* este tratat un exemplu de cadru spațial cu 4

Scanned with OKEN Scanner

stîlpi ; de asemenea, într-o lucrare mai recentă a prof. *Palotás László* (v. bibl. 54), este arătată rezolvarea prin aproximații succesive a unor cadre cu stîlpii dispuși triunghiular, hexagonal sau octogonal în plan. Institutul de proiectări IPROCIN a folosit pentru calculul tablierelor oblice de poduri un procedeu de calcul prin aproximații succesive al grinzilor continue frînte în plan.

În general însă, în probleme unde scrierea ecuațiilor (stabilirea relațiilor între solicitări și deplasări) comportă oarecare dificultăți, nu putem aștepta simplificări prea mari din aplicarea metodei de rezolvare prin aproximații succesive. *Domeniul avantajos de utilizare a acestei metode rămîne cel al problemelor unde scrierea ecuațiilor este simplă, iar dificultatea centrală o constituie rezolvarea numerică a unui număr mare de ecuații.*

CAPITOLUL VI

SISTEME CU LEGĂTURI DE TIPUL I LA CARE DEPLASĂRILE NECUNOSCUTE SÎNT TRANSLAŢIILE NODURILOR

Un sistem static nedeterminat format din bare poate ajunge să aibă ca deplasări necunoscute ale nodurilor numai deplasările liniare (translaţiile) în cazurile :

— cînd toate barele sînt articulate la noduri, astfel că dispar condiţiile de continuitate a rotirilor ;

— cînd legăturile la noduri sînt rigide, însă efectul rigidităţii lor asupra stării de solicitare a sistemului este neînsemnat, astfel că se pot neglija în calcul condiţiile de continuitate a rotirilor, considerînd barele articulate la noduri.

Rămîn atunci ca necunoscute mărimile şi direcţiile translaţiilor, deci la fiecare nod cîte 2 necunoscute la sisteme plane, respectiv 3 necunoscute la sisteme spaţiale.

Un exemplu de astfel de sistem este cel arătat în fig. 126, format din bare drepte legate prin articulaţii şi încărcat cu sarcini concentrate aplicate la noduri. Barele primesc numai forţe axiale, iar deplasările nodurilor sînt translaţii datorite variaţiei lungimii barelor. Necunoscutele sînt la fiecare nod mărimea şi direcţia translaţiei, deci sistemul are legături de tipul II.

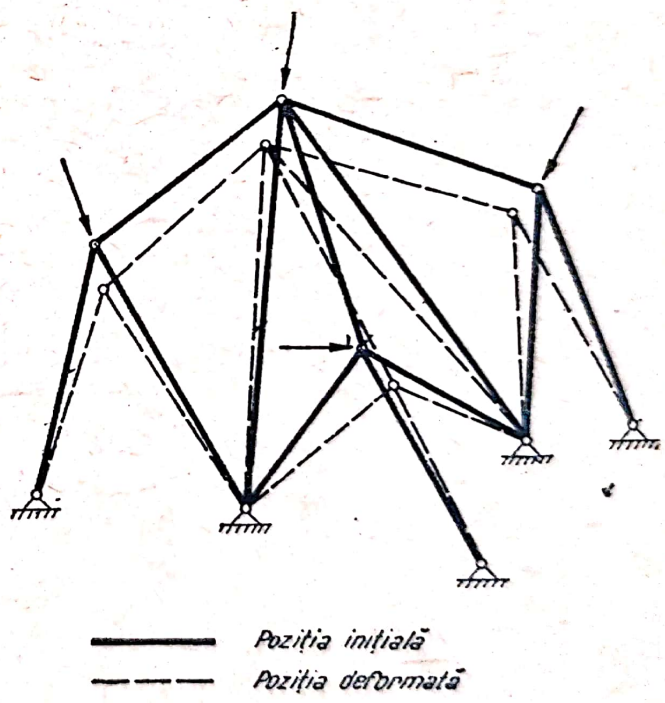


Fig. 126.

În fig. 127 este arătat un sistem avînd aceleaşi condiţii de continuitate la noduri ca şi cel din fig. 126, însă la care translaţiile nodurilor nu sînt datorite numai variaţiei lungimilor barelor (lucrului mecanic al forţelor axiale) ci şi deformaţiilor prin încovoiere ale barelor (lucrului mecanic al momentelor încovoietoare). Sistemul este format dintr-o serie de arce cu naşterile de nivel şi articulate pe pile flexibile. Nodurile capătă translaţii datorită variaţiei lungimii arcelor (din lucrul mecanic produs de momentele încovoietoare şi forţele axiale), încovoierii pilelor şi — dacă există şi tiranţi — lungirii tiranţilor.

Cîteodată, direcţiile translaţiilor sînt cunoscute. De exemplu la sistemul din fig. 127, dacă se neglijează deformaţiile axiale ale pilelor, care sînt mici în raport cu săgeţile, nodurile se pot considera că se deplasează numai pe orizontală.

Rămîn astfel ca necunoscute numai mărimile translaţiilor nodurilor, deci cîte o singură necunoscută la fiecare nod. Se ajunge la un sistem cu legături de tipul I.

În cele ce urmează ne vom referi numai la sisteme de acest fel, la care direcţiile translaţiilor nodurilor sînt cunoscute. Vom trata două cazuri caracteristice :

A. Arcele articulate pe pile flexibile.

B. Reţelele plane de grinzi, acţionate de sarcini normale pe planul lor.

A. ARCE ARTICULATE PE PILE FLEXIBILE (fig. 127)

Elementele care intră în calcul sînt următoarele :

— solicitările exterioare sînt sarcinile aplicate pe arce ;

— în sistemul de bază, cu deplasările nodurilor blocate, acționează la noduri ca solicitări exterioare împingerile orizontale $\overline{H}$ ale arcelor încărcate, considerate cu naşterile fixe ;

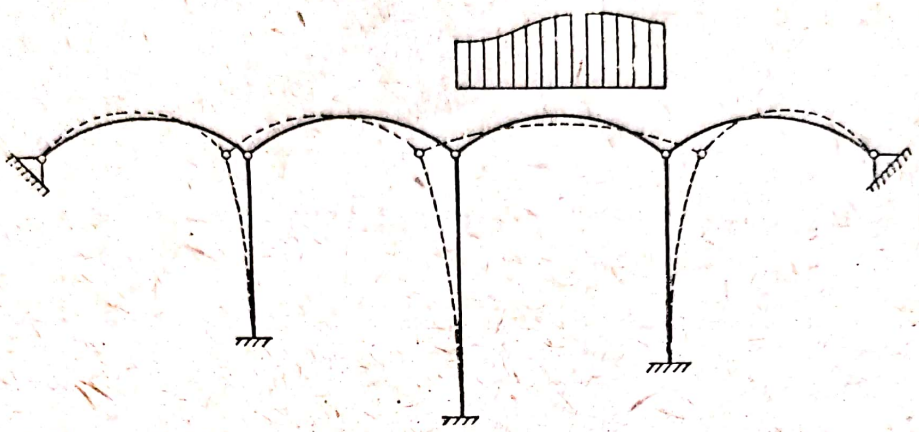


Fig. 127.

— solicitările necunoscute cu care se încarcă la noduri capetele barelor sînt împingeri orizontale H ;

— deplasările necunoscute ale nodurilor sînt translațiile Δ după orizontală ;

— caracteristicile geometrice şi de material ale barelor sînt : pentru pile, care lucrează la încovoiere, modulul de elasticitate (E), momentul de inerție al secțiunii transversale (I) şi deschiderea (l) ; pentru arce, care lucrează la compresiune şi încovoiere, aceleaşi caracteristici, plus aria secțiunii transversale (A) şi forma axei. Dacă arcele au şi tiranți, pentru aceştia intervin : modulul de elasticitate E_t al materialului din care sînt construiți tiranții (de obicei diferit de cel al arcelor şi pilelor), aria secțiunii transversale A_t şi lungimea l.

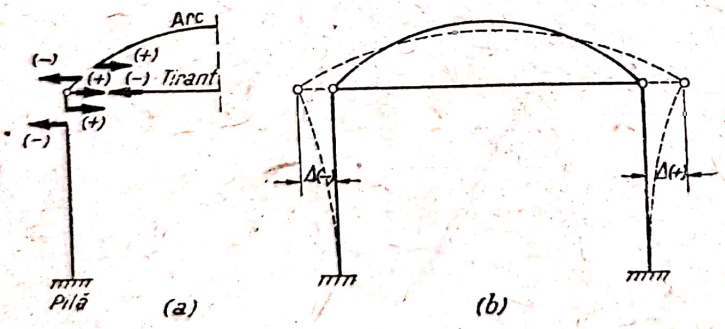


Fig. 128.

Sistemul de ecuații se poate scrie luînd ca necunoscute împingerile H sau deplasările Δ ale nodurilor.

Păstrînd convenția de semne din capitolele precedente, se consideră pozitive deplasările nodurilor spre dreapta (fig. 128, *b*), iar ca împingeri pozitive, împingerile, atît pe nod cît şi pe capete de bare, care tind să imprime nodului sau capătului de bară o deplasare pozitivă (fig. 128, *a*).

Scanned with OKEN Scanner

I. Relaţiile între deplasări şi împingeri

a) *Relaţiile între deplasări şi împingeri pentru pile*

Considerînd o pilă *ji*, încastrată în *i* şi liberă în *j* (fig. 129) şi o împingere $H_{ji}^{(j)}$ aplicată la capătul din *j* al pilei, săgeata în capătul *j* :

$$\Delta_j = H_{ji}^{(j)}\, \eta_{jj}$$

unde η_{jj} este săgeata produsă în *j* de o împingere unitară aplicată în j.

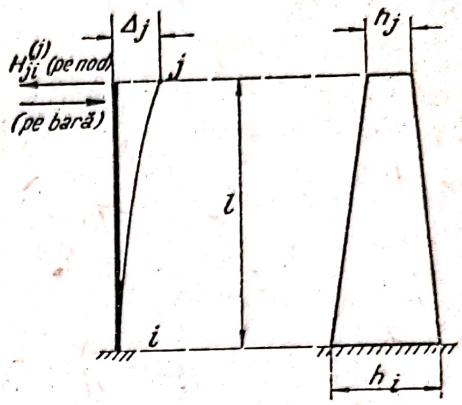


Fig. 129

În cazul obişnuit, al pilelor de grosime variabilă liniar :

$$\eta_{jj} = \frac{\omega l^3}{EI_i} \qquad (6.1)$$

unde I_i este momentul de inerţie maxim (la bază)

$$\omega = \left(\frac{n}{n-1}\right)^3 \left(\log\, n + \frac{2}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{3}{2}\right) \qquad \left(n = \frac{h_j}{h_i}\right)$$

Valorile lui ω pentru diferite rapoarte $n = \frac{h_j}{h_i}$ sînt date în tabela 36.

Tabela 36

Coeficienţi de influenţă pentru săgeţi

$n = \frac{h_j}{h_i}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ω	1,37	0,95	0,76	0,63	0,54	0,47	0,40	0,36	0,34	0,33
1/ω	0,73	1,05	1,32	1,59	1,85	2,13	2,50	2,78	2,94	3,00

Observaţie. Pentru $h_j = h_i$, cu expresia de mai sus se ajunge la o nedeterminare. Ridicînd nedeterminarea, se obţine $\omega = \frac{1}{3}$.

Deci avem :

— deplasările în funcţie de împingeri $\boxed{\Delta_j = \eta_{jj}\, H_{ji}^{(j)}}$ (6.3)

— împingerile în funcţie de deplasări : $H_{ji}^{(j)} = \nu_{jj}\, \Delta_j = \frac{1}{\eta_{jj}}\, \Delta_j$.

Se observă că în acest caz, reazemul *i* fiind nedeplasabil, $\eta_{ii} = \eta_{ji} = 0$ şi din relaţia (1.4) :

$$\nu_{jj} = \frac{1}{\eta_{jj}}$$

Scanned with OKEN Scanner

ν_{jj} = forța ce trebuie să fie aplicată în j pentru a produce în j o săgeată $\Delta_j = 1$.

Valoarea coeficientului de influență ν_{jj} caracterizează deformabilitatea pilei, deci el poate fi denumit *rigiditatea la translație* a pilei. Notăm rigiditățile la translație cu B.

$$B_{ji}^{(j)} = \nu_{jj} = \frac{E\, I_i}{\omega l^3} \tag{6.4}$$

În locul rigidităților B pot fi introduse în calcul valorile lor reduse cu E (*rigiditățile practice la translație*) :

$$\beta_{ji}^{(j)} = \frac{B_{ji}^{(j)}}{E} = \frac{I_i}{\omega l^3} \tag{6.5}$$

Avem atunci :

$$\boxed{H_{ji}^{(j)} = B_{ji}^{(j)}\ \Delta_j = \beta_{ji}^{(j)}\ \Delta_j'} \qquad (\Delta_j' = E\ \Delta_j) \tag{6.6}$$

b) *Relațiile între deplasări și împingeri pentru arce*

Relațiile pentru arce sînt deduse în cap. VII. Considerăm (fig. 130) un arc jk articulat la capete, asupra căruia se aplică în j o împingere $H_{jk}^{(j)}$; menținînd fix nodul k, nodul j se deplasează cu cantitatea :

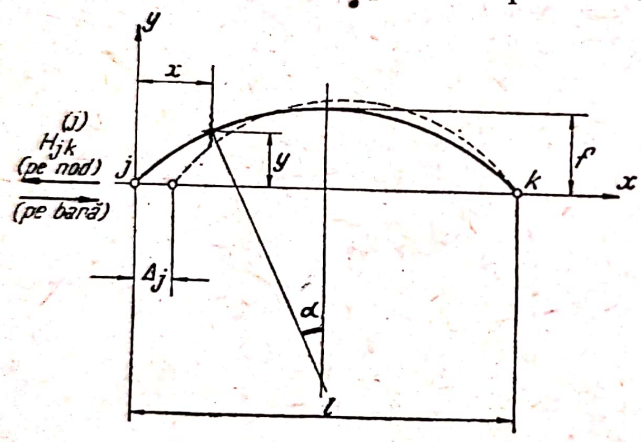


Fig. 130.

$$\Delta_j = H_{jk}^{(j)}\, \eta_{jj}$$

unde, cu notațiile din figură :

$$\eta_{jj} = \int_0^l \frac{y^2}{I_x}\, ds \tag{6.7}$$

I_x este momentul de inerție în secțiunea la distanța x de la nodul j ;
ds — elementul de arc.

Dacă arcul este parabolic, cu $\frac{I}{\cos\alpha} = const.$ și se neglijează lucrul mecanic al forțelor axiale, expresia (6.7) devine :

$$\eta_{jj} = \frac{8}{15} \cdot \frac{f^2 l}{E\, I_0} \quad \text{(v. cap. VII)}$$

(I_0 este momentul de inerție la cheie)

iar

$$H_{jk}^{(j)} = \nu_{jj}\ \Delta_j = \frac{1}{\eta_{jj}}\ \Delta_j$$

Și aici rezultă $\nu_{jj} = \frac{1}{\eta_{jj}}$, deoarece $\eta_{jj} = \eta_{kk}$ și $\eta_{jk} = 0$, astfel că relația (1.4) dă :

$$\nu_{jj} = \frac{\eta_{kk}}{\eta_{jj}\ \eta_{kk} - \eta_{jk}^2} = \frac{\eta_{jj}}{\eta_{jj}^2 - 0} = \frac{1}{\eta_{jj}}$$

Dacă nodurile j și k se deplasează în același sens și cu aceeași cantitate ($\Delta_j = \Delta_k$) și nu există sarcini exterioare pe arc, nu apare nici o deformație a arcului, deci nici o împingere. Împingeri apar numai datorită scurtărilor sau lungirilor arcului, deci diferențelor între deplasările Δ_j și Δ_k.

$$\boxed{H_{jk}^{(j)} = \nu_{jj}\,(\Delta_j - \Delta_k) = B_{jk}^{(j)}\,(\Delta_j - \Delta_k)} \qquad (6.8)$$

unde $B_{jk}^{(j)}$ este *rigiditatea la translație* a arcului în j.

$$B_{jk}^{(j)} = \frac{15}{8} \cdot \frac{E\,I_0}{f^2\,l}$$

Rigiditatea practică la translație:

$$\beta_{jk}^{(j)} = \frac{15}{8} \cdot \frac{I_0}{f^2 l}$$

Relația (6.8) poate fi pusă și sub forma:

$$\boxed{H_{jk}^{(j)} = \beta_{jk}^{(j)}\,(\Delta'_j - \Delta'_k)} \qquad (6.9)$$

semnificațiile pentru Δ'_j, Δ'_k fiind aceleași ca și în (6.6).

Dacă nodurile j și k se mențin fixe ($\Delta_j = \Delta_k = 0$) și pe arc există sarcini exterioare:

$H_{jk}^{(j)} = \overline{H}_{jk}^{(j)}$ (împingerea arcului datorită sarcinilor exterioare, considerînd nașterile fixe).

În total, vom avea atunci:

$$\left.\begin{aligned} H_{jk}^{(j)} &= \beta_{jk}^{(j)}\,(\Delta'_j - \Delta'_k) + \overline{H}_{jk}^{(j)} \\ H_{jk}^{(k)} &= \beta_{jk}^{(k)}\,(\Delta'_k - \Delta'_j) + \overline{H}_{jk}^{(k)} \end{aligned}\right\} \qquad (6.10)$$

Pentru arce simetrice, încărcate cu sarcini verticale oarecare:

$$\overline{H}_{jk}^{(j)} = \overline{H}_{jk}^{(k)}\,; \quad \beta_{jk}^{(j)} = \beta_{jk}^{(k)}$$

Rezultă:

$$\boxed{H_{jk}^{(j)} + H_{jk}^{(k)} = 0} \qquad (6.11)$$

Se observă că relațiile la care s-a ajuns (6.9), (6.11) sînt identice cu cele stabilite pentru barele răsucite la cadrele spațiale cu noduri fixe. Și aici, deplasările nu se pot exprima în funcție de împingeri, deoarece dacă încercăm să explicităm pe Δ_j, Δ_k în relațiile (6.9), ajungem la (6.11).

Sistemul este tot de tipul (1.2'), (1.3).

c) *Relațiile între deplasări și împingeri pentru tiranți*

Conform fig. 131, avem evident:

$$Z_{jk}^{(j)} + Z_{jk}^{(k)} = 0 \qquad (Z \text{ este tracțiunea în tirant})$$

$$\Delta_j - \Delta_k = \eta_{jj}\,Z_{jk}^{(j)}$$

Scanned with OKEN Scanner

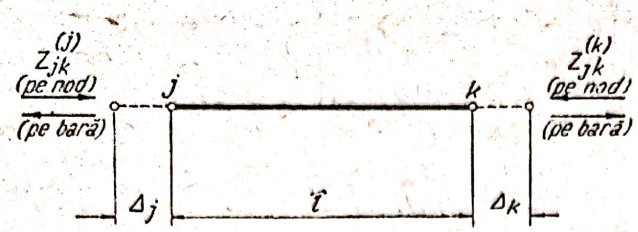


Fig. 131.

unde :

$$\eta_{tt} = \frac{l}{E_t A_t} \qquad (6.12)$$

deci : $Z_{jk}^{(j)} = \nu_{jj} (\Delta_j - \Delta_k) \qquad \left(\nu_{jj} = \frac{1}{\eta_{jj}}\right)$

Punînd şi aici $B_{kj}^{(j)} = B_{jk}^{(k)} = \nu_{jj} = \frac{E_t A_t}{l}$, respectiv $\beta_{jk}^{(j)} = \frac{E_t}{E} \cdot \frac{A_t}{l}$,

$$Z_{jk} = B_{jk}^{(j)} (\Delta_j - \Delta_k) = \beta_{jk}^{(j)} (\Delta_j' - \Delta_k') \qquad (6.13)$$

relaţii analoge cu cele scrise pentru arce.

II. Scrierea ecuaţiilor şi rezolvarea lor prin iteraţie, cînd se iau ca necunoscute deplasările Δ ale nodurilor

a) *Scrierea ecuaţiilor*

Folosim expresiile împingerilor în funcţie de deplasări (6.6, 6.10, 6.13) şi scriem condiţiile de echilibru la noduri.

Condiţia de echilibru la nodul j :

$$\sum H = 0 ; \qquad \sum H_{jk}^{(j)} + \sum Z_{jk}^{(j)} + H_{ji}^{(j)} = 0 \qquad (6.14)$$

Înlocuind pe $H_{jk}^{(j)}$, $Z_{jk}^{(j)}$ şi $H_{ji}^{(j)}$ cu expresiile lor în funcţie de deplasări şi de rigidităţile la translaţie (6.6, 6.10, 6.13), avem :

$$- \beta_{ji}^{(j)} \Delta_j' - \sum \beta_{jk}^{(j)} (\Delta_j' - \Delta_k') + \bar{H}_j = 0 \qquad (6.15)$$

[Pentru împingeri s-au schimbat semnele faţă de relaţiile (6.6, 6.10, 6.13), deoarece s-a trecut de la împingerile pe capetele barelor la împingerile pe nod.]

$\bar{H}_j = \Sigma \bar{H}_{jk}^{(j)}$ (împingerea neechilibrată din j) = suma algebrică a împingerilor celor 2 arce care se întîlnesc în nodul j, determinate în sistemul de bază cu toate nodurile blocate (Δ_j, $\Delta_k = 0$). $\bar{H}_j$ constituie solicitarea exterioară a nodului j în sistemul de bază.

Sistemul de ecuaţii (6.15), de tipul (1.6), se rezolvă prin iteraţie.

b) *Rezolvarea prin iteraţie (metoda transmiterii deplasărilor)*

Ecuaţia (6.15) se poate scrie :

$$- [\beta_{ji}^{(j)} + \sum \beta_{jk}^{(j)}] \Delta_j' + \sum \beta_{jk}^{(j)} \Delta_k' + \bar{H}_j = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Explicităm necunoscuta principală Δ'_j :

$$\Delta'_j = \frac{\overline{H}_j}{\beta_{ji}^{(j)} + \Sigma \beta_{jk}^{(j)}} + \sum \frac{\beta_{jk}^{(j)}}{\beta_{ji}^{(j)} + \Sigma \beta_{jk}^{(j)}} \Delta'_k$$

Valoarea inițială a deplasării Δ'_j :

$$\boxed{\Delta'^{(1)}_j = \frac{\overline{H}_j}{\beta_{ji}^{(j)} + \Sigma \beta_{jk}^{(j)}}} \qquad (6.16)$$

(corespunde la 2.12)

iar coeficientul de transmitere de la k la j :

$$\boxed{t_{k \to j} = \frac{\beta_{jk}^{(j)}}{\beta_{ji}^{(j)} + \Sigma \beta_{jk}^{(j)}}} \qquad (6.17)$$

(corespunde la 2.13)

c) *Convergența iterației*

Convergența este asigurată, întrucît suma coeficienților de transmitere spre j :

$$\sum | t_{k \to j} | < 1$$

Într-adevăr, toți coeficienții de transmitere fiind pozitivi :

$$\sum | t_{k \to j} | = \frac{\Sigma \beta_{jk}^{(j)}}{\Sigma \beta_{jk}^{(j)} + \beta_{ji}^{(j)}} < 1$$

Cu cît rigiditățile arcelor sînt mai mari în raport cu cele ale pilelor, $\beta_{ji}^{(j)}$ scade și $\Sigma | t_{k \to j} |$ se apropie de 1, deci convergența este mai slabă. La limită, dacă arcele reazemă pe stîlpi pendulari, vom avea cea mai slabă convergență. Invers, cînd pilele sînt foarte rigide, cea mai mare parte din împingeri se transmite la încastrări, iar între noduri, prin intermediul arcelor, se transmit valori mici ; convergența este atunci foarte rapidă.

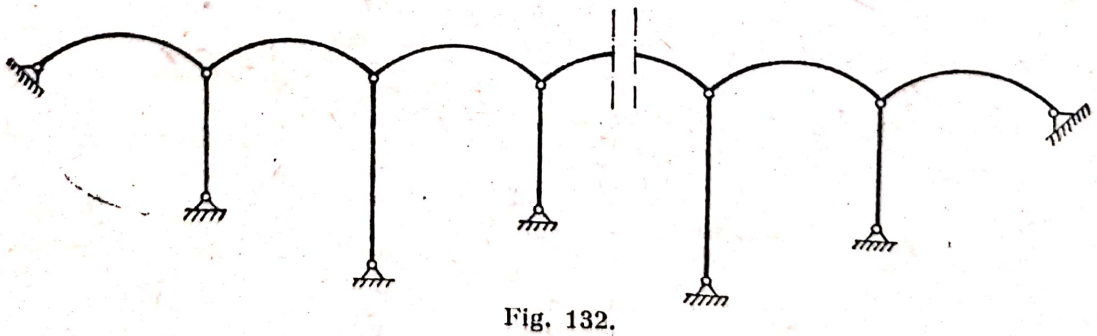


Fig. 132.

În modul acesta cea mai slabă convergență va apărea într-un sistem pe stîlpi pendulari (fig. 132), unde pilele nu preiau nici o împingere, stabilitatea sistemului fiind asigurată numai de culeele de capăt. Convergența va fi cu atît mai slabă, cu cît numărul de arce va fi mai mare. Pentru un număr foarte mare de arce, vom avea în toate ecuațiile, afară de două (cele ale reazemelor fixe marginale) $\Sigma | t_{k \to j} | = 1$ și deci valoarea determinantului principal al sistemului de ecuații se apropie de zero, ceea ce corespunde

Scanned with OKEN Scanner

limitei convergenței. În același timp, se observă că pe măsură ce crește numărul de arce, sistemul devine din ce în ce mai labil, influența culeelor de capăt resimțindu-se puțin în zona centrală, unde deplasările nodurilor devin foarte mari. Situația limită cu determinantul egal cu zero corespunde sistemului labil (fără culeele fixe de capăt).

Acest caz ilustrează în mod destul de sugestiv corespondența care există între gradul de libertate al deplasărilor unui sistem format din bare și convergența seriei termenilor din rezolvarea prin iterație a sistemului de ecuații. Cu cît deplasările sînt mai libere, cu atît convergența scade ; cu cît deplasările sînt mai blocate, efectul solicitărilor se localizează și în consecință valorile inițiale introduse în iterație sînt mai apropiate de cele finale exacte, iar convergența este mai rapidă. La limită, cînd sistemul devine labil, și seria termenilor iterației este la limita între convergență și divergență ($D = 0$).

★

Se observă că în ecuația nodului j nu intră în afara necunoscutei principale Δ_j' decît deplasările Δ_k' ale nodurilor vecine, deci se vor face transmiteri numai între noduri vecine, astfel că se poate folosi ca schemă de transmiteri chiar schema sistemului.

d) *Semnificația fizică a iterației*

Semnificația fizică a operațiunilor din rezolvarea prin metoda iterației este aceeași ca și la sistemele cu noduri primind rotiri, dacă în locul rotirilor se consideră translații, iar în locul momentelor forțe.

Calculul se începe pe sistemul de bază cu toate nodurile blocate, acționat de împingerile $\overline{H}$ ca solicitări exterioare la noduri. Sub efectul acestor împingeri, în noduri există tendințele de deplasare $\Delta_j^{(1)}$, conform relației (6.16). În prima treaptă de calcul se deblochează fiecare nod în parte, menținînd celelalte noduri fixe ; rezultă astfel ca valori inițiale ale deplasărilor chiar tendințele de deplasare $\Delta_j^{(1)}$ deblocate, funcții de termenii liberi $\overline{H}_j$.

Iterația se continuă deblocînd succesiv nodurile. La fiecare deblocare de nod, tendința de deplasare acumulată la nodul respectiv se transformă în deplasare efectivă, iar la nodurile vecine blocate se transmit noi tendințe de deplasare. Rezolvarea unei ecuații (6.15) într-o anumită treaptă de calcul reprezintă deblocarea nodului corespunzător.

Coeficientul de transmitere de la k la j poate fi definit din punct de vedere static ca tendința de deplasare care apare în nodul blocat j, cînd se imprimă nodului deblocat k o deplasare $\Delta_k = 1$. În ecuația (6.15), punînd $\overline{H}_j = 0$ și $\Delta_k = 1$, se obține :

$$\Delta_j = \frac{\beta_{jk}^{(j)}}{\Sigma \beta_{jk}^{(j)} + \beta_{ji}^{(j)}} = t_{k \to j}$$

Prin transmiteri, se propagă efectul deplasărilor de la un nod la altul.

e) *Mersul calculului*

Schema se alcătuiește ca în fig. 133. Se înscriu la fiecare nod coeficienții de transmitere spre acel nod și valorile inițiale ale deplasărilor. În cazul

Scanned with OKEN Scanner

din fig. 133, existînd sarcini exterioare numai pe deschiderea $4-6$, valorile inițiale ale deplasărilor în 4 și 6 :

$$\Delta'^{(1)}_4 = \frac{\bar{H}^{(4)}_{46}}{\beta^{(4)}_{24} + \beta^{(4)}_{45} + \beta^{(4)}_{46}} \qquad \text{(spre stînga, deci negativă)}$$

$$\Delta'^{(1)}_6 = \frac{\bar{H}^{(6)}_{46}}{\beta^{(6)}_{46} + \beta^{(6)}_{67} + \beta^{(6)}_{68}} \qquad \text{(spre dreapta, deci pozitivă)}$$

Deblocările de noduri se fac de la cel cu tendința de deplasare blocată cea mai mare. Presupunînd $|\Delta'^{(1)}_4| > |\Delta'^{(1)}_6|$, deblocăm întîi nodul 4. Deplasările deblocate se marchează cu o linie orizontală, la treapta următoare de calcul urmînd să se deblocheze numai cantitățile ce rămîn dedesubtul liniei, adică noile tendințe de deplasare acumulate la nod între două deblocări succesive. Se transmite :

— la 2 : $\Delta'^{(1)}_4\, t_{4\to 2}$

— la 6 : $\Delta'^{(1)}_4\, t_{4\to 6}$

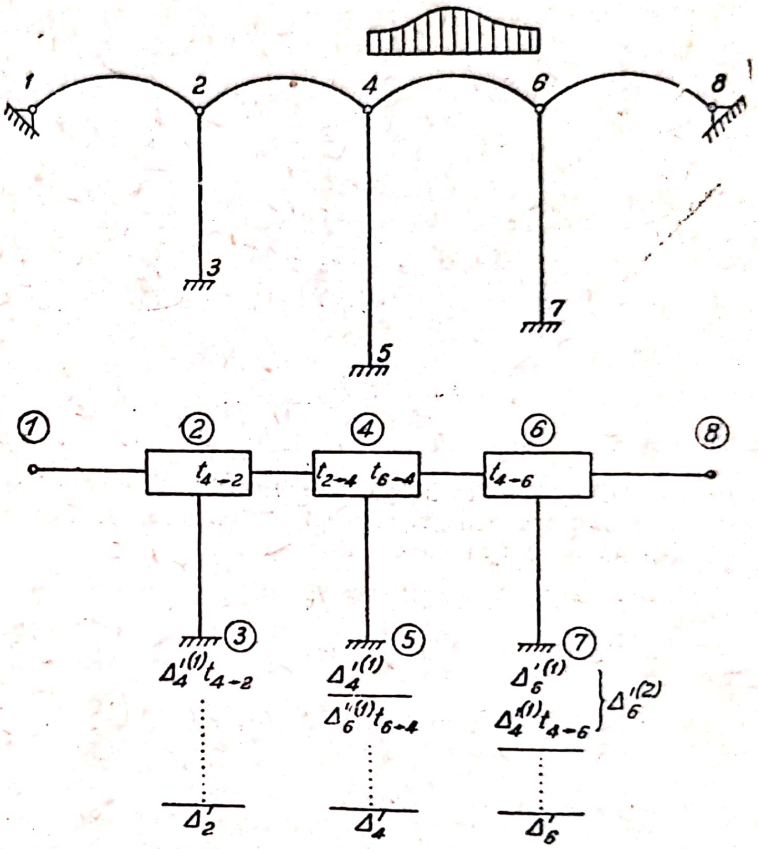


Fig. 133.

Urmează deblocarea nodului 6. Ținînd seama și de ce s-a transmis de la 4, tendința de deplasare este :

$$\Delta'^{(2)}_6 = \Delta'^{(1)}_6 + \Delta'^{(1)}_4\, t_{4\to 6}$$

care se transmite la nodul 4 cu $\Delta'^{(2)}_6\, t_{6\to 4}$ etc.

La terminarea iterației, se obțin valorile finale ale deplasărilor nodurilor. Cu ajutorul acestora, se determină apoi împingerile cu relațiile :

(arc) $\quad H^{(j)}_{jk} = -\beta^{(j)}_{jk\,(\text{arc})}\,(\Delta'_j - \Delta'_k) + \bar{H}^{(j)}_{jk}$

(tirant) $\quad Z^{(j)}_{jk} = -\beta^{(j)}_{jk\,(\text{tirant})}\,(\Delta'_j - \Delta'_k)$

(pilă) $\quad H^{(j)}_{jl} = -\beta^{(j)}_{jl}\,\Delta'_j.$

Ca verificare, suma împingerilor în jurul unui nod trebuie să fie egală cu zero.

Se observă că rigiditățile β ale unui arc și tirantului corespunzător se înmulțesc totdeauna cu aceeași cantitate $(\Delta'_j - \Delta'_k)$. Putem atunci scrie :

$$H^{(j)}_{jk} + Z^{(j)}_{jk} = -[\beta^{(j)}_{jk\,(\text{arc})} + \beta^{(j)}_{jk\,(\text{tirant})}]\,(\Delta'_j - \Delta'_k) + \bar{H}^{(j)}_{jk}$$

sau, considerînd arcul plus tirantul ca o bară unică, avînd ca rigiditate suma rigidităților arcului și tirantului :

$$\beta^{(j)}_{jk} = \beta^{(j)}_{jk\,(\text{arc})} + \beta^{(j)}_{jk\,(\text{tirant})} = \frac{15}{8}\cdot\frac{I_0}{f^2 l} + \frac{E_t}{E}\cdot\frac{A_t}{l},$$

avem :

$$H_{jk}^{(j)} + Z_{jk}^{(j)} = -\beta_{jk}^{(j)}(\Delta_j' - \Delta_k') + \bar{H}_{jk}^{(j)}$$

În modul acesta pe schema de transmiteri nu mai apar ca bare decît pilele şi arcele, care includ şi tiranţii. Suma $-\beta_{jk}(\Delta_j' - \Delta_k')$, care se obţine la sfîrşitul iteraţiei, se împarte apoi între arc şi tirant proporţional cu rigidităţile, iar la împingerea repartizată arcului se adaugă şi valoarea iniţială $\bar{H}_{jk}^{(j)}$.

Exemplul 21. Arce articulate pe pile flexibile, calculate prin metoda transmiterii deplasărilor.

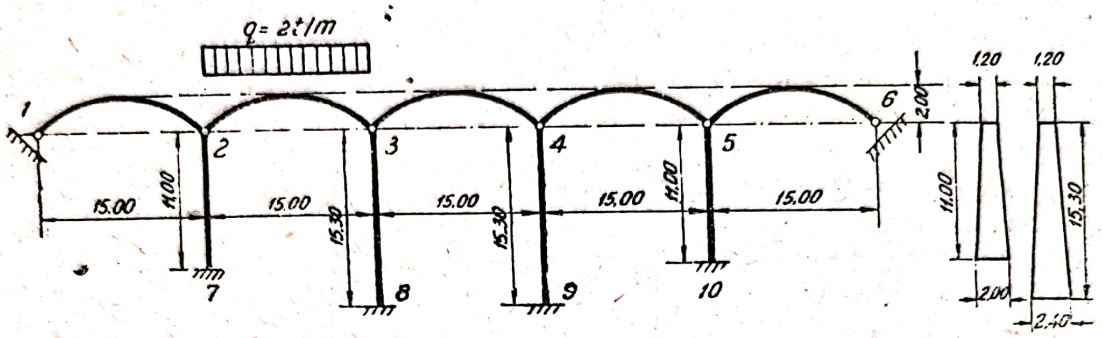


Fig. 134.

Se dă sistemul din fig. 134, format din bolţi parabolice de beton simplu cu $\frac{I}{\cos\alpha}$ constant, egale, de 15 m deschidere, 2 m săgeată, 50 cm grosime la cheie şi pile de beton de înălţimi diferite, avînd grosimile variabile liniar. Calculul se face pentru 1 m lăţime de boltă şi pilă, la o sarcină de 2 t/m pe deschiderea *2—3*.

Rigidităţile la translaţie ale barelor :

— Barele *1—2, 2—3, 3—4, 4—5, 5—6* : $\beta = \frac{15}{8} \cdot \frac{I_0}{f^2 l}$

$$I_0 = \frac{0{,}50^3 \times 1{,}00}{12} = 0{,}0104 \text{ m}^4; \quad \beta = \frac{15}{8} \cdot \frac{0{,}0104}{2^2 \times 15} = 0{,}325 \times 10^{-3}$$

— Barele *2—7, 5—10* :

$$n = \frac{h_{min}}{h_{max}} = \frac{1{,}20}{2{,}00} = 0{,}6. \quad \text{Din tabela 36,} \quad \frac{1}{\omega} = 2{,}13$$

$$I_{max} = \frac{2{,}00^3 \times 1{,}00}{12} = 0{,}667 \text{ m}^4$$

$$\beta = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{I_{max}}{l^3} = 2{,}13 \frac{0{,}667}{11{,}00^3} = 1{,}070 \times 10^{-3}$$

— Barele *3—8, 4—9* :

$$n = \frac{1{,}20}{2{,}40} = 0{,}5; \quad \frac{1}{\omega} = 1{,}85$$

$$I_{max} = \frac{2{,}40^3 \times 1{,}00}{12} = 1{,}150 \text{ m}^4$$

$$\beta = 1{,}85 \frac{1{,}15}{15{,}30^3} = 0{,}592 \times 10^{-3}$$

Pentru comoditatea calculului se multiplică toate rigidităţile cu 1 000.

Sumele rigidităţilor la noduri :

$$\Sigma\beta_2 = \Sigma\beta_5 = 2 \times 0{,}325 + 1{,}070 = 1{,}720$$
$$\Sigma\beta_3 = \Sigma\beta_4 = 2 \times 0{,}325 + 0{,}592 = 1{,}242$$

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienții de transmitere :

$$t_{3\to 2} = t_{4\to 5} = \frac{0{,}325}{1{,}720} = 0{,}189$$

$$t_{2\to 3} = t_{5\to 4} = t_{3\to 4} = t_{4\to 3} = \frac{0{,}325}{1{,}212} = 0{,}262$$

Împingerile inițiale :

$$\bar{H}_{2-3}^{(2)} = -\frac{ql^2}{8f} = -\frac{2 \times 15^2}{8 \times 2} = -28{,}2 \text{ t (spre stînga)}$$

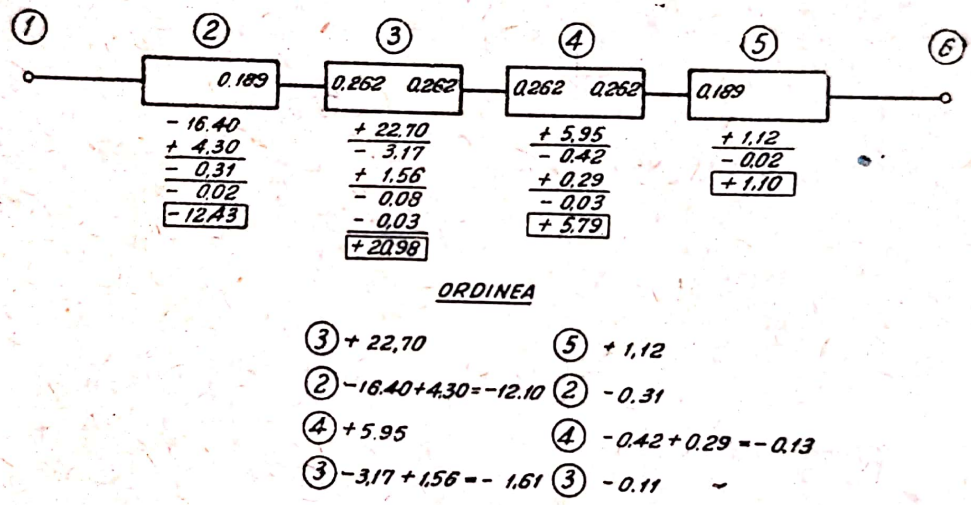
$$\bar{H}_{2-3}^{(3)} = +28{,}2 \text{ t (spre dreapta)}$$

Valorile inițiale ale deplasărilor :

$$\Delta_2^{\prime(1)} = -\frac{28{,}2}{1{,}720} = -16{,}40$$

$$\Delta_3^{\prime(1)} = +\frac{28{,}2}{1{,}242} = +22{,}60$$

Schema de transmiteri (v. fig. 135) :



ORDINEA

③ + 22,70 ⑤ + 1,12

② −16.40+4.30=−12.10 ② − 0.31

④ + 5.95 ④ − 0.42 + 0.29 = − 0.13

③ −3,17 + 1,56 = − 1,61 ③ − 0.11

Fig. 135.

În fig. 136 este arătată schema deformată a sistemului.

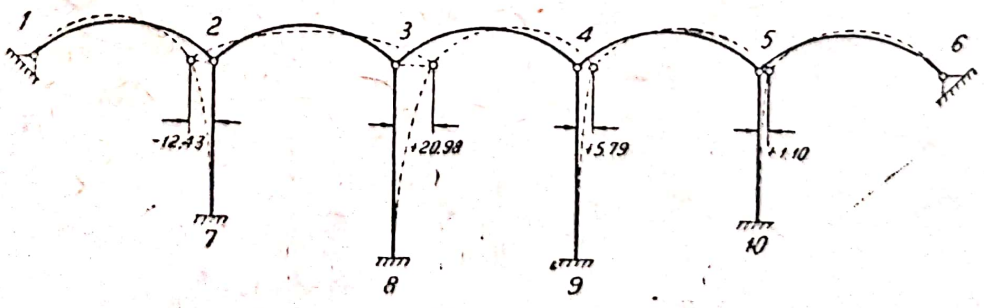


Fig. 136

Împingerile :

$$H_{1-2}^{(2)} = -0{,}325\ (-12{,}43) = +4{,}05 \text{ t}$$

$$H_{2-3}^{(2)} = -0{,}325\ (-12{,}43 - 20{,}98) - 28{,}2 = -17{,}31 \text{ t}$$

$$H_{2-7}^{(2)} = -1{,}070\ (-12{,}43) = +13{,}26 \text{ t}$$

$$H_{2-3}^{(3)} = -H_{2-3}^{(2)} = +17{,}31 \text{ t}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$H_{3-4}^{(3)} = -0{,}325\ (+20{,}98 - 5{,}79) = -4{,}95\ \text{t}$$

$$H_{3-8}^{(3)} = -0{,}592\ (+20{,}98) = -12{,}36\ \text{t}$$

$$H_{3-4}^{(4)} = -H_{3-4}^{(3)} = +4{,}95\ \text{t}$$

$$H_{4-5}^{(4)} = -0{,}325\ (+5{,}79 - 1{,}10) = -1{,}53\ \text{t}$$

$$H_{4-9}^{(4)} = -0{,}592\ (+5{,}79) = -3{,}42\ \text{t}$$

$$H_{4-5}^{(5)} = -H_{4-5}^{(4)} = +1{,}53\ \text{t}$$

$$H_{5-6}^{(5)} = -0{,}325\ (+1{,}10) = -0{,}36\ \text{t}$$

$$H_{5-10}^{(5)} = -1{,}070\ (+1{,}10) = -1{,}17\ \text{t}$$

Verificarea echilibrului în jurul nodurilor: De exemplu la nodul *3*: $+17{,}31 - 12{,}36 + 4{,}95 = 0$.

Exemplul 22. Arce cu tiranți.

Se recalculează sistemul din exemplul 21 în ipoteza că toate bolțile au tiranți metalici. Secțiunea tiranților pe metru lățime de boltă $A_t = 15$ cm².

Din fig. 136 se vede că numai bolta încărcată (*2—3*) își mărește lungimea prin deformare, iar celelalte bolți se scurtează, deci tiranții acestor bolți vor fi comprimați. Cum rigiditatea la compresiune a tiranților este nulă, vom considera atunci în calcul numai tirantul din deschiderea *2—3*.

Rigiditatea tirantului:

$$\beta = \frac{E_t}{E} \cdot \frac{A_t}{l} = \frac{2\,100\,000}{210\,000} \cdot \frac{0{,}0015}{15} = 10 \times 10^{-3}$$

Rigiditatea totală a bolții *2—3* cu tirant:

$$\beta = (0{,}325 + 10{,}000)\ 10^{-3} = 10{,}325 \times 10^{-3}$$

Sumele rigidităților la noduri:

$$\Sigma\beta_2 = 0{,}325 + 10{,}325 + 1{,}070 = 11{,}720$$

$$\Sigma\beta_3 = 0{,}325 + 10{,}325 + 0{,}592 = 11{,}242$$

$\Sigma\beta_4$, $\Sigma\beta_5$ nu se modifică.

Coeficienții de transmitere:

$$t_{3\to 2} = \frac{10{,}325}{11{,}720} = 0{,}880 \qquad t_{4\to 3} = \frac{0{,}325}{11{,}242} = 0{,}029$$

$$t_{2\to 3} = \frac{10{,}325}{11{,}242} = 0{,}918$$

Ceilalți coeficienți de transmitere rămîn aceiași.

Valorile inițiale ale deplasărilor:

$$\Delta_2'^{(1)} = -\frac{28{,}2}{11{,}720} = -2{,}40$$

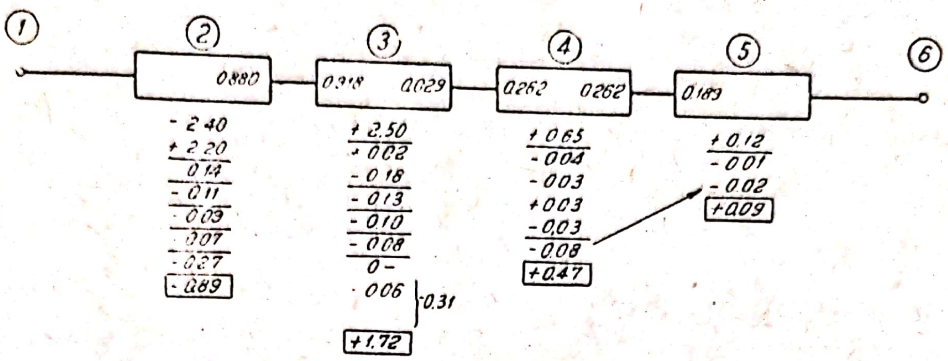
$$\Delta_3'^{(1)} = +\frac{28{,}2}{11{,}242} = +2{,}50$$

Scanned with OKEN Scanner

Schema de calcul (v. fig. 137).

Se observă că, datorită rigidității mari a tirantului $2-3$, convergența între 2 și 3 este foarte lentă. După terminarea transmiterilor în ordinea indicată în fig. 12, rămîne la nodul 3 deplasarea $-0{,}06$, cu care urmează să se continue transmiteri numai între nodurile 2 și 3, în restul sistemului cantitățile de transmis devenind neglijabile. Cum între 2 și 3 convergența este foarte lentă, utilizăm însumarea de progresii geometrice.

Rația $r = l_{2\to 3} \cdot l_{3\to 2} = 0{,}918 \times 0{,}880 = 0{,}807$



ORDINEA

(3) + 2.50	(2) - 0.11
(4) - 0.65	(3) - 0.10
(2) - 2.40 + 2.20 = - 0.20	(2) - 0.09
(3) + 0.02 - 0.18 = - 0.16	(3) - 0.08
(2) - 0.14	(4) - 0.04 - 0.03 + 0.03 - 0.03 = - 0.07
(3) - 0.13	(2) - 0.07
(5) + 0.12	(3) - 0.06

Fig. 137.

La nodul 3 vom avea atunci o progresie al cărei prim termen este $-0{,}06$. Suma progresiei:

$$-0{,}06\frac{1}{1-0{,}807} = -0{,}31$$

care se transmite la 4 cu $-0{,}31 \times 0{,}262 = -0{,}08$. La nodul 2 suma progresiei va fi:

$$-0{,}31 \times 0{,}880 = -0{,}27$$

Împingerile repartizate capetelor de bare:

$$H_{1-2}^{(2)} = -0{,}325\ (-0{,}89) = +0{,}3\ \text{t}$$
$$\left[H_{2-3}^{(2)} + Z_{2-3}^{(2)}\right] = -10{,}325\ (-0{,}89 - 1{,}72) = +26{,}9\ \text{t}$$
$$H_{2-7}^{(2)} = -1{,}070\ (-0{,}89) = +1{,}0\ \text{t}$$
$$\Big\} +28{,}2\ \text{t}$$

$$\left[H_{2-3}^{(3)} + Z_{2-3}^{(3)}\right] = -\left[H_{2-3}^{(2)} + Z_{2-3}^{(2)}\right] = -26{,}9\ \text{t}$$
$$H_{3-4}^{(3)} = -0{,}325\ (1{,}72 - 0{,}47) = -0{,}4\ \text{t}$$
$$H_{3-8}^{(3)} = -0{,}592\ (1{,}72) = -1{,}0\ \text{t}$$
$$\Big\} -28{,}3 \cong -28{,}2\ \text{t}$$

$$H_{3-4}^{(4)} = -H_{3-4}^{(3)} = +0{,}40\ \text{t}$$
$$H_{4-9}^{(4)} = -0{,}592\ (0{,}47) = -0{,}28\ \text{t}$$
$$H_{4-5}^{(4)} = -0{,}325\ (0{,}47 - 0{,}09) = -0{,}12\ \text{t}$$
$$\Big\} 0.-$$

$$H_{4-5}^{(5)} = -H_{4-5}^{(4)} = +0{,}12\ \text{t}$$
$$H_{5-6}^{(5)} = -0{,}325\ (0{,}09) = -0{,}03\ \text{t}$$
$$H_{5-10}^{(5)} = -1{,}070\ (0{,}09) = -0{,}09\ \text{t}$$
$$\Big\} 0.-$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe deschiderea $2-3$, împingerea $H = 26{,}9$ t se repartizează între arc și tirant proporțional cu rigiditățile, iar la cea repartizată bolții se adaugă și împingerea inițială.

$$H^{(2)}_{2-3\,(\text{arc})} = + \frac{0{,}325}{10{,}325} 26{,}9 - 28{,}2 = - 27{,}3 \text{ t}$$

$$Z^{(2)}_{2-3\,(\text{tirant})} = \frac{10{,}000}{10{,}325} 26{,}9 = + 26{,}0 \text{ t}$$

III. Scrierea ecuațiilor și rezolvarea lor prin iterație cînd se iau ca necunoscute împingerile H

a) *Scrierea ecuațiilor*

Folosim expresiile deplasărilor în funcție de împingeri (cu semnele împingerilor schimbate, trecînd de pe bară pe nod) :

$$\text{— pentru pile :} \quad \Delta'_j = -\frac{1}{\beta^{(j)}_{ji}} H^{(j)}_{ji} \tag{6.6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{— pentru arce :} \quad H^{(j)}_{jk} + H^{(k)}_{jk} = 0 \\ &\text{— pentru tiranți :} \quad Z^{(j)}_{jk} + Z^{(k)}_{jk} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

Avem la fiecare capăt de bară cîte o ecuație de tip (6.11) sau (6.6). În plus, pentru determinarea parametrilor Δ'_j, mai este necesară la fiecare nod scrierea condiției de echilibru $\Sigma H = 0$ (6.13). Ecuațiile (6.6), (6.11), (6.13) formează sistemul ce urmează să fie rezolvat prin iterație.

b) *Rezolvarea prin iterație (metoda repartizării împingerilor)*

În operațiunile propriu-zise de iterație (transmiteri) intră numai ecuațiile (6.11). Ecuațiile (6.6) nu intervin, deoarece pilele fiind încastrate la bază, nu se transmite nimic între capetele unei pile.

În ecuația (6.11) a capătului din j al barei jk, necunoscuta principală este $H^{(j)}_{jk}$. Explicităm necunoscuta principală :

$$H^{(j)}_{jk} = - H^{(k)}_{jk}$$

deci coeficientul de transmitere de la k la j este :

$$\boxed{t_{k \to j} = - 1} \tag{6.18}$$

(coresp. la 2.16)

Ca și în cazul cadrelor cu noduri fixe, ecuațiile suplimentare de nod (6.13) se rezolvă la fiecare treaptă a iterației printr-o operațiune de repartiție a împingerilor la noduri.

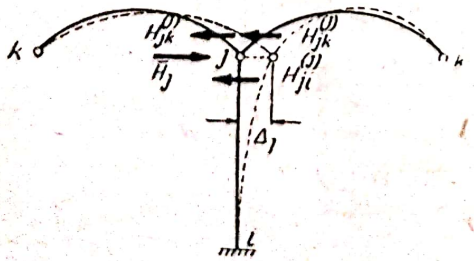


Fig. 138,

Deblocînd un nod j (fig. 138), la care suma împingerilor neechilibrate, provenite fie din sarcini exterioare, fie din transmiteri de la alte noduri, este $\bar{H}_j$, și menținînd blocate nodurile vecine k, nodul j capătă o deplasare, conform relației (6.16) :

$$\Delta'_j = E\Delta_j = \frac{\bar{H}_j}{\beta^{(j)}_{ji} + \Sigma\, \beta^{(j)}_{jk}}$$

Din această deplasare, capetele barelor din nodul j se încarcă cu împingerile :

$$H_{jk}^{(j)} = -\Delta_j' \beta_{jk}^{(j)} = -\frac{\beta_{jk}^{(j)}}{\beta_{ji}^{(j)} + \Sigma \beta_{jk}^{(j)}} \bar{H}_j = -r_{jk}^{(j)} \bar{H}_j$$

$$H_{ji}^{(j)} = -\Delta_j' \beta_{ji}^{(j)} = -\frac{\beta_{ji}^{(j)}}{\beta_{ji}^{(j)} + \Sigma \beta_{jk}^{(j)}} \bar{H}_j = -r_{ji}^{(j)} \bar{H}_j$$

unde $r_{jk}^{(j)}$, $r_{ji}^{(j)}$ sînt coeficienții de repartiție (rigiditățile relative), avînd aceeași semnificație ca și la cadrele cu noduri fixe.

$$\boxed{r_{jk}^{(j)} = \frac{\beta_{jk}^{(j)}}{\beta_{ji}^{(j)} + \Sigma \beta_{jk}^{(j)}} \; ; \; r_{ji}^{(j)} = \frac{\beta_{ji}^{(j)}}{\beta_{ji}^{(j)} + \Sigma \beta_{jk}^{(j)}}} \qquad (6.19)$$

(coresp. la 2.18)

Efectuînd alternativ transmiterile și repartițiile la noduri, se rezolvă atît ecuațiile de capete de bară (6.11, 6.6), cît și cele de nod (6.13).

c) *Semnificația fizică a iterației*

Semnificația fizică a coeficientului de transmitere apare în fig. 138. Dînd nodului j o deplasare și menținînd fixe nodurile vecine k, bara jk se încarcă cu o împingere $H_{jk}^{(j)}$ în capătul j. În capătul k al barei, va apărea evident o împingere egală și de sens contrar. Dacă $H_{jk}^{(j)} = 1$, $H_{jk}^{(j)} = -1$. Deci și aici coeficientul de transmitere de la j la k poate fi definit ca împingerea ce apare în k, dacă în j se aplică o împingere unitară, nodul k fiind fix. Dacă în această definiție se înlocuiesc împingerile cu momente și deplasările liniare cu rotiri, se recade peste definiția dată coeficientului de transmitere în metoda repartizării momentelor la cadrele cu noduri fixe. Blocarea nodului k devine atunci, fiind vorba de rotiri, o încastrare perfectă.

Semnificația coeficientului de repartiție este cea cunoscută : deblocînd un nod încărcat cu o împingere $\bar{H}$ și menținînd blocate nodurile vecine, barele se încarcă cu împingeri proporționale cu rigiditățile lor la translație și a căror sumă în jurul nodului trebuie să echilibreze pe $\bar{H}$.

d) *Mersul calculului*

Schema de calcul este aceeași ca și în metoda repartizării momentelor.

Dacă iterația se închide pe repartiții, împingerile rezultate din calcul satisfac echilibrul în jurul nodurilor [relațiile (6.13)], dar nu satisfac ecuațiile (6.11), respectiv împingerile la cele două capete ale unui arc nu rezultă egale și de semn contrar. Dacă iterația se închide pe transmiteri, avem situația inversă. Așa cum s-a arătat și în cazul barelor supuse la răsucire ale cadrelor spațiale cu noduri fixe (cap. V), unde ecuațiile și rezolvarea lor prin iterație sînt identice cu cele ale sistemelor de tipul arcelor articulate pe pile flexibile — obișnuit se oprește iterația pe repartiții, iar ca valori finale ale împingerilor arcelor se iau mediile împingerilor de la cele două capete.

În exemplul 23 este recalculat sistemul din exemplul 21, luînd ca necunoscute împingerile [1]).

---

[1]) Această metodă a fost introdusă și utilizată la I.P.C.S. de ing. *C. Ionescu*.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 23. Arce articulate pe pile flexibile, calculate prin metoda repartizării împingerilor

Schema sistemului și rigiditățile la translație ale barelor conform exemplului 21.

Coeficienții de repartiție :

$$r_{1-2}^{(2)} = r_{2-3}^{(3)} = r_{4-5}^{(5)} = r_{5-6}^{(5)} = \frac{0{,}325}{1{,}720} = 0{,}189$$

$$r_{2-7}^{(2)} = r_{5-10}^{(5)} = \frac{1{,}070}{1{,}720} = 0{,}622$$

$$r_{2-3}^{(3)} = r_{3-4}^{(3)} = r_{3-4}^{(4)} = r_{4-5}^{(4)} = \frac{0{,}325}{1{,}242} = 0{,}262$$

$$r_{3-8}^{(3)} = r_{4-9}^{(4)} = \frac{0{,}592}{1{,}242} = 0{,}476$$

Schema de calcul (v. fig. 139) :

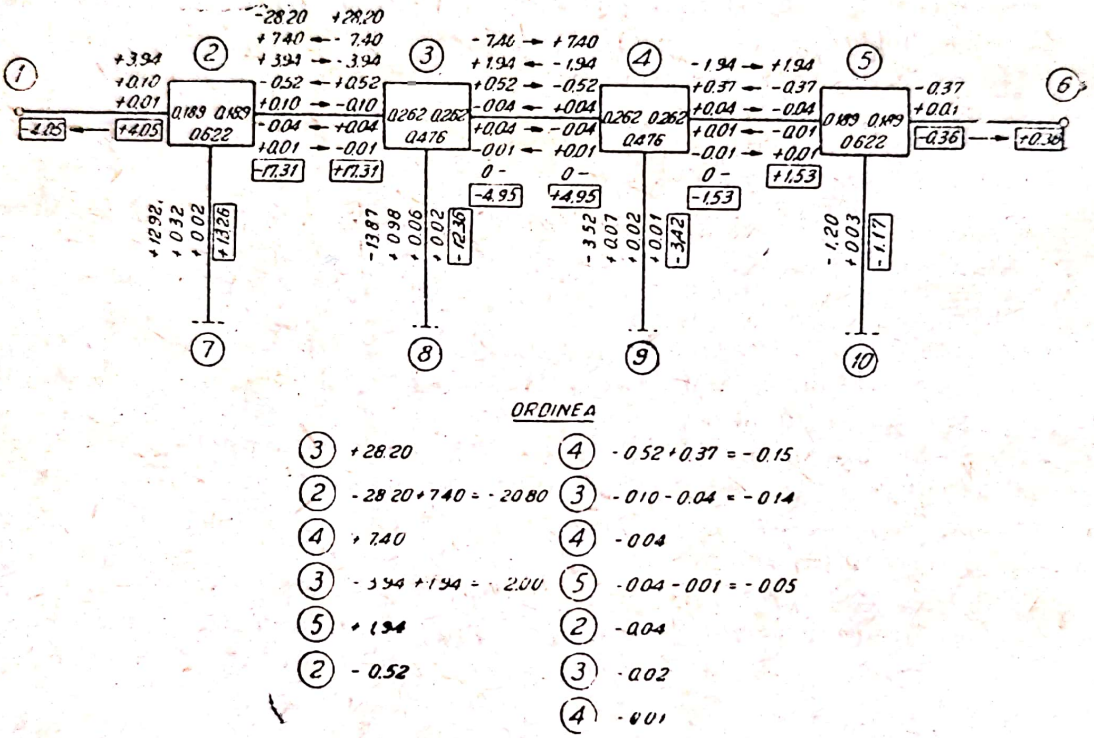


Fig. 139

IV. Diverse detalii de calcul

Dat fiind că rezolvarea prin aproximații succesive a sistemelor, avînd ca deplasări necunoscute ale nodurilor translațiile, prezintă o analogie totală cu cea a sistemelor în care necunoscutele sînt rotirile nodurilor, nu insistăm asupra diverselor detalii și probleme speciale ce pot interveni și care își au corespondentele tratate detaliat în capitolele IV și V. Astfel :

1. Pentru barele cu secțiuni variabile, rigiditățile trebuie calculate ținînd seama de variația secțiunii. Expresiile coeficienților de transmitere nu suferă însă nici o modificare : dacă se iau ca necunoscute împingerile, ei rămîn egali cu — 1, iar dacă se iau ca necunoscute rotirile, rămîne valabilă expresia (6.17), în care însă se introduc rigiditățile calculate ținînd seamă de variația secțiunii.

2. Se poate ține seama în calcul și de cedările reazemelor extreme (culeelor), introducînd în locul acestor reazeme bare fictive în prelungire,

care au rigiditatea la translație egală cu cea a reazemelor. Problema este analogă cu considerarea unei încastrări parțiale în locul încastrării perfecte la capătul unei bare de cadru cu noduri fixe.

Rigiditatea la translație a reazemelor de capăt (a terenului de fundație sub culei), definită ca împingerea necesară pentru a imprima culeei o translație laterală unitară, are expresia : $B_0 = CA_f$, unde C este coeficientul de tasare, A_f — suprafața de rezemare laterală a culeei. Se observă analogia cu expresia (4.48), găsită pentru rigiditatea la rotire.

3. În ceea ce privește avantajele și dezavantajele comparative ale operării cu împingeri sau cu deplasări, se mențin considerațiunile făcute la cadrele cu noduri fixe, între metoda transmiterii rotirilor și metoda repartizării momentelor.

4. Pentru sisteme cu puține noduri, se poate și aci folosi rezolvarea prin însumări de progresii geometrice, așa cum s-a procedat de altfel parțial și în exemplul 22. Determinarea rației și calculul direct al necunoscutelor prin însumarea progresiilor geometrice prezintă avantaje deosebite în cazul de față, unde convergența iterației este mai mică decît la cadrele cu noduri fixe.

5. Pentru sistemele care prezintă particularitatea că la fiecare nod se întîlnesc numai cîte două bare, cum ar fi cel din fig. 140 (arce articulate pe pile pendulare), se poate imagina o metodă de calcul operînd cu împingeri și cu cîte o singură coloană de cifre la nod, așa cum s-a dat în cap. V pentru grinzile continue. Pilele pendulare la un astfel de sistem sînt analoge cu reazemele unei grinzi continue.

6. Se observă că și aci se menține relația între coeficienții de transmitere din operarea cu împingeri și operarea cu deplasări. Coeficientul de transmitere în operarea cu deplasări este egal cu produsul dintre coeficientul de transmitere și cel de repartiție în operarea cu solicitări, la fel ca și la cadrele cu noduri fixe.

$$t_{k\to j}^{(\Delta)} = -\, t_{j\to k}^{(H)}\; r_{jk}^{(j)} \qquad (6.20)$$

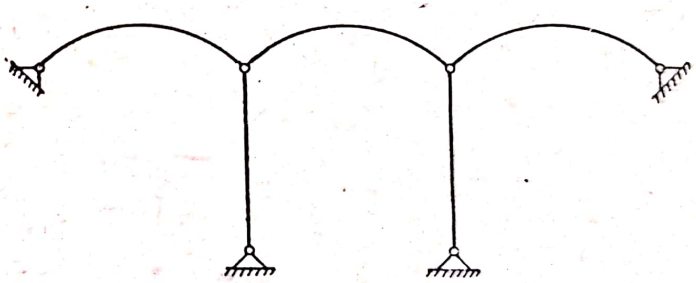


Fig. 140.

7. În operarea cu forțele, se poate simplifica schema de transmiteri printr-un procedeu asemănător celui propus de *Dašek* pentru cazul cadrelor cu noduri fixe, eliminînd operațiunile de repartiție și utilizînd coeficienți de transmitere :

$$t'_{j\to k} = -\, r_{jk}^{(j)}\; t_{j\to k}$$

astfel ca o operațiune de transmitere să înglobeze o transmitere și o repartiție din metoda obișnuită.

B. REȚELE DE GRINZI

Rețelele de grinzi sînt sisteme plane formate din grinzi încrucișate, solicitate de sarcini normale pe planul lor (fig. 141). Cînd sarcinile acționează după direcții înclinate, teoria rețelelor de grinzi se referă la componentele lor normale pe planul rețelei, — la componentele cuprinse în planul ei, rețeaua comportîndu-se ca un cadru plan obișnuit.

Prin încovoierea grinzilor, nodurile capătă translații, ale căror direcții sînt cunoscute (după direcțiile de acțiune ale sarcinilor) și rotiri. Deoarece translațiile se produc numai după direcții normale pe planul rețelai, nu sînt posibile rotiri de noduri în jurul unor axe normale pe planul rețelei, deci vectorii rotirilor nodurilor sînt situați în planul rețelei. În aceste condiții rămîn ca necunoscute la fiecare nod :

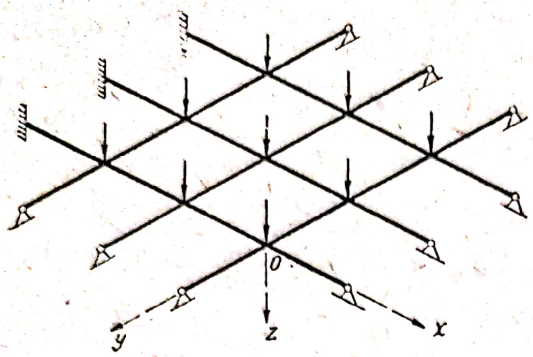


Fig. 141.

— mărimea translației
— mărimea rotirii
— direcția vectorului rotirii în planul rețelei.

Dacă rețeaua este ortogonală, așa cum se întîmplă de obicei la planșeele de beton armat în casete, și se consideră ca necunoscute translațiile nodurilor și proiecțiile vectorilor rotirilor după cele două direcții Ox și Oy ale grinzilor, condițiile de continuitate la noduri devin :

1) Condiția de egalitate a translațiilor după direcția Oz (săgețile grinzilor x și y să fie egale la noduri).

2) Condiția de egalitate a proiecțiilor vectorilor rotirilor după direcția Ox (rotirile prin încovoiere ale grinzilor y să fie egale cu rotirile prin răsucire ale grinzilor x).

3) Condiția de egalitate a proiecțiilor vectorilor rotirilor după direcția Oy (rotirile prin încovoiere ale grinzilor x să fie egale cu rotirile prin răsucire ale grinzilor y).

După cum se știe, la unele tipuri de rețele de grinzi, de exemplu cele ale planșeelor în casete, se admite și un calcul ținînd seama numai de continuitatea la translații, întrucît influența rigidității la rotire a nodurilor asupra momentelor încovoietoare maxime în grinzi este secundară. În acest caz, la fiecare nod cele două grinzi care se încrucișează se consideră articulate între ele (fig. 142), ca și cum în nod ar exista un pendul de lungime invariabilă, care menține constantă distanța între grinzi, obligîndu-le să capete aceeași translație după direcția Oz, grinzile putîndu-se însă roti independent. În această ipoteză simplificatoare, rețeaua devine un sistem cu legături de tipul I, în care la fiecare nod avem cîte o singură condiție de continuitate, cea a translațiilor.

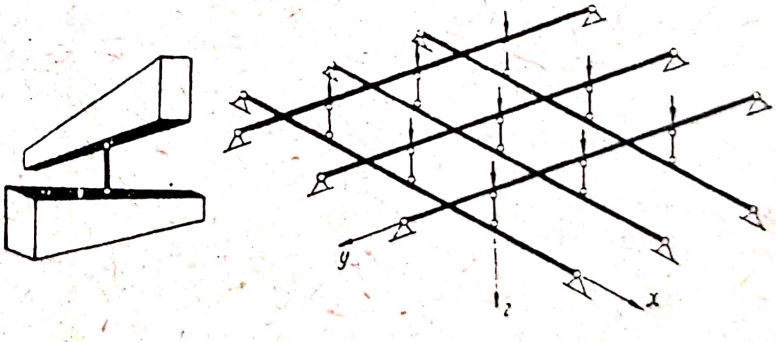


Fig. 142.

Scrierea și rezolvarea sistemului de ecuații se poate face pe două căi, după sistemul de bază de la care se pornește :

1) Considerînd fiecare porțiune de grindă dintre două noduri succesive ca o bară, se obține un sistem de grinzi continue cu reazeme tasabile, încrucișate, în care necunoscutele static nedeterminate sînt rotirile și translațiile

nodurilor. Se scriu condițiile de continuitate la rotiri pentru fiecare grindă și condițiile de continuitate la translații. Se ajunge astfel la un sistem care nu diferă de un cadru spațial cu noduri deplasabile și care poate fi rezolvat prin aproximații succesive cu metodele arătate în cap. VII și VIII. Solicitările exterioare care acționează la nodurile sistemului de bază, cu toate deplasările blocate, sînt momentele de încastrare perfectă și reacțiunile la noduri ale sarcinilor de pe bare. Solicitările necunoscute sînt momentele la capetele barelor, iar deplasările necunoscute sînt rotirile nodurilor și translațiile nodurilor (rotirile barelor). Pe această cale este atacată rezolvarea rețelelor de grinzi în lucrarea prof. *Cr. Mateescu* (v. bibl. 46), folosind metoda obișnuită a repartizării momentelor.

2) Considerînd fiecare grindă întreagă ca o bară, continuitatea rotirilor în lungul unei grinzi este introdusă implicit, astfel că nu mai rămîn de scris și de rezolvat decît ecuațiile exprimînd condițiile de egalitate a săgeților grinzilor în punctele de încrucișare.

Solicitările exterioare sînt sarcinile de pe grinzi. Pentru calcul, se admite de obicei aproximația de a înlocui sarcinile distribuite pe grinzi prin sarcini concentrate aplicate la noduri, considerînd la fiecare nod concentrate sarcinile de pe porțiunile aferente de grinzi.

Solicitările necunoscute sînt la fiecare nod j (fig. 143) fracțiunile $P_x^{(j)}$, $P_y^{(j)}$ din sarcina exterioară $\overline{P}_j$ a nodului, care se repartizează ca sarcini grinzilor x și y.

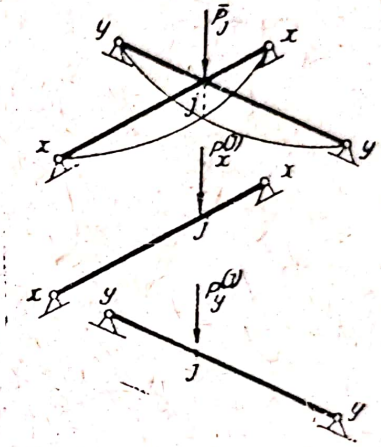


Fig. 143

Vom avea totdeauna :

$$\boxed{P_x^{(j)} + P_y^{(j)} = \overline{P}_j} \qquad (6.21)$$

Cele două fracțiuni $P_x^{(j)}$ și $P_y^{(j)}$ sînt legate prin relația (6.21), deci în realitate numai una dintre ele este necunoscută. Se poate considera ca necunoscută la un nod j forța de legătură între cele două grinzi, respectiv în reprezentarea din fig. 142, forța axială din pendulul de lungime invariabilă care leagă grinzile.

Deși elementele care intervin în ecuații sînt de natură liniară (forțe, translații), totuși lucrul mecanic de deformație de care se ține seama în calcul este cel produs de momentele încovoietoare, deci elementele caracteristice geometrice și de material ale barelor care intervin vor fi E, I și l.

Prin rezolvarea sistemului de ecuații, se obțin valorile sarcinilor care se repartizează fiecărei grinzi a rețelei. Cu acestea se determină apoi eforturile în fiecare grindă, considerată independent (momentele încovoietoare și forțele tăietoare).

Această a doua cale de a ataca problema prezintă în raport cu prima avantajul că operațiunile în rezolvarea prin iterație se simplifică și se reduc considerabil, eliminîndu-se din iterație operațiunile care se pot face și direct fără dificultăți (calculul momentelor încovoietoare în grinzi în funcție de forțe). Totodată, apar însă și unele dezavantaje, provenind din faptul că se consideră ca elemente nu bare, ci grinzi întregi : coeficienții de influență care fac legătura între solicitări și deplasări au expresii mai complicate, schema de transmiteri este diferită de schema rețelei (dezavantaj care există

de altfel şi în cealaltă metodă), convergenţa iteraţiei este uneori mai slabă decît la alte sisteme etc.

În cele ce urmează este folosită calea a doua, aceasta fiind singura specifică reţelelor de grinzi ; pentru rezolvarea după teoria cadrelor spaţiale cu noduri deplasabile, metodele sînt dezvoltate în cap. VII şi VIII.

I. Relaţiile între forţe şi săgeţi într-o grindă

Considerînd o grindă AB (fig. 144), încărcată cu o forţă concentrată $P^{(k)}$ aplicată în secţiunea k la distanţa a de la reazemul A, săgeata Δ_j care se produce într-o altă secţiune j a grinzii, la distanţa x de la reazemul A, are expresia :

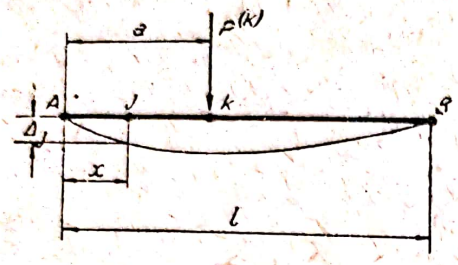


Fig. 144.

$$\Delta_j = \eta_{jk} P^{(k)} \qquad (6.22)$$

unde η_{jk} este un coeficient de influenţă, funcţie de natura rezemărilor grinzii în A şi B şi de poziţia secţiunilor j şi k. (Convenţia de semne : se alege un sens în care săgeţile se consideră pozitive, de exemplu la planşee orizontale, încărcate cu sarcini verticale, sensul de sus în jos. Forţele se consideră pozitive cînd tind să producă săgeţi pozitive.)

Dacă grinda are secţiunea constantă :

$$\eta_{jk} = \omega_{jk} \frac{l^3}{EI}$$

Expresia coeficientului ω_{jk} este dată în manuale, pentru diferite tipuri de rezemări ale grinzii în A şi B. Notînd $\alpha = \frac{a}{l}$ şi $\xi = \frac{x}{l}$, avem ($\alpha > \xi$) :

— pentru grinda simplu rezemată în A şi B :

$$\omega_{jk} = \frac{1-\alpha}{6} \xi \left[\alpha (2 - \alpha) - \xi^2\right]$$

— pentru grinda încastrată în A şi simplu rezemată în B :

$$\omega_{jk} = \frac{1}{12} \left[3 \alpha (1 - 2 \alpha + \alpha^2) \xi - (1 - 2 \alpha + \alpha^3) \xi^3\right]$$

— pentru grinda încastrată în A şi B :

$$\omega_{jk} = \frac{(1-\alpha)^2}{6} \xi^2 \left[\alpha (3 - 2 \xi) - \xi\right]$$

— pentru o consolă încastrată în A :

$$\omega_{jk} = \frac{1}{6} \left[2 \alpha^3 - 3 \alpha^2 (1 - \xi) + (1 - \xi)^3\right]$$

În tabelele 37—40 sînt date valorile ω_{jk} multiplicate cu 1000, pentru cele 4 tipuri de grinzi de mai sus, în secţiuni obţinute prin împărţirea deschiderilor în 2—10 părţi egale.

Forța exterioară $P^{(j)}$ care trebuie aplicată în j pentru ca grinda să capete în j o săgeată avînd valoarea egală cu unitatea, este :

$$P^{(j)} = \frac{1}{\eta_{jj}} \Delta_j = \frac{1}{\eta_{jj}}$$

Coeficientul $\frac{1}{\eta_{jj}}$ caracterizează deformabilitatea la încovoiere a grinzii în secțiunea j, avînd un sens analog cu rigiditatea la translație din cazul arcelor articulate pe pile flexibile (solicitarea care produce o translație unitară). De aceea vom denumi acest coeficient *rigiditatea la încovoiere a grinzii AB în secțiunea j* și vom folosi pentru el aceeași notație ca și pentru rigiditatea la translație.

$$\boxed{B_{AB}^{(j)} = \frac{1}{\eta_{jj}}} \qquad (6.23)$$

(η_{jj} se obține din η_{jk} punînd $\alpha = \xi$)

Presupunem acum că grinda AB considerată este o grindă după direcția x a unei rețele xy. În toate nodurile rețelei acționează forțe exterioare $\bar{P}_j$, $\bar{P}_k$ ...

$P_x^{(j)}$, $P_x^{(k)}$ sînt fracțiunile din $\bar{P}_j$, $\bar{P}_k$, ce se repartizează la grinda x în nodurile j și k.

Săgeata totală în j, pe grinda x :

$$\boxed{\Delta_x^{(j)} = \eta_{jj} P_x^{(j)} + \sum_{k \neq j} \eta_{jk} P_x^{(k)}} \qquad (6.24)$$

Relația (6.24) exprimă săgeata într-un punct al unei grinzi, în funcție de forțele repartizate necunoscute P_x. Relațiile inverse (forțele în funcție de săgeți) nu pot fi scrise direct, coeficienții de influență respectivi neputîndu-se determina decît prin rezolvarea unui sistem de ecuații, de un număr egal cu numărul nodurilor. Rezultă că ecuațiile nu se pot practic scrie și rezolva prin iterație decît luînd ca necunoscute forțe, pe baza relației (6.24).

II. Scrierea ecuațiilor și rezolvarea lor prin iterație, cînd se iau ca necunoscute forțele repartizate grinzilor (P_x, P_y)

a) *Scrierea ecuațiilor*

Sistemul de ecuații avînd ca necunoscute forțele repartizate P_x, P_y se obține scriind în fiecare nod condiția de continuitate a translațiilor (săgeților) :

$$\Delta_x^{(j)} = \Delta_y^{(j)} = \Delta_j$$

și înlocuind $\Delta_x^{(j)}$, $\Delta_y^{(j)}$ cu expresiile lor în funcție de forțele repartizate grinzilor x și y, conform relației (6.24).

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm (fig. 145) două grinzi x și y, dintr-o rețea, acționate în punctul de intersecție j de o sarcină exterioară $\overline{P}_j$ și presupunem legăturile grinzilor cu restul rețelei desfăcute.

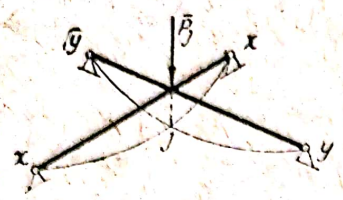


Fig. 145,

Săgeata grinzii x în j :

$$\Delta_x^{(j)} = \eta_{jj}^{(x)} \, P_x^{(j)} = \frac{P_x^{(j)}}{B_x^{(j)}}$$

Săgeata grinzii y în j :

$$\Delta_y^{(j)} = \eta_{jj}^{(y)} \, P_y^{(j)} = \frac{P_y^{(j)}}{B_y^{(j)}}$$

Punînd condiția ca $\Delta_x^{(j)} = \Delta_y^{(j)} = \Delta_j$, avem :

$$\frac{P_x^{(j)}}{B_x^{(j)}} = \frac{P_y^{(j)}}{B_y^{(j)}} = \frac{P_x^{(j)} + P_y^{(j)}}{B_x^{(j)} + B_y^{(j)}} = \frac{\overline{P}_j}{B_x^{(j)} + B_y^{(j)}} = \Delta_j$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_x^{(j)} &= \overline{P}_j \frac{B_x^{(j)}}{B_x^{(j)} + B_y^{(j)}} = r_x^{(j)} \overline{P}_j \\ P_y^{(j)} &= \overline{P}_j \frac{B_y^{(j)}}{B_x^{(j)} + B_y^{(j)}} = r_y^{(j)} \overline{P}_j \end{aligned}} \qquad (6.25)$$

unde $r_x^{(j)}$, $r_y^{(j)}$ pot fi numiți *coeficienți de repartiție după direcțiile* x *și* y. Forța $\overline{P}_j$ se repartizează între grinzile x și y proporțional cu rigiditățile lor la încovoiere B în punctul de intersecție j.

Coeficienții $r_x^{(j)}$, $r_y^{(j)}$ se pot exprima și în funcție de η :

$$\left.\begin{aligned} r_x^{(j)} &= \frac{B_x^{(j)}}{B_x^{(j)} + B_y^{(j)}} = \frac{\dfrac{1}{\eta_{jj}^{(x)}}}{\dfrac{1}{\eta_{jj}^{(x)}} + \dfrac{1}{\eta_{jj}^{(y)}}} = \frac{\eta_{jj}^{(y)}}{\eta_{jj}^{(x)} + \eta_{jj}^{(y)}} \\ r_y^{(j)} &= \frac{\eta_{jj}^{(x)}}{\eta_{jj}^{(x)} + \eta_{jj}^{(y)}} \end{aligned}\right\} \qquad (6.26)$$

Se observă că pentru coeficienții de repartiție s-au obținut expresii asemănătoare ca și pentru celelalte sisteme formate din bare, tratate anterior, cu deosebirea că apar cu semnul $+$. Aceasta rezultă din faptul că în cazul de față ecuația de nod (6.21) nu este o relație de echilibru ci o relație de descompunere de forțe. Prin operațiunea de repartiție nu se restabilește echilibrul la un nod, ci se descompune o forță în două fracțiuni, din care fiecare este preluată de cîte o grindă.

Ținînd seama acum și de legăturile grinzilor x, y cu restul rețelei, respectiv de condițiile de continuitate din toate nodurile, în situația finală de echilibru după deformare, grinda x (fig. 146) se încarcă în nodul j cu forța repartizată $P_x^{(j)}$ și în celelalte noduri k cu forțele $P_x^{(k)}$, iar grinda y în nodul j cu $P_y^{(j)}$ și în celelalte noduri i cu forțele $P_y^{(i)}$,

Scanned with OKEN Scanner

Săgeţile grinzilor x şi y în punctul de intersecţie j :

$$\Delta_x^{(j)} = P_x^{(j)}\,\eta_{jj}^{(x)} + \sum P_x^{(k)}\,\eta_{jk}^{(x)}$$

$$\Delta_y^{(j)} = P_y^{(j)}\,\eta_{jj}^{(y)} + \sum P_y^{(i)}\,\eta_{ji}^{(y)} = [\overline{P}_j - P_x^{(j)}]\,\eta_{jj}^{(y)} + \sum P_y^{(i)}\,\eta_{ji}^{(y)}$$

$$\Delta_x^{(j)} = \Delta_y^{(j)}$$

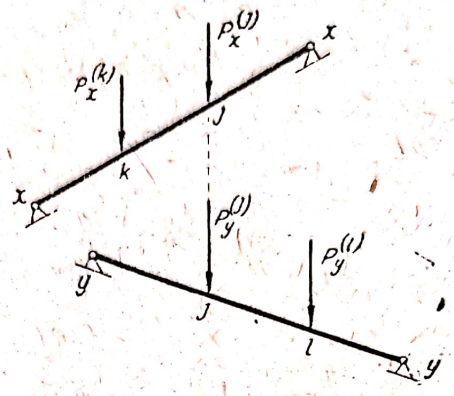


Fig. 146

$$\boxed{P_x^{(j)}\,\eta_{jj}^{(x)} + \sum P_x^{(k)}\,\eta_{jk}^{(x)} = [\overline{P}_j - P_x^{(j)}]\,\eta_{jj}^{(y)} + P_y^{(i)}\,\eta_{ji}^{(y)}} \qquad (6.27)$$

Vom avea la fiecare nod cîte o ecuaţie de tipul (6.27). Sistemul de ecuaţii (6.27) urmează să fie rezolvat prin iteraţie.

b) *Rezolvarea prin iteraţie (metoda „transmiterii forţelor“)*

Necunoscuta principală în ecuaţia nodului j este $P_x^{(j)}$ (forţa repartizată în nodul j grinzii x). Explicităm necunoscuta principală :

$$P_x^{(j)}\,[\eta_{jj}^{(x)} + \eta_{jj}^{(y)}] = \overline{P}_j\,\eta_{jj}^{(y)} + \sum P_y^{(i)}\,\eta_{ji}^{(y)} - \sum P_x^{(k)}\,\eta_{jk}^{(x)} \qquad (6.27')$$

Valoarea iniţială a necunoscutei $P_x^{(j)}$:

$$\boxed{P_x^{(j)\,(1)} = \frac{\overline{P}_j\,\eta_{jj}^{(y)}}{\eta_{jj}^{(x)} + \eta_{jj}^{(y)}} = \overline{P}_j\,r_x^{(j)}} \qquad (6.28)$$

Coeficientul de transmitere de la k la j pe grinda x :

$$t_{k\to j} = -\frac{\eta_{jk}^{(x)}}{\eta_{jj}^{(x)} + \eta_{jj}^{(y)}} = -\frac{\eta_{jj}^{(x)}}{\eta_{jj}^{(x)}} \cdot \frac{\eta_{jk}^{(x)}}{\eta_{jj}^{(x)} + \eta_{ji}^{(y)}} = \boxed{-\frac{\eta_{jk}^{(x)}}{\eta_{jj}^{(x)}}\,r_y^{(j)}} \qquad (6.29)$$

Coeficientul de transmitere de la i la j pe grinda y :

$$t_{i\to j} = +\frac{\eta_{ji}^{(y)}}{\eta_{jj}^{(x)} + \eta_{jj}^{(y)}} = +\frac{\eta_{jj}^{(y)}}{\eta_{jj}^{(y)}} \cdot \frac{\eta_{ji}^{(y)}}{\eta_{jj}^{(x)} + \eta_{ji}^{(y)}} = \boxed{+\frac{\eta_{ji}^{(y)}}{\eta_{jj}^{(y)}}\,r_x^{(j)}} \qquad (6.30)$$

Rezolvarea prin iteraţie pe schema de transmiteri va consta deci din : determinarea valorilor iniţiale ale necunoscutelor, prin repartizarea la noduri a forţelor exterioare $\overline{P}$, iar apoi transmiterea acestor valori, corectînd

Scanned with OKEN Scanner

succesiv nodurile pînă cînd valorile de transmis devin suficient de mici. Rezultă că vom avea cîte o singură operaţiune de repartiţie de fiecare nod, în prima treaptă a calculului, iar apoi numai operaţiuni de transmitere.

Operînd cu forţele repartizate $P_x^{(j)}$, $P_y^{(j)}$, ca necunoscute, vor rezulta la fiecare nod cîte două coloane de termeni (coloana $P_x^{(j)}$ şi coloana $P_y^{(j)}$). Se observă însă că în afară de prima treaptă de calcul, cînd se repartizează forţele exterioare şi avem :

$$P_x^{(j)\,(1)} + P_y^{(j)\,(1)} = \overline{P}_j$$

în tot cursul calculului forţele exterioare nu mai intervin, deoarece se operează numai cu corecţiile necunoscutelor, astfel că în orice treaptă de calcul $m\,(m \neq 1)$ vom avea :

$$P_x^{(j)\,(m)} + P_y^{(j)\,(m)} = 0$$

[$P_x^{(j)\,(m)}$ şi $P_y^{(j)\,(m)}$ egale şi de semn contrar]. Deci termenii corespunzători din cele două coloane de la nodul j, cu excepţia primilor, sînt totdeauna egali şi de semn contrar. Putem atunci simplifica schema de calcul, renunţînd la una din coloane, de exemplu la coloana $P_y^{(j)}$. Aceasta revine la a elimina din ecuaţii necunoscutele $P_y^{(j)}$, obţinînd un sistem de ecuaţii în care necunoscutele sînt numai $P_x^{(j)}$.

Înlocuind în (6.27′) $P_y^{(j)} = -P_x^{(j)}$, avem :

$$P_x^{(j)}\,[\eta_{jj}^{(x)} + \eta_{jj}^{(y)}] = \overline{P}_j\,\eta_{jj}^{(y)} + \sum P_x^{(k)}\,\eta_{jk}^{(x)} + \sum P_x^{(i)}\,\eta_{jk}^{(y)}$$

Expresia coeficientului de transmitere pe grinzile y de la i la j rămîne aceeaşi (6.30), cu semnul schimbat.

$$t_{i\to j} = -\frac{\eta_{ji}^{(y)}}{\eta_{jj}^{(y)}}\,r_x^{(j)} \qquad (6.30')$$

În felul acesta, toate transmiterile, atît pe grinzile x cît şi pe grinzile y, se fac cu semnul — , iar la fiecare nod vom avea (cu excepţia repartiţiei iniţiale a forţelor exterioare) cîte o singură coloană de termeni, a cărei sumă reprezintă valoarea finală a lui $P_x^{(j)}$.

c) *Mersul calculului*

Cu ajutorul tabelelor 37—40 se calculează rigidităţile la încovoiere ale grinzilor. În locul rigidităţilor teoretice B se pot introduce şi aici *rigi-*

ditățile practice β, reduse cu E. La planșeele în casete, momentele de inerție ale grinzilor sînt de obicei egale. Atunci se poate lua:

$$\beta = \frac{B}{EI} = \frac{1}{\eta_{jj} EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{EI}{\omega_{jj} l^3} = \frac{1}{\omega_{jj} l^3}$$

unde ω_{jj} sînt coeficienții din tabelele 37—40.

Tot în tabelele 37—40 sînt date și valorile rapoartelor η_{jk}/η_{jj} care, înmulțite cu coeficienții de repartiție din nodurile spre care se transmite, dau valorile coeficienților de transmitere.

Datorită faptului că s-au ales ca bare grinzi întregi, în ecuația (6.27) a unui nod j al rețelei intră, pe lîngă necunoscutele din j și cele din nodurile vecine, și necunoscutele din toate celelalte noduri i și k străbătute de cele două grinzi care se intersectează în j. În consecință, *pe schemă se vor face transmiteri de la un nod nu numai la nodurile vecine, ci la toate nodurile celor două grinzi care se întîlnesc în nodul de unde se transmite.* Aceasta constituie unul din inconvenientele metodei, deoarece nu se mai poate folosi ca schemă de transmiteri chiar schema sistemului. Coeficienții de transmitere trebuie să fie reprezentați separat într-o tabelă de felul celei de mai jos.

Nodul de la care se transmite (k)	Nodul spre care se transmite (j)							
j	$t_{k \to j}$	j	$t_{k \to j}$	j	$t_{k \to j}$	j	$t_{k \to j}$

Se recomandă corectarea succesivă a nodurilor, care mărește simțitor rapiditatea convergenței iterației.

Mersul calculului este următorul:

1) Se repartizează la fiecare nod forțele exterioare și se înscriu pe schemă gata repartizate.

2) Se transmit cu semnul — forțele repartizate.

3) Se continuă calculul numai cu coloanele P_x, făcînd transmiteri pe ambele direcții cu semnul —, pînă cînd cantitățile de transmis devin suficient de mici.

4) Se însumează termenii din coloanele P_x, obținîndu-se valorile finale ale forțelor repartizate grinzilor x.

5) Forțele repartizate grinzilor y sînt:

$$P_y^{(j)} = \overline{P}_j - P_x^{(j)}$$

Mersul calculului poate fi urmărit pe exemplul 24.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 24. Rețea de grinzi calculată prin metoda „transmiterii forțelor".

Se dă planșeul în casete din fig. 147, simplu rezemat pe contur și încărcat, pe lîngă sarcina uniform distribuită moartă și utilă, cu două ziduri situate deasupra grinzilor $4-5-6$ și $3-6-9$.

Pentru sarcina uniform distribuită, ținînd seama de simetrie, rețeaua de grinzi rămîne de 3 ori static nedeterminată, astfel că se poate rezolva sistemul de ecuații (6.27) direct, fără dificultate. De asemenea există în manuale și tabele cu valorile momentelor încovoietoare gata calculate pentru diferite rapoarte $\frac{l_x}{l_y}$.

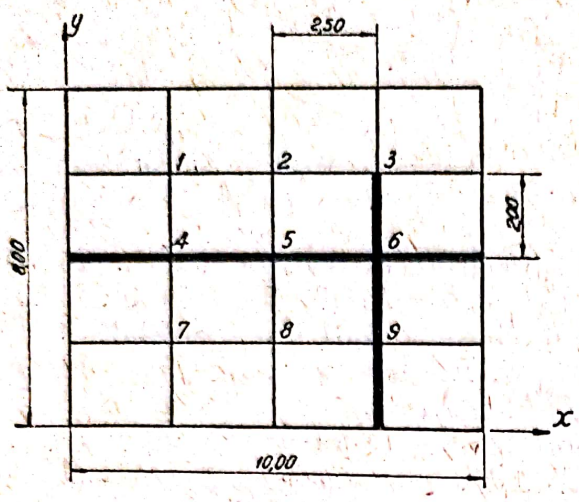


Fig. 147.

Pentru sarcina din ziduri însă, care este nesimetrică, gradul de nedeterminare statică este egal cu numărul nodurilor (9) și rezolvarea prin aproximații succesive devine mai avantajoasă. Dăm mai jos calculul rețelei de grinzi prin metoda transmiterii forțelor, numai pentru sarcinile din ziduri.

Toate grinzile sînt simplu rezemate la capete și au aceeași secțiune. Sarcina dată de zid = 1,6 t/m.

Sarcinile aferente nodurilor :

$$\overline{P}_3 = 1{,}6 \times 1{,}00 = 1{,}6 \text{ t}$$

$$\overline{P}_4 = \overline{P}_5 = 1{,}6 \times 2{,}50 = 4{,}0 \text{ t}$$

$$\overline{P}_6 = 1{,}6\ (2{,}50 + 2{,}00) = 7{,}2 \text{ t}$$

$$\overline{P}_9 = 1{,}6 \times 2{,}00 = 3{,}2 \text{ t}$$

Coeficienții de influență ω și rapoartele η_{jk}/η_{jj} se iau din tabela 37. Valorile care intere seză sînt extrase în fig. 148 (cele din paranteze sînt rapoartele η_{jk}/η_{jj}, scrise în dreptul nodului j spre care se transmite).

Rigiditățile $\beta = \dfrac{1}{\omega_{jj}\, l^3}$:

(pentru a obține un ordin de mărime convenabil se înmulțesc cu 10^3)

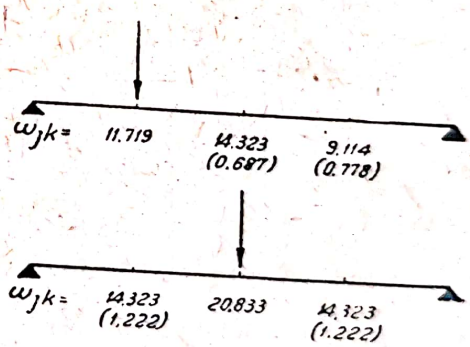


Fig. 148.

$$\beta_x^{(1)} = \beta_x^{(3)} = \beta_x^{(4)} = \beta_x^{(6)} = \beta_x^{(7)} = \beta_x^{(9)}$$

$$= \frac{10^3}{11{,}719 \times 10^3} = 0{,}0854$$

$$\beta_x^{(2)} = \beta_x^{(5)} = \beta_x^{(8)} = \frac{10^3}{20{,}833 \times 10^3} = 0{,}0480$$

$$\beta_y^{(1)} = \beta_y^{(2)} = \beta_y^{(3)} = \beta_y^{(7)} = \beta_y^{(8)} = \beta_y^{(9)} = \frac{10^3}{11{,}719 \times 8^3} = 0{,}1665$$

$$\beta_y^{(4)} = \beta_y^{(5)} = \beta_y^{(6)} = \frac{10^3}{20{,}833 \times 8^3} = 0{,}0935$$

Coeficienții de repartiție :

$$r_x^{(1)} = r_x^{(3)} = r_x^{(7)} = r_x^{(9)} = \frac{0{,}0854}{0{,}0854 + 0{,}1665} = 0{,}339$$

$$r_y^{(1)} = r_y^{(3)} = r_y^{(7)} = r_y^{(9)} = \frac{0{,}1665}{0{,}0854 + 0{,}1665} = 0{,}661$$

$$r_x^{(4)} = r_x^{(6)} = \frac{0{,}0854}{0{,}0854 + 0{,}0935} = 0{,}477\,; \quad r_y^{(4)} = r_y^{(6)} = \frac{0{,}0935}{0{,}0854 + 0{,}0935} = 0{,}523$$

$$r_x^{(2)} = r_x^{(8)} = \frac{0{,}0480}{0{,}0480 + 0{,}1665} = 0{,}224\,; \quad r_y^{(2)} = r_y^{(8)} = \frac{0{,}1665}{0{,}0480 + 0{,}1665} = 0{,}776$$

$$r_x^{(5)} = \frac{0{,}0480}{0{,}0480 + 0{,}0935} = 0{,}339\,; \quad r_y^{(5)} = \frac{0{,}0935}{0{,}0480 + 0{,}0935} = 0{,}661$$

Repartizarea forțelor exterioare

Nodul	Forța exterioară $\overline{P}$ (tone)	La grinda x		La grinda y	
		r_x	Forța repartizată	r_y	Forța repartizată
3	1,60	0,339	0,54	0,661	1,06
4	4,00	0,477	1,91	0,523	2,09
5	4,00	0,339	1,36	0,661	2,64
6	7,20	0,477	3,43	0,523	3,77
9	3,20	0,339	1,08	0,661	2,12

Coeficienții de transmitere:

— pe direcția x

$$t_{1\to 2} = t_{3\to 2} = t_{7\to 8} = t_{9\to 8} = -0{,}687 \times 0{,}776 = -0{,}533$$
$$t_{1\to 3} = t_{3\to 1} = t_{7\to 9} = t_{9\to 7} = -0{,}778 \times 0{,}661 = -0{,}514$$
$$t_{2\to 1} = t_{2\to 3} = t_{8\to 7} = t_{8\to 9} = -1{,}222 \times 0{,}661 = -0{,}808$$
$$t_{4\to 5} = t_{6\to 5} = -0{,}687 \times 0{,}661 = -0{,}454$$
$$t_{5\to 4} = t_{5\to 6} = -1{,}222 \times 0{,}523 = -0{,}640$$
$$t_{4\to 6} = t_{6\to 4} = -0{,}778 \times 0{,}523 = -0{,}407$$

— pe direcția y

$$t_{1\to 4} = t_{7\to 4} = t_{3\to 6} = t_{9\to 6} = -0{,}687 \times 0{,}477 = -0{,}327$$
$$t_{1\to 7} = t_{7\to 1} = t_{3\to 9} = t_{9\to 3} = -0{,}778 \times 0{,}339 = -0{,}263$$
$$t_{4\to 1} = t_{4\to 7} = t_{6\to 3} = t_{6\to 9} = -1{,}222 \times 0{,}339 = -0{,}415$$
$$t_{2\to 5} = t_{8\to 5} = -0{,}687 \times 0{,}339 = -0{,}239$$
$$t_{2\to 8} = t_{8\to 2} = -0{,}778 \times 0{,}224 = -0{,}174$$
$$t_{5\to 2} = t_{5\to 8} = -1{,}222 \times 0{,}224 = -0{,}274$$

Valorile coeficienților de transmitere se trec într-un tablou, pentru a putea fi găsiți cu ușurință în timpul calculului.

Scanned with OKEN Scanner

Tabela coeficienților de transmitere

Nodul de la care se transmite	Nodul spre care se transmite							
	Nodul	t	Nodul	t	Nodul	t	Nodul	t
1	2	0,533	3	0,514	4	0,327	7	0,263
2	1	0,808	3	0,808	5	0,239	8	0,174
3	1	0,514	2	0,533	6	0,327	9	0,263
4	1	0,415	5	0,454	6	0,407	7	0,415
5	2	0,274	4	0,640	6	0,640	8	0,274
6	3	0,415	4	0,407	5	0,454	9	0,415
7	1	0,263	4	0,327	8	0,533	9	0,514
8	2	0,174	5	0,239	7	0,808	9	0,808
9	3	0,263	6	0,327	7	0,514	8	0,533

Schema de transmiteri este arătată în fig. 149.

Se înscriu pe schemă în dreptul fiecărui nod forțele exterioare repartizate. Apoi se începe corectarea nodurilor, în ordinea de la nodul cu cea mai mare forță exterioară totală (*6*).

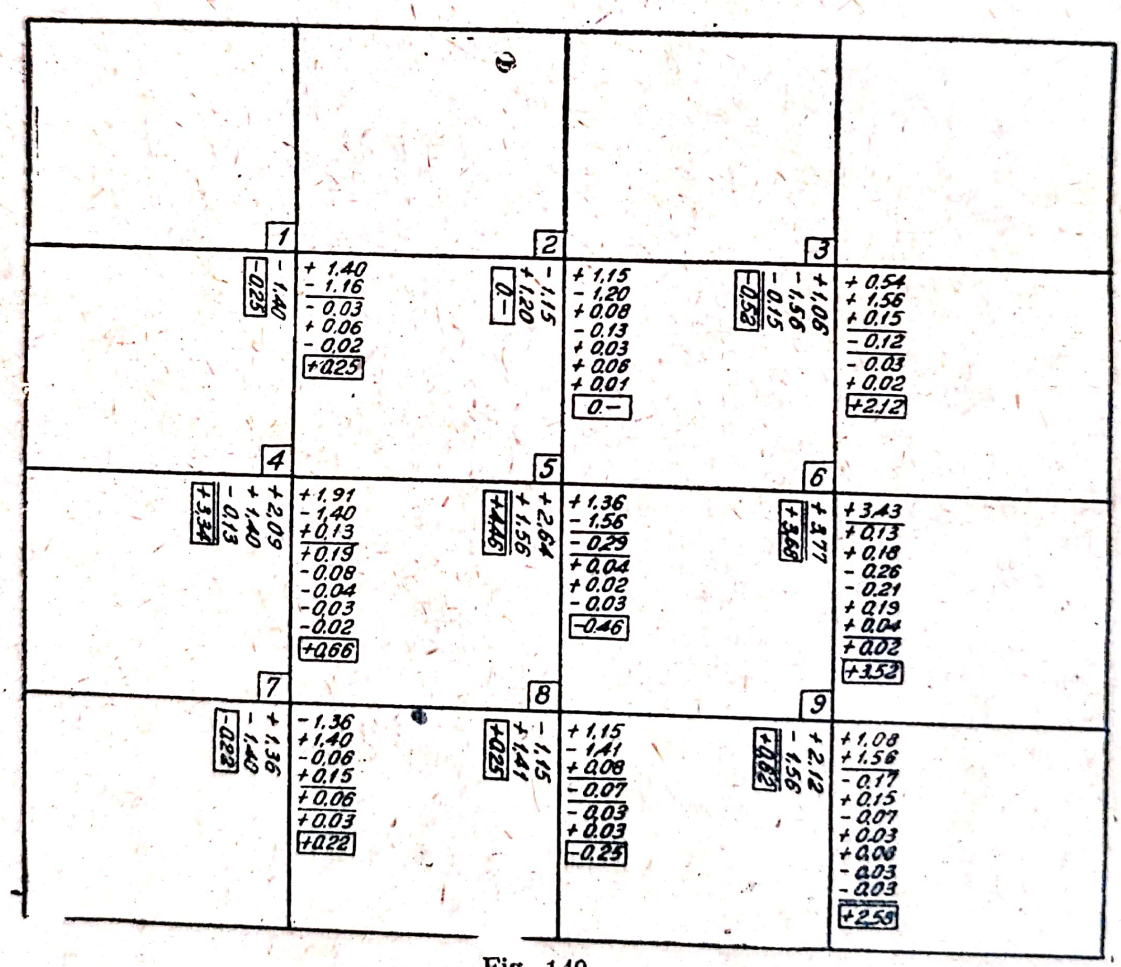


Fig. 149.

Forțele repartizate în *6* sînt : + 3,43 t la grinda x și + 3,77 t la grinda y. Se transmite pe grinda y la nodurile *3* și *9* — 3,77 × 0,415 = — 1,56. Se înscriu la nodurile *3* și *9* cantitățile transmise : — 1,56 pe grinda y și + 1,56 pe grinzile x. Se transmite apoi de la *6* pe grinda x la nodul *5* : —3,43 × 0,454 = — 1,56 și la nodul *4* : — 3,43 × 0,407 = — 1,40. Se înscriu la nodurile *5* și *4* cantitățile transmise, cu semnul — pe grinda x și cu semn schimbat pe grinda y. După corectarea nodului *6* se trage linie sub cantitățile corectate, urmînd ca la corectarea următoare a aceluiași nod să se considere numai cantitățile ce se vor acumula sub liniile trase.

Trecem la nodul *5*, unde forțele repartizate sînt + 1,36 t și + 2,64 t. Ținem seama și de perechea de forțe ± 1,56 t provenită din transmiterea de la nodul *6*. Forțele totale de transmis sînt : + 1,36 − 1,56 = − 0,20 t ; pe grinda x + 2,64 + 1,56 = + 4,20 t. pe grinda y Se transmite pe grinda y la nodurile *2* și *8* : − 4,20 × 0,274 = − 1,15 t (se înscrie cu − pe grinda y și cu + pe grinda x), iar pe grinda x la nodurile *4* și *6* : + 0,20 × 0,640 = + 0,13 (se înscrie cu + pe grinda x și cu − pe grinda y).

Așa cum s-a arătat mai înainte, după prima treaptă de calcul se poate renunța la coloana P_y, lucrînd la fiecare nod numai cu cantitățile din coloana P_x, deoarece totdeauna $P_y = - P_x$. În consecință, la nodul *6*, unde s-a făcut anterior o corecție, deci prima treaptă de calcul este terminată, nu mai înscriem cantitatea + 0,13, transmisă de la nodul *5*, decît în coloana P_x.

Urmează corectarea nodului *9*, unde forțele repartizate sînt + 1,08 și + 2,12 t și în plus avem perechea de forțe ± 1,56 t, provenită din transmiterea de la nodul *6*. Forțele totale de transmis sînt : + 1,08 + 1,56 = + 2,64 t ; pe grinda x + 2,12 − 1,56 = + 0,56 t pe grinda y. Se transmite pe grinda x la nodul *8* : − 2,64 × 0,533 = − 1,41 t (se înscrie cu − pe grinda x și cu semn schimbat pe grinda y) și la nodul *7* : − 2,64 × 0,514 = − 1,36 t (aceleași semne), iar pe grinda y la nodul *3* : − 0,56 × 0,263 = − 0,15 t (se înscrie cu − pe grinda y și cu semn schimbat pe grinda x) și la nodul *6* : − 0,56 × 0,327 = − 0,18 (care nu se mai înscrie pe grinda y u − c , ci numai cu + pe grinda x, deoarece la nodul *6* nu se mai consideră coloana P_y).

Urmează corectarea nodului *4*. Forțele acumulate la nod : + 1,91 t (din repartizarea inițială) − 1,40 + 0,13 (din transmiterile de la *6* și *5*) = + 0,64 t pe grinda x ; + 2,09 + + 1,40 − 0,13 = + 3,36 tpe grinda y. Se transmite pe grinda y la nodurile *1* și *7* ; − 3,36 × 0,415 = = − 1,40 t (se înscrie cu − pe grinda y și cu + pe grinzile x), iar pe grinda x la nodul *5* : − 0,64 × × 0,454 = − 0,29 t și la nodul *6* : − 0,64 × 0,407 = − 0,26 t. Atît la *5* cît și la *6* nu se mai înscriu forțele transmise de la *4* decît pe grinda x.

Trecem la ultimul nod cu forță exterioară : nodul *3*. Forțele acumulate : + 0,54 + 1,56 + 0,15 = + 2,25 t pe grinda x ; + 1,06 − 1,56 − 0,15 = − 0,65 t pe grinda y. Se transmite pe grinda x la nodul *1* : − 2,25 × 0,514 = − 1,16 t și la nodul *2* : − 2,25 × 0,533 = − 1,20 t, care se înscriu cu − pe grinda x și cu + pe grinzile y. Pe grinda y se transmite la nodul *6* : + 0,65 × 0,327 = + 0,21 t și la nodul *9* : + 0,65 × 0,263 = + 0,17 t, care nu se mai înscriu pe grinda y ci numai cu semn schimbat pe grinda x.

Cu aceasta s-a terminat transmiterea forțelor exterioare. Se observă că după corectarea nodului *3* au mai rămas la noduri cantități de corectat destul de mici (cea mai mare forță acumulată este − 0,29 t, la nodul *5*), deci din prima treaptă de calcul erorile au scăzut la circa 5 − 10 % din valorile inițiale ale necunoscutelor.

De aci înainte nu mai apar în iterație forțele exterioare, deci putem continua calculul operînd la toate nodurile numai pe coloanele P_x.

Corectăm nodul *5*, unde s-a acumulat − 0,29 t. Se transmite cu semnul schimbat la nodurile *2*, *4*, *6*, *8* : la *2* și *8* : + 0,29 × 0,274 = + 0,08 ; la *4* și *6* : + 0,29 × 0,640 = + 0,19 t.

Corectăm nodul *1*. Forța acumulată + 1,40 − 1,16 = + 0,24 t.

Se transmite :

− la *2* : − 0,24 × 0,533 = − 0,13 t

− la *3* : − 0,24 × 0,514 = − 0,12 t

− la *4* : − 0,24 × 0,327 = − 0,08 t

− la *7* : − 0,24 × 0,263 = − 0,06 t

În continuare, nodurile se corectează în ordinea :

8 . . . . Forța acumulată + 1,15 − 1,41 + 0,08 = − 0,18 t

7 . . . . Forța acumulată − 1,36 + 1,40 − 0,06 + 0,15 = + 0,13 t

3 . . . . Forța acumulată − 0,12 t

8 . . . . Forța acumulată − 0,07 t

6 . . . . Forța acumulată + 0,13 + 0,18 − 0,26 − 0,21 + 0,19 + 0,04 = + 0,07 t

7 . . . . Forța acumulată + 0,06 t

9 . . . . Forța acumulată − 0,17 + 0,15 − 0,07 + 0,03 + 0,06 − 0,03 − 0,03 = − 0,06 t

După corectarea nodului *9* nu mai există la nici un nod cantități de corectat mai mari decît 0,03 t, respectiv cca 1 % din valorile inițiale ale necunoscutelor, astfel că putem opri iterația.

Scanned with OKEN Scanner

În total, pentru a ajunge la aproximația de 1 %, au fost necesare 14 corectări de noduri. Numărul de noduri fiind 9, rezultă în medie 1—2 corectări la fiecare nod. Efectiv, după cum se vede din schema fig. 149, nici un nod nu a fost corectat mai mult decît de 2 ori, iar de exemplu nodul 2 nu a fost corectat niciodată. Deci rapiditatea convergenței poate fi considerată satisfăcătoare.

La terminarea calculului se însumează coloanele P_x. Valorile P_y se obțin din $\overline{P} - P_x$.

Valorile finale ale forțelor care acționează asupra grinzilor x și y sînt arătate în fig. 150. Pentru verificarea calculului, se recomandă să se introducă aceste valori în relațiile (6.24) și să

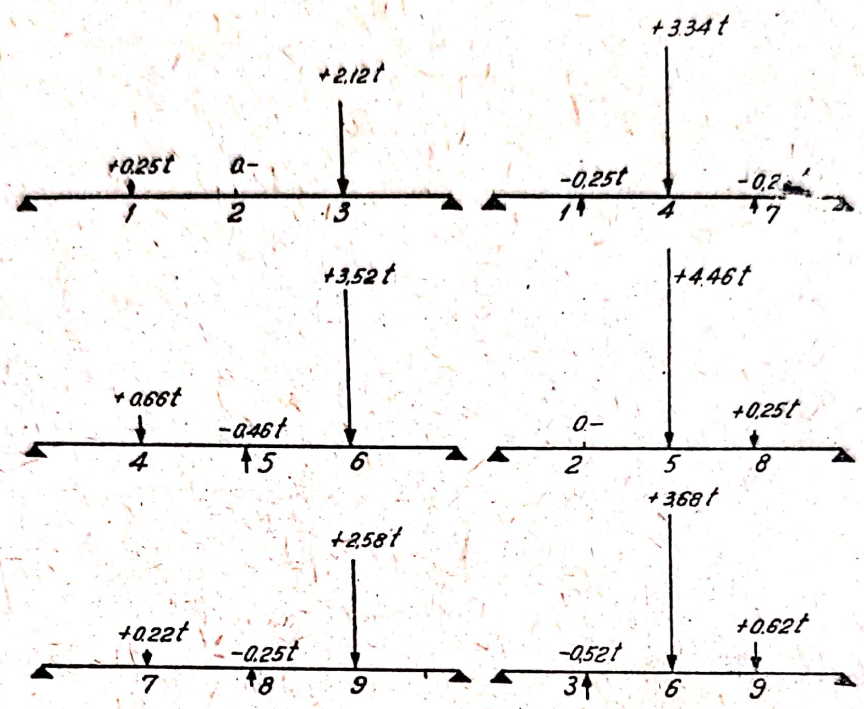


Fig. 150

se controleze egalitatea săgeților grinzilor x și y, cel puțin în cîteva noduri. De preferință, se vor verifica săgețile în nodurile cu sarcini concentrate mai puternice și nodurile dinspre centrul rețelei, unde săgețile sînt mai mari.

- *Verificarea egalității săgeților la noduri:*

Nodul *1*

$$EI\,\Delta_x^{(1)} = (0{,}25 \times 11{,}719 + 2{,}12 \times 9{,}114)\,10^3 = 22230$$

$$EI\,\Delta_y^{(1)} = (-0{,}25 \times 11{,}719 + 3{,}34 \times 14{,}323 - 0{,}22 \times 9{,}114)8^3 = 22000$$

(eroare 1 %) $\qquad 230$

Nodul *2*

$$EI\,\Delta_x^{(2)} = (0{,}25 + 2{,}12)\,14{,}323 \times 10^3 = 34000$$

$$EI\,\Delta_y^{(2)} = (4{,}46 \times 14{,}323 + 0{,}25 \times 9{,}114)8^3 = 33900$$

(eroare 0,3 %) $\qquad 100$

Nodul *3*

$$EI\,\Delta_x^{(3)} = (2{,}12 \times 11{,}719 + 0{,}25 \times 9{,}114)\,10^3 = 27130$$

$$EI\,\Delta_y^{(3)} = (-0{,}52 \times 11{,}719 + 3{,}68 \times 14{,}323 + 0{,}62 \times 9{,}114)8^3 = 26800$$

(eroare 1,2 %) $\qquad 330$

Scanned with OKEN Scanner

Nodul *4*

$$EI\,\Delta_x^{(4)} = (0{,}66 \times 11{,}719 - 0{,}46 \times 14{,}323 + 3{,}52 \times 9{,}114)10^3 = 33240$$

$$EI\,\Delta_y^{(4)} = [3{,}34 \times 20{,}833 - (0{,}25 + 0{,}22) \times 14{,}323]8^3 = 32180$$

(eroare 3,3 %) 1060

Nodul *5*

$$EI\,\Delta_x^{(5)} = [-0{,}46 \times 20{,}833 + (3{,}52 + 0{,}66)\,14{,}323]10^3 = 50400$$

$$EI\,\Delta_y^{(5)} = (4{,}46 \times 20{,}833 + 0{,}25 \times 14{,}323)\,8^3 = 49500$$

(eroare 1,8 %) 900

Nodul *6*

$$EI\,\Delta_x^{(6)} = (0{,}66 \times 9{,}114 - 0{,}46 \times 14{,}323 + 3{,}52 \times 11{,}719)10^3 = 40620$$

$$EI\,\Delta_y^{(6)} = [3{,}68 \times 20{,}833 + (0{,}62 - 0{,}52)14{,}323]\,8^3 = 40000$$

(eroare 1,5 %) 620

Nodul *7*

$$EI\,\Delta_x^{(7)} = (0{,}22 \times 11{,}719 - 0{,}25 \times 14{,}323 + 2{,}58 \times 9{,}114)10^3 = 22400$$

$$EI\,\Delta_y^{(7)} = (-0{,}22 \times 11{,}719 + 3{,}34 \times 14{,}323 - 0{,}25 \times 9{,}114)8^3 = 22000$$

(eroare 1,8 %) 400

Nodul *8*

$$EI\,\Delta_x^{(8)} = [(0{,}22 + 2{,}58)\,14{,}323 - 0{,}25 \times 20{,}833]10^3 = 34800$$

$$EI\,\Delta_y^{(8)} = (0{,}25 \times 11{,}719 + 4{,}46 \times 14{,}323)8^3 = 34300$$

(eroare 1,4 %) 500

Nodul *9*

$$EI\,\Delta_x^{(9)} = (2{,}58 \times 11{,}719 - 0{,}25 \times 14{,}323 + 0{,}22 \times 9{,}114)10^3 = 28620$$

$$EI\,\Delta_y^{(9)} = (0{,}62 \times 11{,}719 + 3{,}68 \times 14{,}323 - 0{,}52 \times 9{,}114)8^3 = 28300$$

(eroare 1,1 %) 320

d) *Semnificația fizică a iterației*

Din modul cum s-au dedus expresiile (6.25) ale valorilor inițiale ale necunoscutelor, considerînd două grinzi dintr-o rețea, legate prin condiția de egalitate a săgeților într-un nod și toate legăturile din celelalte noduri cu restul rețelei desfăcute, se observă că metoda de atacare a problemei folosită este cea a „eforturilor", în care sistemul de bază de la care se pornește este sistemul cu toate legăturile la noduri desfăcute. Operațiunile din rezolvarea prin iterație reprezintă restabilirea treptată a continuității la noduri.

Deci, inițial rețeaua se prezintă formată dintr-o serie de grinzi independente, nelegate la noduri (în reprezentarea din fig. 142, toți pendulii de lungime invariabilă care mențin constantă distanța între grinzile încrucișate, sînt tăiați).

Corectăm pe schemă un nod k, introducînd odată cu aceasta și sarcina exterioară $\overline{P}_k$ din nod. Corectarea nodului k, respectiv în sistemul de

ecuații (6.27) rezolvarea ecuației corespunzătoare nodului, reprezintă considerarea condiției de continuitate în nod, deci restabilirea legăturii în k între cele două grinzi. În acest timp în restul rețelei legăturile rămîn desfăcute. Conform fig. 145, grinzile x și y se încarcă cu forțele repartizate :

$$P_x^{(k)\,(1)} = \overline{P}_k\, r_x^{(k)}; \quad P_y^{(k)\,(1)} = \overline{P}_k r_y^{(k)}$$

care constituie valorile inițiale ale necunoscutelor $P_x^{(k)}$ și $P_y^{(k)}$.

Trecem la corectarea unui alt nod j de pe grinda x și presupunem că în j nu există aplicată nici o forță exterioară (fig. 151).

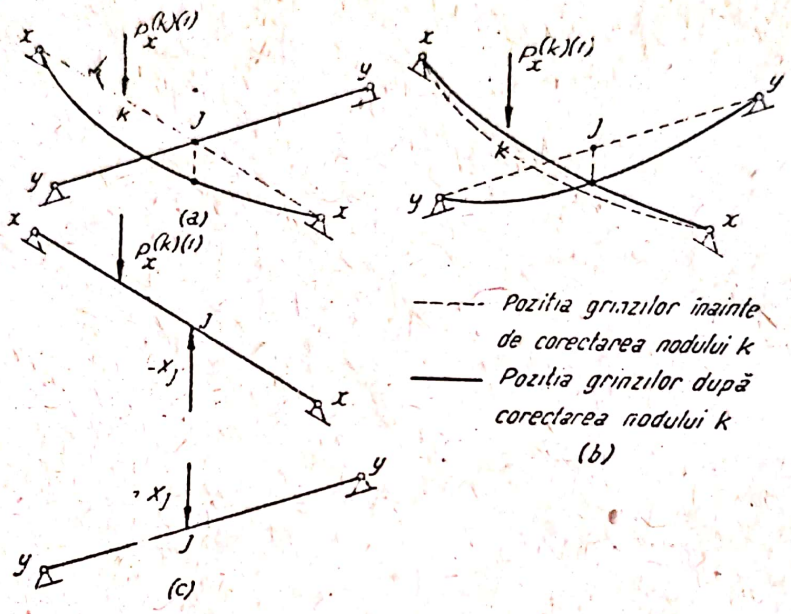


Fig. 151.

Înainte de corectarea nodului j, poziția grinzilor x și y este cea din fig. 151, *a*. Legătura în j este desfăcută, iar grinda x se prezintă încărcată cu forța $P_x^{(k)\,(1)}$ provenită din repartiția inițială în nodul k. Pentru a restabili legătura în j este necesar ca în pendulul din j să apară o forță X_j, tinzînd să tragă în jos grinda y și în sus grinda x, astfel ca săgețile lor în j să devină egale (fig. 151, *b*, *c*). Valoarea perechii de forțe X_j acționînd asupra grinzilor x și y se obține scriind condiția egalității de săgeți :

$$\Delta_x^{(j)} = P_x^{(k)\,(1)}\, \eta_{jk}^{(x)} - X_j\, \eta_{jj}^{(x)}$$

$$\Delta_y^{(j)} = + X_j\, \eta_{jj}^{(y)}$$

$$P_x^{(k)\,(1)}\, \eta_{jk}^{(x)} - X_j\, \eta_{jj}^{(x)} = + X_j\, \eta_{jj}^{(y)}$$

$$X_j = P_x^{(k)(1)}\, \frac{\eta_{jk}^{(x)}}{\eta_{jj}^{(x)} + \eta_{jj}^{(y)}} = P_x^{(k)(1)}\, \frac{\eta_{jk}^{(x)}}{\eta_{jj}^{(x)}} \cdot \frac{\eta_{jj}^{(x)}}{\eta_{jj}^{(x)} + \eta_{jj}^{(y)}} = - P^{(k)(1)}\, t_{k\to j}$$

Asupra grinzii x acționează :

$$- X_j = P^{(k)(1)}\, t_{k\to j}$$

Pentru $P^{(k)\,(1)} = 1$, $- X_j = t_{k\to j}$. *Se poate deci defini coeficientul de transmitere pe o grindă x de la nodul k la nodul j ca forța cu care se încarcă*

în j grinda x prin restabilirea legăturii din j între grinzile x și y, păstrînd în celelalte noduri legăturile desfăcute, cînd într-un alt nod k al grinzii x acționează o forță de valoare egală cu unitatea.

Analog, dacă pe grinda *y* acționează într-un nod *i* o forță de valoare egală cu unitatea, restabilind legătura între grinzi în *j*, grinda *x* se încarcă cu forța :

$$+ X_j = t_{i \to j}$$

unde $t_{i \to j}$ are expresia (6.30).

Transmiterea se face totdeauna de la noduri cu continuitatea dezlegată la noduri la care se restabilește continuitatea. Această caracteristică a rezolvării prin iterație în cazul folosirii metodei eforturilor s-a mai întîlnit și în cap. V, la rezolvarea grinzilor continue pe baza aceleiași metode generale.

Prin transmiterea spre un nod, apare totdeauna în nod o pereche de forțe egale și de semn contrar, reprezentînd acțiunea reciprocă a grinzilor (acțiunea pendulului de legătură asupra celor două grinzi). Aceste forțe de legătură care apar treptat în calcul formează corecțiile succesive ale valorilor necunoscutelor. La sfîrșitul iterației :

$$P_x^{(j)} = P_x^{(j)\,(1)} + \sum_{m=1}^{z} X_j^{(m)}$$

unde : $X^{(m)}$ este forța de legătură care apare în treapta de calcul m;
z — numărul total de trepte de calcul.

Înlocuind X_j cu valoarea lui :

$$P_x^{(j)} = P_x^{(j)\,(1)} + P_x^{(k)}\, t_{k \to j} + P_y^{(i)}\, t_{i \to j}$$

Rezolvarea prin iterație după metoda clasică presupune considerarea în stadiul inițial în fiecare ecuație a tuturor necunoscutelor, cu excepția necunoscutei principale, egale cu zero. În metoda prezentată mai sus, necunoscutele sînt $P_x^{(j)}$, $P_y^{(j)}$. Considerarea lor ca egale cu zero la începutul iterației implică pe de o parte folosirea metodei „eforturilor", iar pe de altă parte, introducerea forțelor exterioare $\bar{P}$ numai pe măsura corectării nodurilor. Astfel, valorile inițiale ale necunoscutelor rezultă cele conform relațiilor (6.25). Aceasta nu este singura cale de atacare a problemei. Dacă de exemplu am considera ca necunoscute numai forțele repartizate grinzilor x, eliminînd de la început din sistemul de ecuații forțele $P_y^{(j)}$ prin înlocuirea lor cu $\bar{P}_j - P_x^{(j)}$, atunci se ajunge la metoda următoare : În stadiul inițial avem în toate nodurile $P_x^{(j)} = 0$, deci $\bar{P}_j = P_y^{(j)}$, adică se pornește cu sarcinile exterioare acționînd în întregime pe grinzile y.

Ecuația (6.27) devine, punînd $P_y^{(i)} = \bar{P}_i - P_x^{(i)}$:

$$P_x^{(j)}\, \eta_{jj}^{(x)} + \Sigma\, P_x^{(k)}\, \eta_{jk}^{(x)} = \left[\bar{P}_j - P_x^{(j)}\right] \eta_{jj}^{(y)} + \Sigma \left[\bar{P}_i - P_y^{(i)}\right] \eta_{ji}^{(y)} \tag{6.31}$$

$$P_x^{(j)} = \frac{\bar{P}_j\, \eta_{jj}^{(y)} + \bar{P}_i\, \eta_{ji}^{(y)}}{\eta_{jj}^{(x)} + \eta_{jj}^{(y)}} - \Sigma\, P_x^{(k)}\, \frac{\eta_{jk}^{(x)}}{\eta_{jj}^{(x)} + \eta_{jj}^{(y)}} \tag{6.32}$$

Valoarea inițială a necunoscutei $P_x^{(j)}$:

$$P_x^{(j)\,(1)} = \frac{\bar{P}_j\, \eta_{jj}^{(y)} + \Sigma\, \bar{P}_i\, \eta_{ji}^{(y)}}{\eta_{jj}^{(x)} + \eta_{jj}^{(y)}} = \bar{P}_j\, r_x^{(j)} + \Sigma\, \bar{P}_i\, t_{i \to j} \tag{6.33}$$

Coeficientul de transmitere rămîne același ca și în metoda expusă mai înainte, deoarece în ecuația nodului j, coeficientul necunoscutei $P_x^{(k)}$ nu se modifică.

Aplicarea acestei metode nu conduce însă la rezultate, convergența fiind foarte înceată. Teoretic, metoda apare interesantă numai prin faptul că expresiile la care se ajunge pun mai bine în evidență analogia cu cele corespunzătoare din celelalte aplicații ale metodei generale a eforturilor, tratate în capitolele anterioare. Astfel:

— ecuația (6.31) corespunde la (1.8), respectiv, în cazul grinzilor continue (cap. V) la (5.1);

— (6.32) corespunde la (2.20);

— (6.33) corespunde la (2.21), respectiv la (5.3);

— expresia coeficientului de transmitere:

$$t_{k\to j} = -\frac{\eta_{jk}^{(x)}}{\eta_{jj}^{(x)}} \cdot \frac{\beta_{jk}^{(y)}}{\beta_{jk}^{(x)} + \beta_{jk}^{(y)}} = -\frac{\eta_{jk}^{(x)}}{\sum \eta_{jj}} \qquad (6.29)$$

corespunde la (2.22), respectiv la (5.2).

c) *Convergența*

Convergența seriei termenilor iterației nu poate fi verificată teoretic atît de ușor ca la sistemele tratate prin metoda deplasărilor. Rapoartele η_{jk}/η_{jj} care intră în expresia coeficienților de transmitere sînt deseori supraunitare, în special de la nodurile interioare spre cele marginale, așa cum se poate vedea și din tabelele 37—40, astfel încît criteriul lui *Wittmeyer* nu este totdeauna îndeplinit în ecuațiile nodurilor marginale. În schimb, cu cît coeficientul de transmitere de la j la k este mai mare, cu atît cel reciproc de la k la j este mai mic, iar produsul rapoartelor η_{jk}/η_{jj}, η_{kj}/η_{kk} se menține totdeauna subunitar, ceea ce constituie o indicație asupra unei rapidități acceptabile a convergenței iterației.

III. Domeniul de aplicație

Aplicarea metodei aproximațiilor succesive în calculul rețelelor de grinzi devine practic avantajoasă, față de rezolvarea directă a ecuațiilor, cînd numărul de ecuații (noduri) trece de 3—4, păstrîndu-și avantajele la sisteme cu pînă la 15—20 noduri. Peste acest număr devine laborioasă, iar unele inconveniente ale metodei, specifice cazului rețelelor de grinzi, devin prohibitive. Astfel, faptul că în ecuația unui nod intră necunoscutele din toate nodurile parcurse de cele două grinzi care se încrucișează în nodul considerat și că din această cauză apar necesare transmiteri spre toate aceste noduri, face ca la grinzi cu multe panouri să se aglomereze în fiecare treaptă

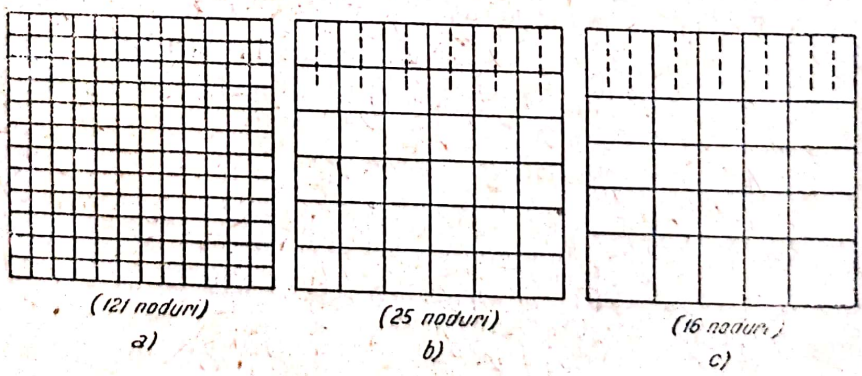


Fig. 152

de calcul un număr mare de forțe transmise la noduri și schema devine incomodă. De asemenea, cu cît numărul de panouri pe o grindă crește, scade și rapiditatea convergenței iterației, iar transmiterile de la nodurile centrale spre cele apropiate de reazeme se fac cu coeficienți foarte mari. De aceea la rețele cu multe noduri, ca în fig. 152, *a*, este recomandabil să se considere

în calcul sisteme simplificate, luînd grinzile din două în două (fig. 152, *b*) și distribuind apoi la cîte 2 grinzi sarcinile rezultate din calcul sau suprimînd grinzile apropiate de contur, care se încarcă cu fracțiuni mici din sarcinile exterioare (fig. 152, *c*).

La sistemele simetrice, cu încărcări simetrice, se poate face calculul numai pentru jumătatea sau sfertul de rețea limitat de axele de simetrie, considerîndu-se că se corectează totdeauna simultan cîte două noduri simetrice. În acest caz, coeficienții de influență și coeficienții de transmitere trebuie determinați pentru perechi de forțe aplicate în noduri simetrice. Vom avea (fig. 153):

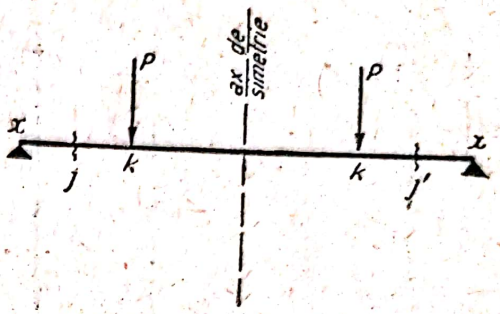


Fig. 153.

η_{jk} (coeficient de influență în sistemul simetric) $= \eta_{jk} + \eta_{jk'}$.

(η_{jk}, $\eta_{jk'}$ = coeficienți de influență obișnuiți conform tab. 37—40).

$t_{k\to j}$ (coeficientul de transmitere de la k la j în sistemul simetric) $= -\frac{\eta'_{jk}}{\eta'_{jj}} r_y^{(j)}$

unde $\eta'_{jj} = \eta_{jj} + \eta_{jj'}$;

$$t_{k\to j} = -\frac{\eta'_{jk}}{\eta'_{jj}} r_y^{(j)} = -\frac{\eta_{jk} + \eta_{jk'}}{\eta_{jj} + \eta_{jj'}} r_y^{(j)}$$

Coeficienții de repartiție se determină cu formulele obișnuite, introducînd însă rigiditățile:

$$B'^{(j)} = \frac{1}{\eta'_{jj}} \text{ în loc de } B^{(j)} = \frac{1}{\eta_{jj}}$$

Metoda de rezolvare prin aproximații succesive expusă mai sus poate fi aplicată în orice problemă în care apare un sistem format din bare cu legături de tipul I, avînd ca necunoscute translațiile nodurilor, cu caracteristicile unei rețele de grinzi. Astfel, o grindă continuă cu reazeme tasabile, la care se admite că tasările reazemelor sînt proporționale cu reacțiunile, poate fi considerată că reazemă articulat pe o serie de grinzi transversale (fig. 154) cu care alcătuiește o rețea. Rigiditățile acestor grinzi vor fi definite prin reacțiunile ce trebuie să apară în reazemele pe care le înlocuiesc, pentru ca acestea să capete tasări unitare. Rețeaua poate fi calculată prin metoda transmiterii forțelor. Forțele exterioare cu care se intră în calcul sînt reacțiunile pe reazeme ale grinzii continue considerată cu noduri fixe, iar din calcul rezultă valorile finale ale acestor reacțiuni ținînd seama și de tasarea reazemelor. De asemenea metoda poate fi folosită pentru calculul aproximativ al plăcilor, în care acestea se împart în fîșii de lățimi finite, iar rețeaua de fîșii se tratează ca o rețea de grinzi. Un caz des întîlnit în practică este cel al pereților de rezervoare cilindrice încastrați în radier. Pentru pereți cu grosime constantă sau uni-

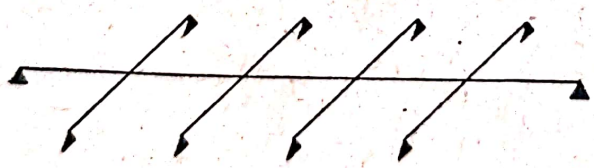


Fig. 154

form variabilă, încastrați la bază și liberi la partea de sus, rezolvarea directă analitică este destul de simplă, iar rezultatele pot fi tabulate. În alte cazuri însă, ca de exemplu alte ipoteze de rezemare la extremitatea superioară, sau pereți cu grosimi variabile neuniform, calculul analitic se complică și capătă interes o rezolvare prin aproximații succesive, considerînd o rețea de inele orizontale și de grinzi verticale. În virtutea simetriei, problema poate fi redusă la o singură grindă verticală care se întretaie cu o serie de inele orizontale, deci schema de calcul devine foarte simplă (fig. 155).

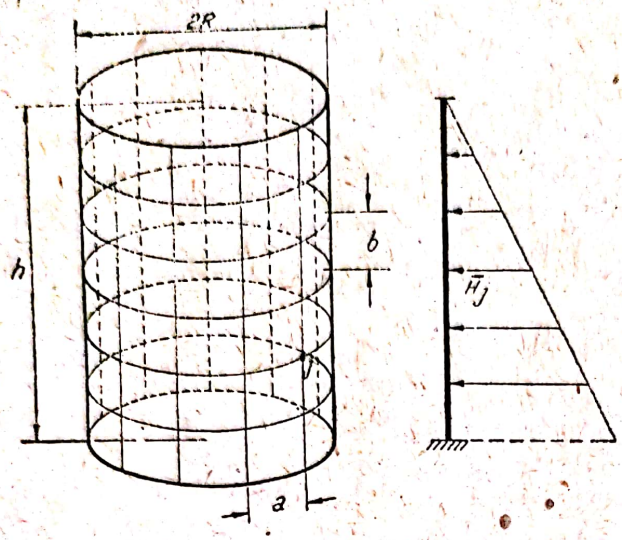


Fig. 155

Notînd cu :

a — lățimea unei fișii verticale ;

b — înălțimea unei fișii inelare orizontale ;

forța concentrată care se aplică într-un nod j va fi :

$$\bar{H}_j = p_j\, ab$$

unde : p_j este presiunea unitară a apei în dreptul nodului j ;

Notăm :

$H_0^{(j)}$ — fracțiunea din $\bar{H}_j$ care se repartizează inelului j ;

$p_0^{(j)}$ — fracțiunea din p_j care se repartizează inelului j ;

$$H_0^{(j)} = p_0^{(j)}\, ab$$

T_j — forța de întindere în inelul j (fig. 156) :

$$T_j = p_0^{(j)}\, bR = \frac{H_0^{(j)}}{a} R$$

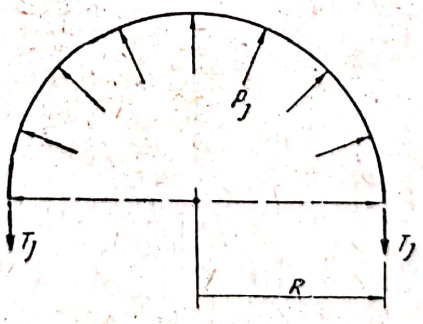


Fig. 156.

Alungirea perimetrului inelului, sub acțiunea forței T_j :

$$\Delta l = \frac{T}{E e_j\, b}$$

(e_j este grosimea peretelui în dreptul nodului considerat).

Variația razei (săgeata radială) :

$$\Delta R = \frac{T_j R}{E e_j b} = \frac{H_0^{(j)} R^2}{E e_j ab}$$

Deci coeficientul de influență :

$$\eta_{jj} = \frac{R^2}{E e_j ab}$$

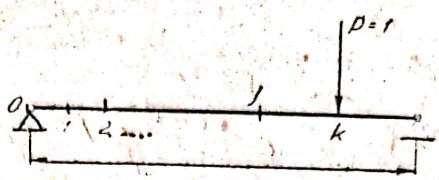
iar rigiditatea inelului la întindere :

$$B_0^{(j)} = \frac{1}{\eta_{jj}} = \frac{e_j ab}{R^2} E \qquad (6.34)$$

Introducînd pentru inele rigiditățile conform formulei (6.34), calculul se conduce la fel ca la orice rețea de grinzi plană.

Avînd în vedere că în general rigiditatea inelelor este mai mare decît cea a fîșiilor verticale, este recomandabil pentru mărirea rapidității convergenței iterației să se lucreze pe schemă cu coloana forțelor repartizate inelelor, deoarece atunci în expresiile coeficienților de transmitere intră coeficienții de repartiție ai fîșiilor verticale, care sînt mai mici.

Scanned with OKEN Scanner



Nr. de panouri	Forţa în secţiunea k	Valorile 1000 ω_{jk} în secţiunea								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	20,833								
3	1	16,459	14,404							
	2	14,404	16,459							
4	1	11,719	14,323	9,114						
	2	14,323	20,833	14,323						
	3	9,114	14,323	11,719						
5	1	8,533	12,000	10,667	6,134					
	2	12,000	19,200	18,133	10,667					
	3	10,667	18,133	19,200	12,000					
	4	6,134	10,667	12,000	8,533					
6	1	6,430	9,774	10,031	7,973	4,372				
	3	9,774	16,459	17,747	14,404	7,973				
	3	10,031	17,747	20,833	17,747	10,031				
	4	7,973	14,404	17,747	16,459	9,774				
	5	4,372	7,973	10,031	9,774	6,430				
7	1	4,998	7,983	8,885	8,122	6,108	3,262			
	2	7,983	13,833	16,104	14,994	11,384	6,108			
	3	8,885	16,104	19,992	19,367	14,994	8,122			
	4	8,122	14,994	19,367	19,992	16,104	8,885			
	5	6,108	11,384	14,994	16,104	13,883	7,983			
	6	3,262	6,108	8,122	8,885	7,983	4,998			

Scanned with OKEN Scanner

SIMPLU REZEMATE
coeficienți de transmitere

Tabela 37

$$\eta_{jk} = w_{jk}\,\frac{l^3}{EI} \qquad \frac{\eta_{jk}}{\eta_{jj}} = \frac{w_{jk}}{w_{jj}}$$

Nr. de panouri	Forța în secțiunea k	Raportul $\frac{\omega_{jk}}{\omega_{jj}}$ pentru calculul coef. de transmitere spre j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	1,000								
3	1	1,000	0,875							
	2	0,875	1,000							
4	1	1,000	0,687	0,778						
	2	1,222	1,000	1,222						
	3	0,778	0,687	1,000						
5	1	1,000	0,625	0,555	0,719					
	2	1,406	1,000	0,944	1,250					
	3	1,250	0,944	1,000	1,406					
	4	0,719	0,555	0,625	1,000					
6	1	1,000	0,594	0,481	0,484	0,680				
	2	1,520	1,000	0,851	0,875	1,240				
	3	1,560	1,078	1,000	1,078	1,560				
	4	1,240	0,875	0,851	1,000	1,520				
	5	0,680	0,484	0,481	0,594	1,000				
7	1	1,000	0,575	0,444	0,406	0,440	0,653			
	2	1,597	1,000	0,805	0,750	0,820	1,222			
	3	1,778	1,160	1,000	0,969	1,080	1,625			
	4	1,625	1,080	0,969	1,000	1,160	1,778			
	5	1,222	0,820	0,750	0,805	1,000	1,597			
	6	0,653	0,440	0,406	0,444	0,575	1,000			

Scanned with OKEN Scanner

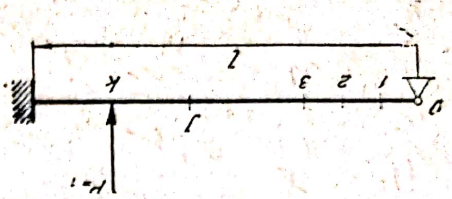
Nr. de panouri	Forța în secțiunea k	Valorile 1000 ω_{ik} în secțiunea i								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	1	3,988	6,592	7,731	6,836	6,592	4,801	2,523		
	2	6,592	11,719	4,242	4,323	12,451	9,114	4,801		
	3	7,731	14,242	18,310	19,043	16,846	2,451	6,592		
	4	6,386	14,323	19,043	20,833	19,043	14,323	6,836		
	5	6,592	12,451	16,846	19,043	18,310	14,242	7,731		
	6	4,801	9,114	12,451	14,323	14,242	11,719	6,592		
	7	2,523	4,801	6,592	6,386	7,731	6,592	3,988		
9	1	3,254	5,517	6,711	6,991	6,508	5,415	3,864	2,008	
	2	5,517	9,960	12,480	13,212	12,400	10,368	7,415	3,864	
	3	6,711	12,480	16,459	17,908	17,069	14,404	10,368	5,415	
	4	6,991	13,212	17,908	20,320	19,914	17,069	12,400	6,508	
	5	6,508	12,400	17,069	19,914	20,320	17,908	13,212	6,991	
	6	5,415	10,368	14,404	17,069	17,908	16,459	12,480	6,711	
	7	3,864	7,415	10,368	12,400	13,212	12,480	9,960	5,517	
	8	2,008	3,864	5,415	6,508	6,991	6,711	5,517	3,254	
10	1	2,700	4,667	5,833	6,300	6,167	5,534	4,500	3,167	1,634
	2	4,667	8,533	10,967	12,000	12,260	10,667	8,700	6,134	3,167
	3	5,833	10,967	14,700	16,501	16,501	15,001	12,297	8,700	4,500
	4	6,300	12,000	16,501	19,200	19,666	18,134	15,001	10,667	5,534
	5	6,167	12,260	16,501	19,666	20,833	19,666	16,501	12,260	6,167
	6	5,534	10,667	15,001	18,134	19,666	19,200	16,501	12,000	6,300
	7	4,500	8,700	12,297	15,001	16,501	16,501	14,700	10,967	5,833
	8	3,167	6,134	8,700	10,667	12,260	12,000	10,967	8,533	4,667
	9	1,634	3,167	4,500	5,534	6,167	6,300	5,833	4,667	2,700

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 37 (continuarie)

Nr. de panouri	Forța în secțiunea k	Raportul $\frac{\omega_{jk}}{\omega_{jj}}$ pentru calculul coef. de transmitere spre j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	1	1,000	0,563	0,448	0,328	0,382	0,410	0,633		
	2	1,653	1,000	0,824	0,687	0,721	0,778	1,204		
	3	1,939	1,215	1,000	0,914	0,975	1,062	1,653		
	4	1,714	1,222	1,102	1,000	1,102	1,222	1,714		
	5	1,653	1,062	0,975	0,914	1,000	1,215	1,939		
	6	1,204	0,778	0,721	0,687	0,824	1,000	1,653		
	7	0,633	0,410	0,382	0,328	0,448	0,563	1,000		
9	1	1,000	0,554	0,408	0,344	0,320	0,329	0,388	0,617	
	2	1,695	1,000	0,758	0,650	0,610	0,630	0,744	1,187	
	3	2,062	1,253	1,000	0,881	0,840	0,875	1,040	1,664	
	4	2,148	1,324	1,088	1,000	0,980	1,037	1,244	2,000	
	5	2,000	1,244	1,037	0,980	1,000	1,088	1,324	2,148	
	6	1,664	1,040	0,875	0,840	0,881	1,000	1,253	2,062	
	7	1,187	0,744	0,630	0,610	0,650	0,758	1,000	1,695	
	8	0,617	0,388	0,329	0,320	0,344	0,408	0,554	1,000	
10	1	1,000	0,547	0,397	0,328	0,296	0,288	0,306	0,371	0,605
	2	1,729	1,000	0,746	0,625	0,588	0,556	0,592	0,719	1,173
	3	2,160	1,289	1,000	0,859	0,792	0,781	0,837	1,020	1,667
	4	2,333	1,406	1,123	1,000	0,944	0,944	1,020	1,250	2,050
	5	2,284	1,437	1,123	1,024	1,000	1,024	1,123	1,437	2,284
	6	2,050	1,250	1,020	0,944	0,944	1,000	1,123	1,406	2,333
	7	1,667	1,020	0,837	0,781	0,792	0,859	1,000	1,289	2,160
	8	1,173	0,719	0,592	0,556	0,588	0,625	0,746	1,000	1,729
	9	0,605	0,371	0,306	0,288	0,296	0,328	0,397	0,547	1,000

Scanned with OKEN Scanner



Nr. de panouri	Forța în secțiunea k	Valorile 1000 ω_{jk} în secțiunea j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	9,115								
3	1	9,144	5,260							
	2	5,260	5,028							
4	1	7,144	6,999	2,736						
	2	6,999	9,115	4,070						
	3	2,736	4,070	2,747						
5	1	5,461	6,625	4,523	2,526					
	2	6,625	9,792	7,381	2,603					
	3	4,523	7,381	6,912	2,784					
	4	2,526	2,603	2,784	1,621					
6	1	4,242	5,773	4,968	2,972	0,934				
	2	5,773	9,144	8,488	5,260	1,686				
	3	4,968	8,488	9,115	6,173	2,074				
	4	2,972	5,260	6,173	5,028	1,916				
	5	0,934	1,686	2,074	1,916	1,027				
7	1	3,367	4,924	4,806	3,635	2,029	0,611			
	2	4,924	8,146	8,455	6,580	3,735	1,136			
	3	4,806	8,455	9,793	8,148	4,795	1,493			
	4	3,635	6,580	8,148	7,650	4,885	1,593			
	5	2,029	3,735	4,795	4,885	3,684	1,354			
	6	0,611	1,136	1,493	1,593	1,354	0,683			

I ÎNCASTRATE LA CELĂLALT CAPĂT

Tabela 38

Coeficienți de transmitere

$$\eta_{jk} = \omega_{jk} \frac{l^3}{EI} \qquad \frac{\eta_{jk}}{\eta_{jj}} = \frac{\omega_{jk}}{\omega_{jj}}$$

Nr. de panouri	Forța în secțiunea k	Raportul $\frac{\omega_{jk}}{\omega_{jj}}$ pentru calculul coef. de transmitere spre j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	1,000								
3	1	1,000	1,046							
	2	0,575	1,000							
4	1	1,000	0,768	0,996						
	2	0,979	1,000	1,482						
	3	0,383	0,447	1,000						
5	1	1,000	0,676	0,654	1,558					
	2	1,213	1,000	1,067	1,605					
	3	0,828	0,753	1,000	1,717					
	4	0,462	0,265	0,402	1,000					
6	1	1,000	0,631	0,545	0,591	0,774				
	2	1,360	1,000	0,931	1,046	1,642				
	3	1,171	0,928	1,000	1,228	2,019				
	4	0,700	0,575	0,677	1,000	1,866				
	5	0,220	0,184	0,228	0,381	1,000				
7	1	1,000	0,607	0,491	0,475	0,551	0,888			
	2	1,462	1,000	0,863	0,860	1,013	1,651			
	3	1,427	1,038	1,000	1,064	1,301	2,170			
	4	1,080	0,808	0,832	1,000	1,326	2,315			
	5	0,603	0,459	0,490	0,638	1,000	1,968			
	6	1,181	0,139	0,152	0,208	0,368	1,000			

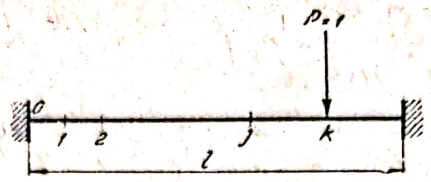
Scanned with OKEN Scanner

Nr. de panouri	Forța în secțiunea k	Valorile 1000 ω_{jk} în secțiunea j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	1	2,727	4,158	4,491	2,292	2,688	1,437	0,421		
	2	4,158	7,135	7,948	6,999	5,013	2,706	0,796		
	3	4,491	7,948	9,657	8,973	6,558	3,570	1,085		
	4	2,292	6,999	8,973	9,115	7,173	4,070	1,241		
	5	2,688	5,013	6,558	7,173	6,191	3,828	1,223		
	6	1,437	2,706	3,570	4,070	3,828	2,747	0,985		
	7	0,421	0,796	1,085	1,241	1,223	0,985	0,484		
9	1	2,250	3,585	4,001	3,729	3,095	2,028	1,054	0,302	
	2	3,585	6,241	7,264	6,934	5,638	3,848	2,006	0,580	
	3	4,001	7,264	9,144	9,102	7,585	5,260	2,781	0,809	
	4	3,729	6,934	9,102	9,720	8,498	6,061	3,268	0,963	
	5	3,095	5,638	7,585	8,498	8,126	6,053	3,377	1,020	
	6	2,028	3,848	5,260	6,061	6,053	5,028	2,996	0,953	
	7	1,054	2,006	2,781	3,268	3,377	2,996	2,092	0,740	
	8	0,302	0,580	0,809	0,963	1,020	0,953	0,740	0,354	
10	1	1,883	3,083	3,581	3,528	3,073	2,366	1,555	0,791	0,223
	2	3,083	5,461	6,599	6,625	6,260	4,523	2,988	1,526	0,431
	3	3,581	6,599	8,489	8,857	7,970	6,265	4,175	2,138	0,617
	4	3,528	6,625	8,857	9,792	9,166	7,382	5,005	2,603	0,746
	5	3,073	6,260	7,970	9,166	9,115	7,666	5,345	3,260	0,823
	6	2,366	4,523	6,265	7,382	7,666	6,912	5,077	2,784	0,828
	7	1,555	2,988	4,175	5,005	5,345	5,077	4,079	2,399	0,746
	8	0,791	1,526	2,138	2,603	3,260	2,784	2,399	1,621	0,563
	9	0,223	0,431	0,617	0,746	0,823	0,828	0,746	0,563	0,263

Tabela 38 (continuare)

Nr. de panouri	Forța în secțiunea k	Raportul $\frac{\omega_{jk}}{\omega_{jj}}$ pentru calculul coef. de transmitere spre j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	1	1,000	0,583	0,465	0,328	0,434	0,524	0,870		
	2	1,525	1,000	0,823	0,768	0,810	0,985	1,645		
	3	1,645	1,114	1,000	0,984	1,059	1,299	2,242		
	4	1,097	0,981	0,929	1,000	1,143	1,482	2,564		
	5	0,985	0,703	0,679	0,787	1,000	1,393	2,527		
	6	0,527	0,379	0,370	0,447	0,618	1,000	2,035		
	7	0,154	0,112	0,112	0,136	0,198	0,358	1,000		
9	1	1,000	0,574	0,438	0,384	0,381	0,403	0,504	0,853	
	2	1,593	1,000	0,795	0,713	0,694	0,765	0,959	1,638	
	3	1,778	1,164	1,000	0,936	0,993	1,046	1,329	2,285	
	4	1,657	1,111	0,995	1,000	1,046	1,206	1,562	2,720	
	5	1,376	0,903	0,830	0,874	1,000	1,204	1,614	2,881	
	6	0,901	0,617	0,575	0,624	0,745	1,000	1,432	2,692	
	7	0,468	0,321	0,304	0,336	0,416	0,596	1,000	2,090	
	8	0,134	0,093	0,088	0,099	0,127	0,189	0,354	1,000	
10	1	1,000	0,565	0,422	0,360	0,337	0,342	0,381	0,488	0,848
	2	1,637	1,000	0,777	0,677	0,687	0,654	0,733	0,941	1,639
	3	1,902	1,209	1,000	0,905	0,874	0,906	1,024	1,319	2,346
	4	1,874	1,213	1,043	1,000	1,006	1,068	1,227	1,606	2,837
	5	1,632	1,146	0,939	0,936	1,000	1,109	1,310	2,011	3,129
	6	1,253	0,828	0,738	0,754	0,841	1,000	1,245	1,717	3,148
	7	0,828	0,547	0,492	0,511	0,586	0,734	1,000	1,480	2,837
	8	0,420	0,249	0,252	0,266	0,358	0,403	0,588	1,000	2,141
	9	0,118	0,079	0,073	0,076	0,090	0,120	0,183	0,347	1,000

Scanned with OKEN Scanner



Nr. de panouri	Forța în secțiunea k	Valorile 1000 ω_{jk} în secțiunea j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	5,208								
3	1	3,659	2,515							
	2	2,515	3,659							
4	1	2,197	2,605	1,058						
	2	2,605	5,208	2,605						
	3	1,058	2,605	2,197						
5	1	1,366	2,016	1,450	0,502					
	2	2,016	4,608	3,926	1,450					
	3	1,450	3,926	4,608	2,016					
	4	0,502	1,450	2,016	1,366					
6	1	0,893	1,486	1,350	0,829	0,264				
	2	1,486	3,658	3,858	2,515	0,829				
	3	1,350	3,858	5,208	3,858	1,350				
	4	0,829	2,515	3,858	3,658	1,486				
	5	0,264	0,829	1,350	1,486	0,893				
7	1	0,612	1,098	1,133	0,880	0,499	0,152			
	2	1,098	2,833	3,355	2,754	1,609	0,499			
	3	1,133	3,355	4,896	4,475	2,754	0,880			
	4	0,880	2,754	4,475	4,896	3,355	1,133			
	5	0,499	1,609	2,754	3,355	2,833	1,098			
	6	0,152	0,499	0,880	1,133	1,098	0,612			

Scanned with OKEN Scanner

ÎNCASTRATE

coeficienți de transmitere

Tabela 39

$$\eta_{jk} = \omega_{jk}\frac{l^3}{EI} \qquad \frac{\eta_{jk}}{\eta_{jj}} = \frac{\omega_{jk}}{\omega_{jj}}$$

Nr. de panouri	Forța în secțiunea k	Raportul $\frac{\omega_{jk}}{\omega_{jj}}$ pentru calculul coef. de transmitere spre j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	1,000								
3	1	1,000	0,687							
	2	0,687	1,000							
4	1	1,000	0,500	0,481						
	2	1,186	1,000	1,186						
	3	0,481	0,500	1,000						
5	1	1,000	0,438	0,315	0,675					
	2	1,476	1,000	0,852	1,061					
	3	1,061	0,852	1,000	1,476					
	4	0,675	0,315	0,438	1,000					
6	1	1,000	0,406	0,259	0,227	0,296				
	2	1,664	1,000	0,741	0,687	0,928				
	3	1,512	1,055	1,000	1,055	1,512				
	4	0,928	0,687	0,741	1,000	1,664				
	5	0,296	0,227	0,259	0,406	1,000				
7	1	1,000	0,388	0,231	0,180	0,176	0,248			
	2	1,794	1,000	0,685	0,562	0,570	0,815			
	3	1,851	1,184	1,000	0,914	0,972	1,438			
	4	1,438	0,972	0,914	1,000	1,184	1,851			
	5	0,815	0,570	0,562	0,685	1,000	1,794			
	6	0,248	0,176	0,180	0,231	0,388	1,000			

Scanned with OKEN Scanner

Nr. de panouri	Forța în secțiunea k	Valorile 1000 ω_{jk} în secțiunea j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	1	0,436	0,824	0,921	0,814	0,584	0,316	0,093		
	2	0,824	2,197	2,797	2,605	1,922	1,058	0,316		
	3	0,921	2,797	4,292	4,395	3,399	1,922	0,584		
	4	0,814	2,605	4,395	5,208	4,395	2,605	0,814		
	5	0,584	1,922	3,399	4,395	4,292	2,797	0,921		
	6	0,316	1,058	1,922	2,605	2,797	2,197	0,824		
	7	0,093	0,316	0,584	0,814	0,921	0,824	0,436		
9	1	0,324	0,635	0,750	0,719	0,587	0,402	0,211	0,061	
	2	0,635	1,723	2,295	2,323	1,950	1,358	0,715	0,211	
	3	0,750	2,295	3,656	4,021	3,521	2,516	1,358	0,402	
	4	0,719	2,323	4,021	5,016	4,835	3,521	1,950	0,587	
	5	0,587	1,950	3,521	4,835	5,016	4,021	2,323	0,719	
	6	0,402	1,358	2,516	3,521	4,021	3,656	2,295	0,750	
	7	0,211	0,715	1,358	1,950	2,323	2,295	1,723	0,635	
	8	0,061	0,211	0,402	0,587	0,719	0,750	0,635	0,324	
10	1	0,243	0,491	0,604	0,612	0,542	0,422	0,279	0,143	0,041
	2	0,491	1,365	1,598	2,016	2,260	1,451	0,972	0,502	0,143
	3	0,604	1,598	3,087	3,565	3,376	4,237	1,860	0,972	0,279
	4	0,612	2,016	3,565	4,608	4,666	3,926	2,237	1,451	0,422
	5	0,542	2,260	3,376	4,666	5,208	4,666	3,376	2,260	0,542
	6	0,422	1,451	4,237	3,926	4,666	4,608	3,565	2,016	0,612
	7	0,279	0,972	1,860	2,237	3,376	3,565	3,087	1,598	0,604
	8	0,143	0,502	0,972	1,451	2,260	2,016	1,598	1,365	0,491
	9	0,041	0,143	0,279	0,422	0,542	0,612	0,604	0,491	0,243

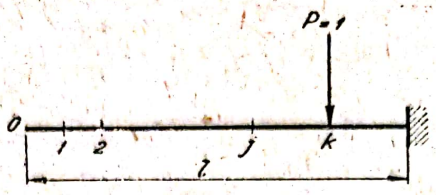
Scanned with OKEN Scanner

Tabela 39 (continuare)

Nr. de panouri	Forța în secțiunea k	Raportul $\frac{\omega_{jk}}{\omega_{jj}}$ pentru calculul coef. de transmitere spre j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	1	1,000	0,375	0,214	0,156	0,136	0,144	0,213		
	2	1,890	1,000	0,652	0,500	0,448	0,481	0,725		
	3	2,112	1,273	1,000	0,844	0,792	0,875	1,339		
	4	1,867	1,186	1,024	1,000	1,024	1,186	1,867		
	5	1,339	0,875	0,792	0,844	1,000	1,273	2,112		
	6	0,725	0,481	0,448	0,500	0,652	1,000	1,890		
	7	0,213	0,144	0,136	0,156	0,214	0,375	1,000		
9	1	1,000	0,368	0,205	0,143	0,117	0,109	0,122	0,188	
	2	1,960	1,000	0,628	0,463	0,388	0,371	0,415	0,651	
	3	2,314	1,326	1,000	0,801	0,702	0,685	0,789	1,240	
	4	2,219	1,342	1,099	1,000	0,963	0,963	1,131	1,811	
	5	1,811	1,131	0,963	0,963	1,000	1,099	1,342	2,219	
	6	1,240	0,789	0,685	0,702	0,801	1,000	1,326	2,314	
	7	0,651	0,415	0,371	0,388	0,463	0,628	1,000	1,960	
	8	0,188	0,122	0,109	0,117	0,143	0,205	0,368	1,000	
10	1	1,000	0,359	0,195	0,111	0,104	0,091	0,090	0,104	0,168
	2	2,020	1,000	0,518	0,437	0,433	0,315	0,315	0,367	0,588
	3	2,320	1,395	1,000	0,773	0,648	0,919	0,602	0,667	1,148
	4	2,519	1,476	1,154	1,000	0,895	0,852	0,886	1,063	1,732
	5	2,230	1,655	1,093	1,012	1,000	1,012	1,093	1,655	2,230
	6	1,732	1,063	0,886	0,852	0,895	1,000	1,154	1,476	2,519
	7	1,148	0,667	0,602	0,919	0,648	0,773	1,000	1,395	2,320
	8	0,588	0,367	0,315	0,315	0,433	0,437	0,510	1,000	2,020
	9	0,168	0,104	0,090	0,091	0,104	0,111	0,195	0,359	1,000

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienţi de influenţă şi



Nr. de panouri	Forţa în secţiunea k	Valorile 1000 ω_{jk} în secţiunea j									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	333,333	104,167								
	1	104,167	41,667								
3	0	333,333	172,840	49,333							
	1	172,840	98,765	30,864							
	2	49,333	30,864	12,346							
4	0	333,333	210,937	104,167	28,645						
	1	210,937	140,625	72,916	20,833						
	2	104,167	72,916	41,667	13,020						
	3	28,645	20,833	13,020	5,208						
5	0	333.333	234,667	144,000	69,333	18,403					
	1	234,667	170,667	108,000	53,333	14,493					
	2	144,000	108,000	72,000	37,333	10,583					
	3	69,333	53,333	37,333	21,333	6,673					
	4	18,403	14,493	10,583	6,673	2,667					
6	0	333,333	250,772	172,840	104,167	49,333	13,117				
	1	250,772	192,901	135,803	83,333	40,123	10,802				
	2	172,840	135,803	98,765	62,500	30,864	8,488				
	3	104,167	83,333	62,500	41,667	21,605	6,173				
	4	49,333	40,123	30,864	21,605	12,346	3,858				
	5	13,117	10,802	8,488	6,173	3,858	1,543				
7	0	333,333	262,391	194,363	132,167	78,717	36,929	9,718			
	1	262,391	209,913	157,920	108,844	65,598	31,098	8,260			
	2	194,363	157,920	121,477	85,520	52,478	25,267	6,803			
	3	132,167	108,844	85,520	62,196	39,359	19,436	5,345			
	4	78,717	65,598	52,478	39,359	26,239	13,605	3,887			
	5	36,929	31,098	25,267	19,436	13,605	7,775	2.430			
	6	9,718	8,260	6,803	5,345	3,887	2,430	0,972			

$$\eta_{jk} = \omega_{jk} \frac{l^3}{EI} \qquad \frac{\eta_{jk}}{\eta_{jj}} = \frac{\omega_{jk}}{\omega_{jj}}$$

Nr. de panouri	Forța în secțiunea k	Raportul $\frac{\omega_{jk}}{\omega_{jj}}$ pentru calculul coef. de transmitere spre j									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1,000	2,500								
	1	0,312	1,000								
3	0	1,000	1,750	4,000							
	1	0,518	1,000	2,500							
	2	0,148	0,312	1,000							
4	0	1,000	1,500	2,500	5,500						
	1	0,633	1,000	1,750	4,000						
	2	0,312	0,518	1,000	2,500						
	3	0,085	0,148	0,312	1,000						
5	0	1,000	1,375	2,000	3,250	7,000					
	1	0,704	1,000	1,500	2,500	5,435					
	2	0,432	0,633	1,000	1,750	4,000					
	3	0,208	0,312	0,518	1,000	2,502					
	4	0,055	0,085	0,148	0,313	1,000					
6	0	1,000	1,300	1,750	2,500	4,000	8,500				
	1	0,750	1,000	1,375	2,000	3,250	7,000				
	2	0,518	0,704	1,000	1,500	2,500	5,500				
	3	0,312	0,432	0,633	1,000	1,750	4,000				
	4	0,148	0,208	0,312	0,518	1,000	2,500				
	5	0,039	0,055	0,085	0,148	0,312	1,000				
7	0	1,000	1,250	1,600	2,125	3,000	4,750	10,000			
	1	0,786	1,000	1,300	1,750	2,500	4,000	8,500			
	2	0,583	0,753	1,000	1,375	2,000	3,250	7,000			
	3	0,397	0,518	0,704	1,000	2,500	2,500	5,500			
	4	0,236	0,312	0,432	0,633	1,000	1,750	4,000			
	5	0,110	0,148	0,208	0,312	0,518	1,000	2,500			
	6	0,029	0,039	0,055	0,085	0,148	0,312	1,000			

Nr. de panouri	Forța în secțiunea k	Valorile 1000 ω_{jk} în secțiunea j									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	0	333,333	271,159	210,937	154,622	104,167	61,523	28,645	7,486		
	1	271,159	223,307	175,781	130,208	88,541	52,734	24,739	6,510		
	2	210,937	175,781	140,625	105,794	72,916	43,445	20,833	5,533		
	3	154,622	130,208	105,794	81,380	57,291	35,156	16,927	4,557		
	4	104,167	88,541	72,916	57,291	41,667	26,367	13,020	3,580		
	5	61,523	52,734	43,445	35,156	26,637	17,578	9,114	2,604		
	6	28,625	24,739	20,833	16,927	13,020	9,114	5,208	1,627		
	7	7,486	6,510	5,533	4,557	3,580	2,604	1,627	0,651		
9	0	333,333	321,902	224,050	172,840	125,742	84,133	49,333	22,862	5,944	
	1	321,902	234,110	190,443	148,148	108,595	73,160	43,210	20,119	5,258	
	2	224,050	190,443	156,835	125,456	91,448	62,186	37,037	17,375	4,572	
	3	172,840	148,148	125,456	98,765	74,302	51,212	30,864	14,632	3,887	
	4	125,742	108,595	91,448	74,302	57,156	40,328	24,691	11,888	3,201	
	5	84,133	73,160	62,186	51,212	40,328	29,264	18,519	9,145	2,515	
	6	49,333	43,210	37,037	30,864	24,691	18,519	12,346	6,401	1,829	
	7	22,862	20,119	17,375	14,632	11,888	9,145	6,401	3,658	1,143	
	8	5,944	5,258	4,572	3,887	3,201	2,515	1,829	1,143	0,457	
10	0	333,333	283,500	234,667	187,833	144,000	104,167	69,333	40,500	18,403	4,833
	1	283,500	243,000	202,667	163,333	126,000	91,667	61,333	36,000	16,448	4,333
	2	234,667	202,667	170,667	138,833	108,000	79,167	53,333	31,500	14,493	3,833
	3	187,833	163,333	138,833	114,333	90,000	66,667	45,333	27,000	12,538	3,333
	4	144,000	126,000	108,000	90,000	72,000	54,167	37,333	22,500	10,583	2,833
	5	104,167	91,667	79,167	66,667	54,167	41,667	29,333	18,000	8,628	2,333
	6	69,333	61,333	53,333	45,333	37,333	29,333	21,333	13,500	6,673	1,833
	7	40,500	36,000	31,500	27,000	22,500	18,000	13,500	9,000	4,667	1,333
	8	18,403	16,448	14,493	12,538	10,538	8,628	6,673	4,667	2,667	0,833
	9	4,833	4,333	3,833	3,333	2,833	2,333	1,833	1,333	0,833	0,333

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 40 (continuare)

Nr. de panouri	Forța în secțiunea s	Raportul $\frac{\omega_{jk}}{\omega_{jj}}$ pentru calculul coef. de transmitere spre j									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	0	1,000	1,214	1,500	1,900	2,500	3,500	5,500	11,500		
	1	0,813	1,000	1,250	1,600	2,125	3,000	4,750	10,000		
	2	0,633	0,786	1,000	1,300	1,750	2,500	4,000	8,500		
	3	0,464	0,583	0,752	1,000	1,375	2,000	3,250	7,000		
	4	0,312	0,397	0,518	0,704	1,000	1,500	2,500	5,500		
	5	0,185	0,236	0,312	0,432	0,633	1,000	1,750	4,000		
	6	0,086	0,110	0,148	0,208	0,312	0,518	1,000	2,500		
	7	0,022	0,029	0,039	0,055	0,085	0,148	0,312	1,000		
9	0	1,000	1,375	1,429	1,750	2,200	2,875	4,000	6,250	13,000	
	1	0,966	1,000	1,214	1,500	1,900	2,500	3,500	5,500	11,500	
	2	0,672	0,813	1,000	1,250	1,600	2,125	3,000	4,750	10,000	
	3	0,519	0,633	0,786	1,000	1,300	1,750	2,500	4,000	8,500	
	4	0,377	0,464	0,583	0,752	1,000	1,375	2,000	3,250	7,000	
	5	0,252	0,312	0,397	0,518	0,704	1,000	1,500	2,500	5,500	
	6	0,148	0,185	0,236	0,312	0,432	0,633	1,000	1,750	4,000	
	7	0,069	0,086	0,110	0,148	0,208	0,312	0,518	1,000	2,500	
	8	0,018	0,022	0,029	0,039	0,055	0,085	0,148	0,312	1,000	
10	0	1,000	1,167	1,375	1,643	2,000	2,500	3,250	4,500	7,000	14,500
	1	0,850	1,000	1,375	1,429	1,750	2,200	2,875	4,000	6,250	13,000
	2	0,704	0,834	1,000	1,214	1,500	1,900	2,500	3,500	5,500	11,500
	3	0,563	0,672	0,813	1,000	1,250	1,600	2,125	3,000	4,750	10,000
	4	0,432	0,519	0,633	0,786	1,000	1,300	1,750	2,500	4,000	8,500
	5	0,312	0,377	0,464	0,583	0,752	1,000	1,375	2,000	3,250	7,000
	6	0,208	0,252	0,312	0,397	0,518	0,704	1,000	1,500	2,500	5,500
	7	0,121	0,148	0,185	0,236	0,312	0,432	0,633	1,000	1,750	4,000
	8	0,055	0,069	0,086	0,110	0,148	0,208	0,312	0,518	1,000	2,500
	9	0,014	0,018	0,022	0,029	0,039	0,055	0,085	0,148	0,312	1,000

Scanned with OKEN Scanner

TABLOU RECAPITULATIV DE NOTAȚII CURENTE PENTRU VOL. I

Notații pentru bare și noduri

A, B = capetele unei bare izolate
i, j, k — noduri într-un sistem format din bare
j = nodul în care se scrie ecuația
k, i = noduri vecine (legate direct prin bare de nodul j)

La cadre . . . . . { jk — barele lucrînd la încovoiere; ji — barele lucrînd la torsiune

La grinzi continue . . . . . i, j, k — noduri succesive

La arce pe pile flexibile . { jk — arcele și tiranții; ji — pilele

La rețele de grinzi . . . . { k = nodurile de pe grinzile x; i = nodurile de pe grinzile y

Solicitări exterioare

$\overline{X}_{jk}^{(j)}$ = solisitarea capătului j al barei jk în situația $\delta_j = \delta_k = 0$

$\overline{X}_j = \sum \overline{X}_{jk}^{(j)}$ = solicitarea exterioară a nodului j, într-un sistem oarecare format din bare

$\overline{M}_{jk}^{(j)}$ = momentul de încastrare perfectă al barei jk în nodul j

$\overline{M}_j = \sum \overline{M}_{jk}^{(j)}$ = momentul neechilibrat din nodul j (solicitarea exterioară a sistemului de bază în j)

$\overline{H}_{jk}^{(j)}$ = împingerea arcului jk în nodul j, cînd nodurile j, k se consideră nedeplasabile

$\overline{H}_j = \sum \overline{H}_{jk}^{(j)}$ = împingerea neechilibrată din nodul j (solicitarea exterioară a sistemului de bază în j)

$\overline{P}_j$ = forța exterioară aplicată pe rețeaua de grinzi în nodul j

Solicitările preluate de capetele de bare

$X_{jk}^{(j)}$, $X_{jk}^{(k)}$ = solicitările cu care se încarcă extremitățile j și k ale barei jk în nodurile j și k, într-un sistem oarecare format din bare

$\Delta X_{jk}^{(j)} = X_{jk}^{(j)} - \overline{X}_{jk}^{(j)}$

$M_{jk}^{(j)}$, $M_{jk}^{(k)}$ = momentele cu care se încarcă extremitățile j și k ale barei jk în nodurile j și k

$M_{ji}^{(j)}$, $M_{ji}^{(i)}$ = momentele cu care se încarcă extremitățile j și i ale barei ji în nodurile j și i

$H_{jk}^{(j)}$, $H_{jk}^{(k)}$ = împingerile cu care se încarcă extremitățile j și k ale arcului jk în nodurile j și k

Scanned with OKEN Scanner

$Z_{jk}^{(j)}$, $Z_{jk}^{(k)}$ = idem pentru tirantul jk

$H_{ji}^{(j)}$ = împingerea cu care se încarcă pila ji în nodul j

$P_x^{(j)}$, $P_y^{(j)}$ = forțele repartizate grinzilor x și y în nodul j

$$[P_x^{(j)} + P_y^{(j)} = \overline{P}_j]$$

Forțe de legătură (în metoda eforturilor, la sisteme cu cîte 2 bare la nod)

X_j $[= X_{jk}^{(j)} = X_{ji}^{(j)}]$ = forța de legătură în nodul j între barele jk și ji, într-un sistem oare care format din bare, cu cîte 2 bare la nod

M_j $[= M_{jk}^{(j)} = M_{ji}^{(j)}]$ = momentul pe reazemul j al grinzii continue $\ldots i, j, k \ldots$

X_j = forța de legătură în nodul j între grinda x și grinda y a unei rețele de grinzi (forța axială în pendulul fictiv de legătură)

Valorile inițiale ale solicitărilor

$X_{jk}^{(j)(1)}$ = valoarea inițială a lui $X_{jk}^{(j)}$

$M_{jk}^{(j)(1)}$ = valoarea inițială a lui $M_{jk}^{(j)}$

$H_{jk}^{(j)(1)}$ = valoarea inițială a lui $H_{jk}^{(j)}$

$P_x^{(j)(1)}$ = valoarea inițială a lui $P_x^{(j)}$

$X_j^{(1)}$ = valoarea inițială a lui X_j

$M_j^{(1)}$ = valoarea inițială a lui M_j

Deplasări

δ_{jj} = deplasarea nodului j produsă de $X_{jk}^{(j)}$

δ_{jk} = deplasarea nodului j produsă de $X_{jk}^{(k)}$

δ_j = $\delta_{jj} + \delta_{jk}$ = deplasarea totală a nodului j

θ_j, θ_k = rotirile nodurilor j,k

$\theta_{jk}^{(j)}$, $\theta_{jk}^{(k)}$ = rotirile capetelor j și k ale barei jk

$\Delta\theta_j$ = variația rotirii capătului j al barei jk (în metoda Grinter)

$\varphi_{jk}^{(j)}$ = deplasarea liberă a capătului j al barei jk (în sistemul de bază cu legăturile la noduri desfăcute)

$\varphi_{jk}^{(j)}$ = rotirea liberă a capătului j al barei jk (considerată articulată în j)

$\varphi_{jk}^{(k)}$ = rotirea liberă a capătului k al barei jk (considerată articulată în k)

Δ_j, Δ_k = deplasările liniare (translații) ale nodurilor j, k

$\Delta_{jk}^{(j)}, \Delta_{jk}^{(k)}$ = deplasările liniare ale capetelor j,k ale barei jk

$\Delta_x^{(j)}, \Delta_y^{(j)}$ = săgețile grinzilor x și y în nodul j

Y = noțiune generalizată a deplasării

θ_j' = $E\theta_j$; Δ_j' = $E\Delta_j$

Valorile inițiale ale deplasărilor (tendințele de deplasare)

$\delta_j^{(1)}$ = valoarea inițială a deplasării δ_j (tendința de deplasare a nodului j, în sistemul de bază cu deplasările nodurilor blocate)

$\theta_j^{(1)}$ = valoarea inițială a rotirii θ_j (tendința de rotire a nodului j, în sistemul de bază cu rotirile nodurilor blocate)

$\Delta_j^{(1)}$ = valoarea inițială a translației Δ_j (tendința de translație a nodului j, în sistemul de bază cu translațiile nodurilor blocate)

$\theta_j'^{(1)}$, $\Delta_j'^{(1)}$ = valorile inițiale ale lui θ_j', Δ_j'

Scanned with OKEN Scanner

Trepte de calcul în iterație

m = treapta de calcul curentă
$X_{jk}^{(j)\,(m)}$ = valoarea necunoscutei $X_{jk}^{(j)}$ în treapta de calcul m (la fel: $P_x^{(j)\,(m)}$, $\theta_j^{(m)}$ etc.)
z = ultima treaptă de calcul

Date geometrice și de material pentru bare

E = modulul de elasticitate longitudinal
G = modulul de elasticitate transversal
E_t = modulul de elasticitate al tirantului
E_f = modulul de elasticitate al terenului de fundație
C = coeficientul de tasare (coef. lui Winkler)
I = momentul de inerție
I_x = momentul de inerție în secțiunea x a unei bare cu secțiune variabilă
I_0 = momentul de inerție de referință al unei bare cu secțiune variabilă
I_r = momentul de inerție maxim al unei bare cu secțiune variabilă

$$\frac{I_0}{I_r} = n$$

$I^{(t)}$ = momentul de inerție la răsucire
I_f = momentul de inerție al suprafeței bazei fundației
I_{jk} = momentul de inerție al barei jk
I_{jk_0} = momentul de inerție de referință al barei jk, cu secțiune variabilă
A = suprafața secțiunii transversale
A_t = suprafața secțiunii transversale a tirantului
A_f = suprafața secțiunii bazei fundației
l = deschiderea barei
λl = lungimea vutei
x, x' = distanțele unei secțiuni curente pînă la capetele barei
$l' = \frac{l'}{l}$

Coeficienți de influență

η = coeficienți de influență pentru deplasări
η_{jk} = deplasarea produsă în j de $X_{jk}^{(k)} = 1$
η_{jj} = deplasarea produsă în j de $X_{jj}^{(j)} = 1$
= coeficienți de influență pentru solicitări (ν_{jj}, ν_{jk})

Rigiditățile barelor

$K_{AB}^{(A)}$ = rigiditatea la rotire a barei AB în capătul A
$\rho_{AB}^{(A)}$ = rigiditatea practică la rotire a barei AB în capătul A
$K_{jk}^{(j)}$ = rigiditatea la rotire a barei jk în nodul j
$\rho_{jk}^{(j)}$ = rigiditatea practică la rotire a barei jk în nodul j
K_0 = rigiditatea la rotire a reazemului (fundației)
$T_{ji}^{(j)}$ = rigiditatea la torsiune a barei ji în nodul j
$\tau_{ji}^{(j)}$ = rigiditatea practică la torsiune a barei ji în nodul j
$B_{jk}^{(j)}$ = rigiditatea la translație a arcului (tirantului)
$\beta_{jk}^{(j)}$ = rigiditatea practică la translație a arcului (tirantului)
$B_{AB}^{(j)}$ = rigiditatea la încovoiere a grinzii AB în j
$\beta_{AB}^{(j)}$ = rigiditatea practică la încovoiere a grinzii AB în j
B_0 = rigiditatea la translație (tasare) a terenului de fundație

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienți de transmitere

$l_{j\to k}$ = coeficient de transmitere de la j la k
$l^{(0)}_{j\to k}$ = coeficient de transmitere de la j la k în operarea cu rotiri
$l^{(M)}_{j\to k}$ = idem în operarea cu momente
$l^{(\Delta)}_{j\to k}$ = idem în operarea cu translații
$l^{(H)}_{j\to k}$ = idem în operarea cu împingeri
$l'_{j\to k}$ = coeficient de transmitere în metoda Dašek

Coeficienți de repartiție

$r^{(j)}_{jk}$ = coeficientul de repartiție al barei jk în nodul j
$r^{(j)}_{x}$ = coeficientul de repartiție al grinzii x în nodul j

Factori de încărcare

m_A, m_B = factorii de încărcare în A și B pentru o bară izolată
$m_j, m^{(j)}_{jk}$ = factorul de încărcare al barei jk în nodul j
$m_k, m^{(k)}_{jk}$ = factorul de încărcare al barei jk în nodul k

Notații în sistemul de ecuații

a_{jk} = coeficientul necunoscutei x_k în ecuația j
b_{jk} $= -\dfrac{a_{jk}}{a_{jj}} = l_{k\to j}$ (coeficientul de transmitere de la k la j)
a_{j0} = termenul liber din ecuația j
b_{j0} $= \dfrac{a_{j0}}{a_{jj}}$ = valoarea inițială a necunoscutei x_j
x = necunoscută
$\Delta x^{(m)}$ = corecție la necunoscuta x în treapta m de calcul
$x^{(1)}$ = valoarea inițială a necunoscutei x
$x^{(m)}$ = valoarea în treapta m de calcul a necunoscutei x
D = determinantul principal al sistemului
$d_1 \ldots d_n$ = determinanți minori
r = rația progresiei geometrice a termenilor iterației
λ = rădăcinile ecuației $f(\lambda) = 0$

Diverse

$\mathfrak{M}$ = moment încovoietor în secțiunea x pentru o bară simplu rezemată
M_A, M_B = momentele la capetele unei bare izolate
ϑ_A, ϑ_B = rotirile capetelor unei bare izolate
c, c', c'', s', s'' = coeficienți pentru bare cu secțiune variabilă
$M^{(t)}$ = moment de răsucire
$\varepsilon^{(B)}_{AB}$ = gradul de încastrare al barei AB în B

Scanned with OKEN Scanner

LISTA TABELELOR

Nr. crt.	Tipul de bară	Coeficienții dați în tabelă	Pag.
1	Bare cu secțiune constantă	Caracteristici de încărcare și momente de încastrare perfectă	158
2	Vute simetrice drepte	Coeficienții c', c'', c și caracteristicile de încărcare $s'm_j$, $s''m_k$ pentru sarcină uniform distribuită	166
3	Vute simetrice parabolice	Idem	168
4	Vute nesimetrice drepte	Coeficienții c', c'', c	170
5	Vute nesimetrice drepte	Caracteristicile de încărcare $s'm_j$, $s''m_k$ pentru sarcină uniform distribuită	172
6	Vute nesimetrice parabolice	Coeficienții c', c'', c	174
7	Vute nesimetrice parabolice	Caracteristicile de încărcare $s'm_j$,$s''m_k$ pentru sarcină uniform distribuită	176
8	Vute simetrice drepte	Caracteristicile de încărcare $s'm_j$,$s''m_k$ pentru sarcini concentrate	178
9	Vute simetrice parabolice	Idem	180
10	Vute nesimetrice drepte	Idem	182
11	Vute nesimetrice parabolice	Idem	184
12	Vute simetrice drepte și parabolice	Rigidități pentru bare încastrate la ambele capete	186
13	Vute nesimetrice drepte	Idem	188
14	Vute nesimetrice parabolice	Idem	190
15	Vute nesimetrice drepte și parabolice	Rigidități pentru bare încastrate la un capăt și articulate la celălalt capăt	192
16	Vute simetrice drepte și parabolice	Coeficienți de transmitere în metoda repartizării momentelor	194
17	Vute nesimetrice drepte	Idem	196
18	Vute nesimetrice parabolice	Idem	198

Scanned with OKEN Scanner

Nr. crt.	Tipul de bară	Coeficienții dați în tabelă	Pag.
19	Vute simetrice drepte și parabolice	Momente de încastrare perfectă din sarcină uniform distribuită, pentru bare încastrate la ambele capete	200
20	Vute nesimetrice drepte	Idem	202
21	Vute nesimetrice parabolice	Idem	204
22	Vute nesimetrice drepte și parabolice	Momente de încastrare perfectă din sarcină uniform distribuită, pentru bare încastrate la un capăt și articulate la celălalt capăt	206
23	Vute simetrice drepte	Momente de încastrare perfectă din sarcini concentrate, pentru bare încastrate la ambele capete	208
24	Vute simetrice parabolice	Idem	210
25	Vute nesimetrice drepte	Idem	212
26	Vute nesimetrice parabolice	Idem	214
27	Vute nesimetrice drepte și parabolice	Momente de încastrare perfectă din sarcini concentrate, pentru bare încastrate la un capăt și articulate la celălalt capăt	216
28	Bare cu secțiunea variabilă liniar	Momente de încastrare perfectă dintr-un moment exterior concentrat, pentru bare încastrate la ambele capete	218
29	Bare cu secțiunea variabilă liniar	Momente de încastrare perfectă dintr-un moment exterior concentrat, pentru bare încastrate la un capăt și articulate la celălalt capăt	219
30	Bare cu secțiunea variabilă discontinuu	Rigidități pentru bare încastrate la ambele capete	220
31	Bare cu secțiunea variabilă discontinuu	Coeficienți de transmitere în metoda repartizării momentelor	221
32	Bare cu secțiunea variabilă discontinuu	Momente de încastrare perfectă din sarcini concentrate	222
33	Bare cu secțiunea variabilă discontinuu	Momente de încastrare perfectă din sarcină uniform distribuită	225
34	Bare cu secțiunea variabilă discontinuu	Momente de încastrare perfectă din momente concentrate	226
35	Bare lucrînd la răsucire	Momente de inerție la răsucire	252
36	Pile cu secțiunea variabilă liniar	Coeficienți de influență pentru săgeți	273
37	Grinzi simplu rezemate	Coeficienți de influență pentru săgeți și coeficienți de transmitere	308
38	Grinzi simplu rezemate la un capăt și încastrate la celălalt capăt	Idem	312
39	Grinzi dublu încastrate	Idem	316
40	Console	Idem	320

Scanned with OKEN Scanner

LISTA EXEMPLELOR DIN VOL. I

Nr. crt.	Cap.	Exemplul	Pag.
1	II	Rezolvarea unui sistem de 4 ecuaţii liniare cu 4 necunoscute prin iteraţie (metoda *Gauss*), operînd cu necunoscutele x	30
2	II	Rezolvarea unui sistem de 4 ecuaţii liniare cu 4 necunoscute prin iteraţie (metoda *Gauss*), operînd cu corecţiile Δx	32
3	II	Rezolvarea unui sistem de 4 ecuaţii liniare cu 4necunoscute prin iteraţie (metoda *Seidel*), operînd cu necunoscutele x	34
4	II	Rezolvarea unui sistem de 4 ecuaţii liniare cu 4 necunoscute prin iteraţie (metoda *Seidel*), operînd cu corecţiile Δx	35
5	II	Rezolvarea unui sistem de 3 ecuaţii liniare cu 3 necunoscute, aplicînd procedeul de iteraţie al lui *Wright*	49
6	IV	Cadru cu noduri fixe, calculat prin metoda transmiterii rotirilor	90
7	IV	Cadru cu noduri fixe, calculat prin metoda repartizării momentelor	100
8	IV	Cadru cu noduri fixe, calculat prin metoda *Dašek*	103
9	IV	Cadru cu noduri fixe avînd bare cu secţiune variabilă, calculat prin metoda repartizării momentelor	117
10	IV	Cadru cu noduri fixe avînd bare cu secţiune variabilă, calculat prin metoda transmiterii rotirilor	125
11	IV	Grinzi continue cu 3 şi 4 cîmpuri, calculate folosind însumarea directă a progresiei geometrice	134
12	IV	Cadru cu 3 deschideri, calculat folosind însumarea directă a progresiei geometrice	137
13	IV	Grindă continuă, calculată prin metoda transmiterii rotirilor, aplicînd procedeul de iteraţie al lui *Wright*	143
14	IV	Determinarea liniei de influenţă a momentului încovoietor într-o secţiune a unui cadru cu noduri fixe, cu metoda transmiterii rotirilor	146
15	V	Grindă continuă cu reazeme fixe, calculată prin metoda „momentelor la noduri"	234
16	V	Grindă continuă cu reazeme fixe, avînd bare cu secţiune variabilă, calculată prin metoda „momentelor la noduri"	238
17	V	Grindă principală de planşeu, calculată prin metoda momentelor la noduri, ţinînd seama şi de rigiditătile stîlpilor marginali	243
18	V	Cadru spaţial cu noduri fixe, calculat prin metoda transmiterii rotirilor	257
19	V	Cadru spaţial cu noduri fixe, calculat prin metoda repartizării momentelor	263
20	V	Cadru spaţial cu noduri fixe, calculat cu metoda *Dašek*	266
21	VI	Arce articulate pe pile flexibile, calculate prin metoda transmiterii deplasărilor	280
22	VI	Idem. — Arce cu tiranţi	282
23	VI	Arce articulate pe pile flexibile, calculate prin metoda repartizării împingerilor	286
24	VI	Reţea de grinzi calculată prin metoda „transmiterii forţelor"	296

BIBLIOGRAFIE

1. *Agent Radu — Popovici Mihai* : Calculul prin aproximaţii succesive al grinzilor continue cu metoda „momentelor la noduri" (Industria Construcţiilor şi a Materialelor de Construcţii nr. 6/1954).
2. *Aznavorian G. — Agent R.* : Metode iterative pentru calculul cadrelor cu noduri deplasabile. I. Metoda „nodurilor fictive" (Industria Construcţiilor şi a Materialelor de Construcţii nr. 3—7/1955).
3. *Avram Constantin* : Grinzi continue cu moment de inerţie variabil (Bucureşti, 1946).
4. *Avram Constantin* : La généralisation de la méthode Cross (Timişoara, 1949).
5. *Beiu Paladi Ernest* : Contribuţiuni la rezolvarea sistemelor static nedeterminate (Rev. Tehn. AGIR Constr. şi Mat. de constr. nr. 1—3/1949).
6. *Belluzzi Odone*, prof. : Scienza delle costruzioni, vol. II, cap. XX (Bologna, 1951).
7. *Bernadski N. M* : Simboliceskii rasciot jestkih sterjnevîh sistem (Trudî Sredneaziatskovo opîtno-issledovatelskovo Instituta, Taşkent, 1929).
8. *Bezicovici I. S.* : Calcule aproximative (trad. din l. rusă, Ed. Tehnică, 1952).
9. *Čališev K.* : Die Methode der sukzessiven Annäherung bei der Berechnung von vielfach statisch unbestimmten Systemen (Memoriile Congresului din 1936 al Asoc. Intern. de Poduri şi Şarpante, vol. IV).
10. *Cross Hardy* : Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moments (Transactions of A.S.C.E., vol. 96, 1932) (v. şi Proceedings, 1930).
11. *Cross Hardy* : Analysis of liquid flow in networks of conduits or conductors (Univ. Illinois, bull. 286, nov. 1936).
12. *Craemer H.* : Die Auflösung von Gleichungen der Baustatik durch Iteration (Österreichische Bauzeitschrift, nr. 4/1953).
13. *Csonka Pal*, dr. : Eljárás elmozduló sarkú derékszögyi keretek szamitására (Tudományos Könyvkiadó, N. V. Budapest, 1950).
14. *Csonka Pal*, dr. : Une contribution à la simplification de la méthode de Hardy Cross (Techn. Mod. Construction, nr. 3/1952).
15. *C.T.I.S.* : Stalnîie konstrucţii odnoetajnîh promîşlennîh zdanii (Moscova, 1952).
16. *Dašek Vaclav*, dr. : Das abgekürzte und verallgemeinerte Momentenverteilungsverfahren (Bet. u. E., nr. 20/1940).
17. *Dašek Vaclav*, dr. : Das allgemeine Kräfte- und Momentenverteilungsverfahren (Bet. u. E., nr. 15/1941).
18. *Dašek Vaclav*, dr. : Výpocet rámových konstrukcí rozdelovanim sil a momentu (Praga, 1951).
19. *Dernedde* W. : Lösung linearer Gleichungen durch Iteration (Bauing. nr. 1/1938).
20. *Dernedde* W. : Näherungsweise Berechnung von durchlaufenden Trägern und Rahmen (Bauing. nr. 3/1938).
21. *Dernedde* W. — *Müllenhoff A.* : Das Cross'sche Verfahren (Berlin, 1948).
22. *Dubin Ch.* : Le calcul des réseaux maillés — Contribution à l'application pratique de la méthode Hardy Cross (La Houille Blanche, mai-juin 1947).
23. *Enyedi Bela* : Trägerrost und Platte (Bet. u. E., nr. 3/1935).
24. *Fadeev V. N.* : Vîcislitelnîie metodî lineinoi alghebrî (Moscova, 1950).
25. *Filipescu Gh. Em.* : Statica Construcţiilor şi Rezistenţa Materialelor (Bucureşti, 1940).
26. *Fischer A.* : Calcul des cadres par la méthode des déformations (Paris, 1950).
27. *Ghelfand I. M.* : Lecţii de algebră liniară (trad. din l. rusă, Ed. Tehnică, 1953).
28. *Gheniev N. N.*, ş. a. : Alimentări cu apă (trad. din l. rusă, Ed. MCIMC, 1953).
29. *Gheorghiu Alexandru*, prof. : Statica Construcţiilor, vol. I (Bucureşti, 1951).
30. *Glazunov A. A.*, prof. : Reţelele sistemelor electrice (trad. din l. rusă, Ed. Tehnică, 1951).

Scanned with OKEN Scanner

31. *Gorodetki G. M.* : Rasciot elektriceskih setei (Kiev, 1953).
32. *Grinter L. E.* : Analysis of continuous frames by balancing angle changes (Proceedings of the A.S.C.E., 1936).
33. *Guldan Richard* : Rahmentragwerke und Durchlaufträger (Viena, 1949).
34. *Halasz R. v.* : Anschauliches Iterationverfahren zur Auflösung von Elastizitätsgleichungen (Bautechnik, nr. 20/1940).
35. *Halasz R. v.* : Anschauliche Verfahren zur Berechnung von Durchlaufbalken und Rahmen (Berlin, 1951).
36. *Halasz R. v.* : Verfahren zur Berechnung von Stockwerkrahmen nach Cross, Zaytzew und Csonka (Baupl. und Baut. nr. 3/1953).
37. *Hangan M. D.*, prof. : Influența torsiunii grinzilor în calculul planșeelor (Bul. Soc. Polit., nr. 9—11/1936).
38. *Hangan M. D.*, prof. : Grinzi continue de beton armat pe reazeme late (Bul. Șt. al Inst. de Constr. București, nr. 1/1953).
39. *Hangan M. D.*, prof. : Betonul armat. Introducere în alcătuirea și calculul structurilor statice, vol. I (București, ESAC, 1955).
40. *Kammüller K.*, prof : Entwicklungsrichtungen in der Statik der biegesteifen Stabwerke (Bautechnik, nr. 1—4/1944).
41. *Kloucek C.* : Das Prinzip der fortgeleiteten Verformung (B. u. E., nr. 24/1939).
42. *Krotov I. N.* : Priomî utocinennovo rasciota vodoprovodnîh setei (Moscova, 1954).
43. *Lobacev V. G.*, prof. : Priomî rasciota vodoprovodnîh setei (Moscova, 1950).
44. *Luetkens O.* : Die Methoden der Rahmenstatik (Berlin, 1949).
45. *Maney G. A.* — *Goldberg J.* : Simplified methods for the analysis of multiple joint rigid frames (Bull. Northwestern Univ. School of Eng., 1932).
46. *Mateescu Cristea* : La résolution des systèmes hyperstatiques par deux méthodes récentes (Critique et extension des méthodes Filipesco et Cross) — București, 1938.
47. *Mazilu Panait* : Calculul cadrelor — Deplasări și lucru mecanic virtual în metoda Cross (București, 1946).
48. *Mazilu Panait* : Calculul spațial al cadrelor cu grinzi longitudinale principale și grinzi transversale secundare (Studii și Cercetări de Mecanică și Metalurgie ale Acad. R.P.R., nr. 1—2/1952).
49. *Mazilu Panait* : Calculul structurilor cu bare curbe (Lucrările Sesiunii Generale Științifice a Academiei R.P.R., iunie 1950).
50. *Melan E.*, prof. : Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Stützenmomente des Durchlaufträgers (Schw. Bauz., nr. 30/1949).
51. *Merlino Fr. S.* : Una modifica nel metodo di Hardy Cross per il calcolo dei telai elastici (Giorn. del G. Civ. nr. 2/1951).
52. *Mohr O.* : Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik (1906).
53. *Müller Carl* : Beitrag zur Berücksichtigung der Knotenverschieblichkeit von hochgradig unbestimmten Rahmenwerken mit Hilfe eines Ansatzes der virtuellen Arbeit (B. u. Stahlb., nr. 1—2/1943).
54. *Palotás László*, dr. : Keretek elmélete es szamitása (Budapesta, 1951).
55. *Popovici C. Const.* : Asupra metodei iterației, aplicată la un sistem de ecuații liniare (Studii și Cercetări Matematice ale Acad. R.P.R. nr. 1—2/1953).
56. *Prenzlow R.* : Tragwerkberechnung nach Cross (Berlin, 1949).
57. *Prokofiev I. P.* : Statica Construcțiilor, vol. II (trad. din l. rusă, OPED CFR, 1951).
58. *Rabinovici I. M.* : K teorii stăticeski neopredelimîh ferm, Transjeldorizdat, 1933.
59. *Rabinovici I. M.* : Kurs stroitelnoi mehaniki, vol. II (Moscova, 1954).
60. *Raithel Aldo* : La dinamica dei sistemi solidali (Giorn. del G. Civ., nr. 11—12/1952).
61. *Roghitki S. A.* : Rasciot ploskih i prostranstvennîh ram metodom posledovatelnîh priblijenii (sposob Hardy Crossa) (Moscova, 1939).
62. *Roghitki S. A.* : Rasciot ram (Moscova, 1948).
63. *Sahnovski K. V.* : Construcții de beton armat, vol. II (trad. din l. rusă, ESAC 1954).
64. *Schröder H.* : Baustatik (Beton Kalender 1953, vol. I, pag. 309—319).
65. *Seidel* : Münch. Akad., 1874, pag. 81—108.
66. *Smirnov A. F.* : Stabilitatea statică și dinamică a construcțiilor (trad. din l. rusă, Ed. Tehnică a Transporturilor, 1951).
67. *Sosis P. M.* : O metodah rasciota staticeski neopredelimîh sterjnevih sistem („Issledovania po teorii soorujenii" — sbornik statei, vol. 6, Moscova 1954, pag. 257—288).
68. *Southwell R. V.* : Relaxation Methods in Engineering Science (Oxford, 1940).
69. *Șaghin P. P.* : Socrașcionniie metodî rasciota ram („Issledovania po teorii soorujenii" — sbornik statei, vol. 5, Moscova, 1951, pag. 428—457).
70. *Șaghin P. P.* : Rasciot mnogoiarusnîh ram sposobom posledovatelnovo sopriajenia (Moscova, 1954).
71. *Șteermann I. J.* : O metode posledovatelnîh priblijenii v stroitelnoi mehanike (Kiev, 1929).

Scanned with OKEN Scanner

72. *Strigl G.* : Allgemeingültige Annäherungsverfahren zur Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme (Stahlbau, nr 9—10/1952).
73. *Timoshenko S. — Young D. D.* : Theory of Structures (1945).
74. *Visy Zoltan* : Gyorsitott eljárás elmozduló sarokpontú, földszintes keretszerkezetek számitására (Mélyépitéstudományi Szemle, nr. 3/1953).
75. *Von Haller — Krani* : Vereinfachte Berechnung der Rahmenstütze (Bauing., nr. 9—10/1942).
76. *Von Mises — Pollaczek Geiringer* : Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, nr. 1/1929).
77. *Wright L. T.* : Cornell University Engineering Esperiment Station, Bull. (31 apr. 1943).
78. *Willmeyer Helmut* : Über die Lösung von linearen Gleichungsystemen durch Iteration (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, nr. 5/1936).
79. *Yu H.* : Metoda aproximațiilor succesive și aplicațiile ei în problema sistemelor static nedeterminate (Wuchang, China, 1936).
80. *Zacopceanu Andrei* : Metoda Cross (București, 1947).
81. *Zaitzeff S.* : La méthode de H. Cross et ses simplifications (Techn. Mod. Construction, nr. 9—11/1952).
82. *Zaitzeff S.* : Méthode générale de double relaxation (Techn. Mod. Construction, nr. 9/1951 și 1/1955).

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Pag.

Introducere 5
Capitolul I. **Scrierea sistemului de ecuații în cazul general** 9
I. Sisteme formate din bare 9
II. Relațiile între solicitări și deplasări pentru o bară 13
III. Scrierea sistemului de ecuații 17
IV. Alte sisteme 23
V. Concluzii 25

Capitolul II. **Rezolvarea prin iterație a sistemului de ecuații** 27
A. Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare prin metoda iterației . 27
I. Metoda clasică (Gauss) 27
II. Rezolvarea succesivă a ecuațiilor (metoda Seidel) 33
III. Suprapunerea efectelor 36
IV. Reprezentarea grafică a rezolvării unui sistem de 2 ecuații cu 2 necunoscute prin metoda iterației 37

B. Organizarea calculului pe o schemă de transmiteri (metoda R. Halasz) 40
I. Schema de transmiteri 40
II. Folosirea coeficienților de transmitere exponențiali . . . 46
III. Procedeul de iterație elementar al lui Wright 47
IV. Aplicarea la sistemele de ecuații din Statică (1.5, 1.6, 1.7, 1.8) 50

C. Seria termenilor iterației și convergența ei 55
I. Seria termenilor iterației 55
II. Convergența iterației 61
III. Rapiditatea convergentei 67
IV. Cazul sistemelor de ecuații (1.6) (1.7) (1.8) 72

D. Influența erorilor de calcul și corectarea lor în metoda iterației . 75

Capitolul III. **Sisteme static nedeterminate formate din bare. Generalități** 77

Capitolul IV. **Sisteme cu legături de tipul I, la care deplasările necunoscute sînt rotirile nodurilor. Cadre plane cu noduri fixe** 81

A. Relațiile între solicitări și deplasări (între momente și rotiri) la o bară dreaptă, supusă la încovoiere 81
I. Rotirile în funcție de momente 81
II. Momentele în funcție de rotiri 84

B. Scrierea sistemului de ecuații și rezolvarea lui prin iterație, cînd se iau ca necunoscute rotirile nodurilor 86
I. Scrierea ecuațiilor (de tipul 1,6) 86
II. Rezolvarea prin iterație (metoda „transmiterii rotirilor“) 88
III. Semnificația fizică a iterației 88
IV. Mersul calculului 89

C. Scrierea sistemului de ecuații și rezolvarea lui prin iterație cînd se iau ca necunoscute momentele la capetele barelor 95

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

I. Scrierea ecuațiilor (de tipul 1.5, 1.7) 95
II. Rezolvarea prin iterație (metoda „repartizării momentelor") 95
III. Semnificația fizică a iterației 97
IV. Mersul calculului 98
V. Metoda repartizării momentelor în forma simplificată (metoda Dasek) 102

D. Bare cu secțiune variabilă 104

I. Relațiile între momente și rotiri 104
II. Coeficienții de corecție c', c'', c, s', s'' 107
III. Rigiditățile barelor 112
IV. Coeficienții de transmitere 112
V. Momente de încastrare perfectă 114
VI. Convergența iterației 115

E. Detalii de calcul pentru cîteva cazuri particulare și aplicații uzuale 127

I. Considerarea simetriei 127
II. Reazeme încastrate parțial 129
III. Determinarea directă a rației progresiei la cadre simple . . . 133
IV. Aplicarea procedeului de iterație Wright în metoda transmiterii rotirilor 143
V. Linii de influență 145

F. Comparație între metodele de rezolvare prin aproximații succesive pentru cadre cu noduri fixe 149

I. Avantajele metodei transmiterii rotirilor 149
II. Avantajele metodei repartizării momentelor 149
III. Alte procedee de rezolvare prin aproximații succesive pentru cadre cu noduri fixe 151

Capitolul V. **Sisteme cu legături de tipul I, la care deplasările necunoscute sînt rotirile nodurilor. Cîteva cazuri speciale** 229

A. Grinzi continue. 229

I. Scrierea ecuațiilor 230
II. Rezolvarea prin iterație, (metoda „momentelor la noduri") 231
III. Mersul calculului 231
IV. Semnificația fizică a iterației 232
V. Avantajele metodei 233
VI. Bare cu secțiune variabilă. 238
VII. Calculul aproximativ al grinzilor făcînd parte din cadre etajate, cu ajutorul metodei „momentelor la noduri" . . . 242

B. Sisteme lucrînd la încovoiere și la răsucire (cadre spațiale cu noduri fixe) 246

I. Relațiile între momente și rotiri 251
II. Scrierea ecuațiilor și rezolvarea lor prin iterație cînd se iau ca necunoscute rotirile nodurilor 254
III. Scrierea ecuațiilor și rezolvarea lor prin iterație cînd se iau ca necunoscute momentele la capetele barelor 262
IV. Utilizarea metodei repartizării momentelor în forma simplificată (Dasek). 265
V. Metode simplificate pentru cadre cu travee egale 267
VI. Sisteme spațiale neortogonale 269

Capitolul VI. **Sisteme cu legături de tipul I, la care deplasările necunoscute sînt translațiile nodurilor** 271

A. Arce articulate pe pile flexibile 272
I. Relațiile între deplasări și împingeri 273
II. Scrierea ecuațiilor și rezolvarea lor prin iterație, cînd se iau ca necunoscute deplasările Δ ale nodurilor 276

Pag.

III. Scrierea ecuațiilor și rezolvarea lor prin iterație cînd se iau ca necunoscute împingerile H 284
IV. Diverse detalii de calcul 286

B. Rețele de grinzi 287

I. Relațiile între forțe și săgeți într-o grindă 290
II. Scrierea ecuațiilor și rezolvarea lor prin iterație, cînd se iau ca necunoscute forțele repartizate grinzilor (P_x, P_y) . . 291
III. Domeniul de aplicație. 304

Tablou recapitulativ de notații curente 324

Lista tabelelor 328

Lista exemplelor 330

Bibliografie 331

Redactor de carte: Ing. Gabay Jak
Tehnoredactor: Kivu N. Nicolae
Corector: Carnabel I.

Dat la cules 13.04.955. Bun de tipar 20.07.955. Tiraj 2000+90. Hîrtie semivelină 65 g./m². Format 70 × 100/16. Coli editoriale 26,10. Coli tipar 21. A. 062. Pentru bibliotecile mari indicile de clasificare 624.041.2 Pentru bibliotecile mici 624. Prețul Lei 20.35.

Tiparul executat la com. Nr. 815 la Întreprinderea Poligrafică Nr. 3
B-dul 6 Martie, 29, București — R.P.R.

336

E R A T Ă

Pag.	Rîndul	În loc de:	Se va citi:	Din vina:
3	5 jos	*sistematizate tratate*	*sistematizate şi tratate*	Tipografiei
66	4 jos	$\frac{D^{(m)}}{d_k^{(m)}} d > 0$	$\frac{D^{(m)}}{d_k^{(m)}} > 0$	,,
106	formula (4.25)	$\frac{1}{6 E I_0}$	$\frac{l}{6 E I_0}$	,,
305	19	$\frac{\eta_{jk} + \eta_{jk}'}{\eta_{jj} + \eta_{jj}'}$	$\frac{\eta_{jk} + \eta_{jk}'}{\eta_{jj} + \eta_{jj}'}$	,,
312	titlul tabelei	Grinzi simpiu rezumafe	Grinzi simplu rezemate	Editurii
idem	idem	şoeficienţi	coeficienţi	Tipografiei

Metoda aproximaţiilor succesive